A 22 203 C

Zeitschrift für Physik

Unter Mitwirkung der
Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

O. Haxel

H. Jensen

Band 202 · 1967

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Z. Physik

1. Juni 1967

Zeitschrift für Physik

Begründet 1920. Herausgegeben unter Mitwirkung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft von *K. Scheel* und *H. Geiger*, Bd. 124–141 (1947–1955) von *M. v. Laue* und *R. W. Pohl*. Band 129–175 unter Mitwirkung des Verbandes Deutscher Physikalischer Gesellschaften herausgegeben; ab Band 176 unter Mitwirkung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. Band 1–4 (1921): Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn. Ab Band 5: Berlin, Springer.

Die **„Zeitschrift für Physik"** erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 76.–. Die Zeitschrift für Physik ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Manuskriptsendungen sind zu richten an einen der Herren Herausgeber:

Professor Dr. O. Haxel oder *Professor Dr. J. Hans D. Jensen, 69 Heidelberg, Physikalische Institute, Philosophenweg 12.*

Das Manuskript muß *völlig druckfertig* und *gut lesbar* sein. Für Text und Formeln ist Maschinenschrift zu verwenden. Vorkommende gotische (Fraktur) oder griechische Buchstaben sowie einander ähnliche Zeichen sind durch verschiedenfarbige Unterstreichung besonders zu kennzeichnen. Die *Literaturhinweise* sind in Form von Fußnoten zu bringen, die innerhalb einer Arbeit durchnumeriert werden.

In den Korrektur-Abzügen sollen nur Satzfehler verbessert, jedoch keine inhaltlichen oder stilistischen Änderungen vorgenommen werden. Nachträgliche (vom Manuskript abweichende) Korrekturen müssen den Autoren in Rechnung gestellt werden.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Springer-Verlag

1 Berlin 31 (Wilmersdorf), Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 830301,
Fernschreibnummer 01-83319
69 Heidelberg 1, Postfach 1780, Fernsprecher 49101, Fernschreibnummer 04-61723

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Zeitschrift für Physik

Unter Mitwirkung der
Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

O. Haxel

H. Jensen

Band 202 · 1967

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Alle Rechte, einschließlich das der Übersetzung in fremde Sprachen und das der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung, vorbehalten. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York
Printed in Germany

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg

Inhalt des 202. Bandes

SUESS, H.E.: Zur Chronologie des alten Ägypten 1
LÜDERS, G.: Temperature Dependence of Upper Critical Fields for Clean Superconductors of the Second Kind 8
UNSÖLD, A.: Zur stellaren Häufigkeitsverteilung und Entstehung der chemischen Elemente 13
BUCKA, H., J. NEY und K.P.WIRTNIK: Hyperfeinstrukturanomalie und Kernquadrupolwechselwirkungskonstanten des angeregten $3d^9\,4s\,4p\,{}^4P_{\frac{3}{2}}$-Terms im Cu I-Spektrum von Cu^{63} und Cu^{65} 22
SEABORN, J.B., D. DRECHSEL, and W. GREINER: Collective Intermediate Structure in the Giant Resonance of ^{28}Si 32
ZEH, H.D.: Symmetrieverletzende Modellzustände und kollektive Bewegungen 38
EICHLER, J.: On Corrections due to Higher-Order Electromagnetic Transitions in Nuclei 49
LIPPERHEIDE, R.: A Semi-Phenomenological Nuclear Optical-Model Potential 58
BETHGE, K., G. GÜNTHER, K.R. SCHUBERT und E. SPETH: Spinbestimmung des Grundzustandes von ^{10}B durch Mottstreuung 70
BIERTER, W., and K. DIETRICH: One-Dimensional Model of Deuteron-Potential Scattering 74
BECK, F., J. BIRKHOLZ, and P. MANAKOS: Coupling of Core Excitation and Single-Particle Motion in Odd-A-Nuclei 89
MAHAUX, C., and H.A.WEIDENMÜLLER: Isospin Purity of the Isobaric Analogue Resonances for Several Open Channels 97
FITZ, W., J. HEGER, R. JAHR und R. SANTO: Untersuchung der Niveaustruktur von ^{53}Cr und ^{52}Cr mit (d, d') und (d, t)-Reaktionen 109
LANGENBERG, M., und H. STEINWEDEL: Bemerkung zu den Punkttransformationen in der Quantentheorie 118
DANOS, M., and W. GREINER: Treatment of Nuclear Reactions Above the Two-Particle Threshold 125
AMIET, J.-P.: Zur mikroskopischen Beschreibung der kollektiven Kern-Zustände 150
YUCKER, W., A. PLASTINO, and S.A. MOSZKOWSKI: Surface Delta Interaction and Electromagnetic Transitions in Tin and Lead Isotopes 177
RASMUSSEN, J.O., and C.W. MA: On the Influence of Shell Structure and Matrix Element Fluctuations on the Pairing Correlation in Nuclei 182
THEISSEN, H.: Messung der Kernradiusdifferenzen von ^{46}Ti, ^{48}Ti und ^{50}Ti durch elastische Elektronenstreuung 190
POWERS, R.J., and V.L. TELEGDI: Interpretation of the Experimental Evidence Concerning the Quadrupole Moment of Bi^{209}. — A Test of the Shell Model 214
WILD, W.: Zur Abspaltung der Schwerpunktsbewegung in der Schalenmodellbeschreibung von Kernreaktionen 220
HINTERBERGER, F., G. MAIRLE, U. SCHMIDT-ROHR, P. TUREK, and G.J.WAGNER: Shell Structure Studies in the Titanium Region with 52 MeV Deuterons . . 236
PAULI, H.-C., and K. ALDER: Investigation of Anomalous K, L and M Shell Conversion in Electric Dipole Transitions 255
KIRSTEN, T., W. GENTNER und O.A. SCHAEFFER: Massenspektrometrischer Nachweis von $\beta\beta$-Zerfallsprodukten 273

Seite

NELSON, G.C., and E.N. HATCH: Concerning Internal Conversion Coefficients in Hf^{180} 293
EBENHÖH, W., W. GLÖCKLE, J. HÜFNER, and H.A. WEIDENMÜLLER: A Shell-Model Calculation in the Continuum for the Reaction $N^{15}(n, n')N^{15*}$ 301
BRAUNSFURTH, J., J. MORGENSTERN, H. SCHMIDT und H.J. KÖRNER: Untersuchung gestörter Winkelverteilungen an F^{19} in ferromagnetischen Gittern 321
BRENIG, W.: Shell Model Approach to Intermediate Resonances 340
MÜLLER, V.F., and J. ROTHLEITNER: The Adler-Weisberger Sum Rule 349
KOSE, R., W. PAUL, K. STOCKHORST, and K.H. KISSLER: Photodisintegration of the Deuteron from 100 to 420 MeV 364
HERTEL, P.: Non-Hermitian Weak Hadronic Current and the $\Sigma \to \Lambda$ Leptonic Decay 383
HÖHLER, G., and G. EISENBEISS: Analysis of the $\pi^{\pm} p$ Polarization Data at High Energies 397
GERLACH, B., D. GROMES und J. PETZOLD: Eine kritische Analyse der Ladungsdichte des Klein-Gordon-Feldes 401
FRANZ, W.: Bhabha-Gleichung und imaginäre Parität von Fermionen 412
LIPKIN, H.J.: Some Implications of the Quark Model for High Energy Scattering 414
GROTCH, H., and D.R. YENNIE: Nuclear Motion Corrections to the Binding Energy in Hydrogen. An Effective Potential Approach 425
KOKOTT, T.P., M.P. LOCHER, and H. ROLLNIK: The Reaction $\gamma\, {}^4\mathrm{He} \to {}^3\mathrm{H}\, n\, \pi^+$ in Impulse Approximation 436
SCHWELA, D., H. ROLLNIK, R. WEIZEL, and W. KORTH: Evaluation of Multipoles for Photo- and Electroproduction of Pions. I. Theoretical Background . . . 452
BÖCKMANN, K., W. SANDHAS, and H. WESSEL: Photoproduction of $N^*(1236)$ by Polarized γ-Quanta 477
ARMENTEROS, R., M. FERRO-LUZZI, D.W.G. LEITH, R. LEVI-SETTI, A. MINTEN, R.D. TRIPP, H. FILTHUTH, V. HEPP, E. KLUGE, H. SCHNEIDER, R. BARLOUTAUD, P. GRANET, J. MEYER, and J.P. PORTE: A Study of the Reaction $K^- p \to Y_1^*(1385) + \pi$ between 780 and 1220 MeV/c 486
PARSONS, R.G., and V.F. WEISSKOPF: The Spectrum of Alkali-Atoms 492
KOPPE, H.: Der Einfluß von Spannungsschwankungen auf die Aufladezeit eines Kondensators 498
HARA, K.: Number-Conserving Approach to the Pairing-Force Model. II. Coupled Degenerate Model 504
HEFFT, K., and B. STECH: Mass Differences and Vector Currents 514
KRAMER, G., and K. MEETZ: Sum Rules in Perturbation Theory 525

Autorenverzeichnis 543

Zeitschrift für Physik 202, 1—7 (1967)

Zur Chronologie des alten Ägypten

HANS E. SUESS
University of California, San Diego, La Jolla, California

Eingegangen am 21. März 1967

A set of careful radiocarbon measurements of historically dated samples from ancient Egypt (approx. 2500—3300 B.C.) show excellent agreement with the historically expected age if the conventionial C-14 dates are corrected for variations in the atmospheric C-14 level over the past millenia. These variations have been established by calibration measurements on dendrochronologically dated bristlecone wood (*pinus aristata*), and are in the range of several percent, corresponding to age deviations of several hundred years.

Selten hat eine naturwissenschaftliche Entdeckung so fruchtbringend auf die Grundlagenforschung eines breiten Bereiches wissenschaftlicher Fachgebiete gewirkt, wie die Entdeckung des natürlichen Kohlenstoffisotopes mit der Masse 14 durch LIBBY[1]. Unsere Vorstellungen vom zeitlichen Ablauf der letzten Phasen der Eiszeit sowie der nacheiszeitlichen Kulturentwicklungen sind durch die Methode der Radiokarbon-Datierungen auf völlig neue Bahnen gelangt. Daran ändert auch die Tatsache nichts, daß diese Methode an gewisse Voraussetzungen gebunden ist, die, wie man heute weiß, nur annäherungsweise zutreffen. Das gilt in erster Linie für die Annahme, daß der Radiokarbonspiegel im atmosphärischen Kohlendioxyd zum Zeitpunkt des Ursprungs der Probe derselbe war wie zu jener Zeit, der zweckmäßig die Vergleichsproben zur Festlegung des Nullpunktes der Radiokarbon-Altersbestimmung entstammen, d.h. gegen Ende des 19. Jahrhunderts. Nun läßt sich jedoch bei hinreichend genauer Meßtechnik nachweisen[2], daß die Datierungsergebnisse für den Zeitraum der letzten 2000 Jahre vom wahren Alter der Proben um mehr als 200 Jahre abweichen können. Man kann zeigen, daß diese Abweichungen auf Schwankungen im Radiokarbonspiegel der Kohlensäure der Luft und diese auf Schwankungen in der Produktionsrate des Radiokohlenstoffs zurückzuführen sind, die ihrerseits durch Modulation der galaktischen Höhenstrahlung durch Magnetfelder der Sonne verursacht werden. Daß diese Schwankungen merkliche Amplituden besitzen können, wird dadurch verständlich, weil gezeigt werden kann, daß das atmosphärische CO_2 sich mit den mengenmäßig sehr viel

[1] LIBBY, W. F.: Radiocarbon dating. Chicago: Chicago University Press 1952.
[2] Näheres bei SUESS, H. E.: J. Geophys. Research **70**, 5937 (1965).

mehr ins Gewicht fallenden in den Ozeanen gelösten Karbonaten nicht beliebig schnell ins Gleichgewicht setzt[3]. Andererseits durchmischt sich die Atmosphäre in weniger als 2 Jahren praktisch vollkommen, so daß die beobachtbaren Schwankungen unabhängig sind vom Ursprungsort der Radiokarbonproben. Lokale Unterschiede im CO_2-Gehalt der Luft sowie Unterschiede zwischen den beiden Hemisphären führen lediglich zu geringfügigen Unterschieden im Radiokarbongehalt von wenigen Promillen, die zu einer Unsicherheit im Radiokarbonalter mit nur wenigen Jahrzehnten beitragen. Aus diesen Gründen ist es im Prinzip möglich, eine praktisch universell gültige Eichkurve zu ermitteln, die die Umrechnung der Radiokarbonalter in das tatsächliche Alter gestattet. Eine solche Eichkurve muß dann in guter Näherung für alles Material der Land-Biosphäre gelten, nicht jedoch für Material maritimen Ursprunges. Für den Zeitraum der letzten 2000 Jahre war eine solche Kurve bereits vor einigen Jahren ermittelt worden[2,4]. Diese Eichkurve verläuft relativ unregelmäßig und besitzt stellenweise Schwankungen mit einer Zeitkonstante von der Größenordnung eines Jahrhunderts. Um so kurzperiodische Schwankungen feststellen zu können, ist es notwendig, mindestens drei, möglichst jedoch eine größere Zahl von Eichbestimmungen pro Jahrhundert auszuführen.

Zur Eichung der Radiokarbonzeitskala werden Holzproben verwendet, deren Alter durch das Studium ihrer Baumringe genau festgestellt wurde. Durch die Arbeiten von Ferguson am Baumringlaboratorium der Universität von Arizona ist neuerdings eine Jahresringchronologie für *Pinus aristata* festgelegt worden, die bis in das 46. Jahrhundert v. Chr. zurückgeht. Vorläufige Messungen an diesem Holz hatten bereits ergeben, daß die Abweichungen des atmosphärischen Radiokarbonspiegels von dem des 19. Jahrhunderts im 2. und 3. Jahrtausend v. Chr. erheblich größer waren als im darauffolgenden Zeitraum und daß diese Abweichungen mit zunehmendem Alter zunehmen.

Als erstes, besonders günstiges Beispiel für eine geeichte Radiokarbondatierung wurde Holz einer Schweizer Pfahlbausiedlung untersucht, für das eine eigene, etwa 300 Jahre umfassende Baumringchronologie vorlag. Ein Vergleich des Radiokarbongehaltes dieses Holzes mit dem von Ferguson datierten *Pinus aristata*-Holz ergab, daß das Pfahlbauholz den gleichen Radiokarbongehalt aufwies, wie das von *Pinus aristata*, das im 37. und 38. Jahrhundert v. Chr. gewachsen war[5]. Dieses unerwartet hohe Alter des Pfahlbauholzes sowie der unerwartet große Unterschied zwischen Radiokarbon- und Baumringalter ließ es in Anbetracht der grund-

[3] Revelle, R., u. H. E. Suess: Tellus **9**, 18 (1957).
[4] Stuiver, M., u. H. E. Suess: Radiocarbon **8**, 534 (1966).
[5] Ferguson, C. W., B. Huber u. H. E. Suess: Z. Naturforsch. **21a**, 1174 (1966).

legenden Bedeutung wünschenswert erscheinen, weitere genaue Vergleichsmessungen mit Material bekannten Alters in demselben Altersbereich auszuführen. Hierzu sind uns von Dr. FERGUSON genau datierte, jeweils zehn Jahresringe umfassende Proben von *Pinus aristata* zur Verfügung gestellt worden, die die Aufstellung einer Eichkurve für den Zeitraum von etwa 4100 bis 1500 v. Chr. ermöglichte. Außerdem erschien es uns wünschenswert, auch Vergleichsmessungen an Material durchzuführen, dessen Alter auf andere Weise ermittelt worden war. Als solches Material wurden uns von Dr. EDWARDS durch Vermittlung von Prof. LIBBY einige historisch datierte Proben aus dem alten Ägypten zur Verfügung gestellt. Wie bereits von RALPH u.a.[6] festgestellt worden war, ergeben solche Proben in der Tat meist ein zu niedriges Radiokarbonalter; für die Größe der Diskrepanz werden jedoch von verschiedenen Laboratorien sehr verschiedene Werte angegeben.

Die nunmehr vorliegende *Pinus aristata* (Bristlecone pine) Eichkurve[7] ist in Fig. 1 dargestellt. Für einige Jahrhunderte liegen noch nicht genügend viele Meßpunkte vor, um die Kurve genau festzulegen. In diesen Bereichen ist sie in der Figur gestrichelt eingezeichnet. Sie zeigt auffallend scharfe Spitzen und Bögen, wie sie auch für die Zeit um 1500 und 1700 n. Chr. bekannt sind.

In der Tabelle sind die Ergebnisse von vier Materialproben angegeben, die sowohl in La Jolla, als auch, unabhängig davon, in anderen Laboratorien untersucht worden sind. Es sind die Ergebnisse aus den Laboratorien in La Jolla (LJ), am Britischen Museum (BM) und in Los Angeles (UCLA) angegeben. Die Ergebnisse stimmen innerhalb der Meßgenauigkeit untereinander vorzüglich überein. Im allgemeinen wird jedoch die Anwendung der in La Jolla ermittelten Eichkurve auf Ergebnisse anderer Laboratorien zu nicht so genauen Werten führen wie die Anwendung auf in La Jolla ausgeführten Datierungen, da die Normierung der Messungen der verschiedenen Laboratorien nicht immer übereinstimmt. Auch sind die Messungen am Laboratorium des Britischen Museum, und zum Teil auch die in Los Angeles ausgeführten, nicht durch ^{13}C Bestimmungen für chemische Isotopeneffekte korrigiert.

Der unregelmäßige Verlauf der Eichkurve zeigt nun, daß in manchen Bereichen für die konventionellen Radiokarbondaten kein eindeutiger Eichwert vorhanden ist, sondern daß die Kurve mehrere Lösungen aufweist. In der Tabelle sind alle diese Lösungen angegeben. Jede dieser Lösungen ist als gleichwahrscheinliches Meßergebnis zu betrachten.

---

[6] RALPH, E. K., H. N. MICHAEL, and J. GRUNINGER jr.: Am. J. Sci. Radiocarbon 7, 179 (1965).

[7] SUESS, H. E.: Proc. Monaco Conference on Radioactive Dating, I.A.E.A. Wien 1967 (im Erscheinen).

Hinzuzurechnen sind noch die statistischen Fehlergrenzen der einzelnen Messungen. Die Genauigkeit der durch die Eichung gewonnenen Alterswerte ist daher bei gleicher Genauigkeit der Radiokarbonbestimmungen für verschiedene Zeiträume verschieden groß, was aus den in der Tabelle

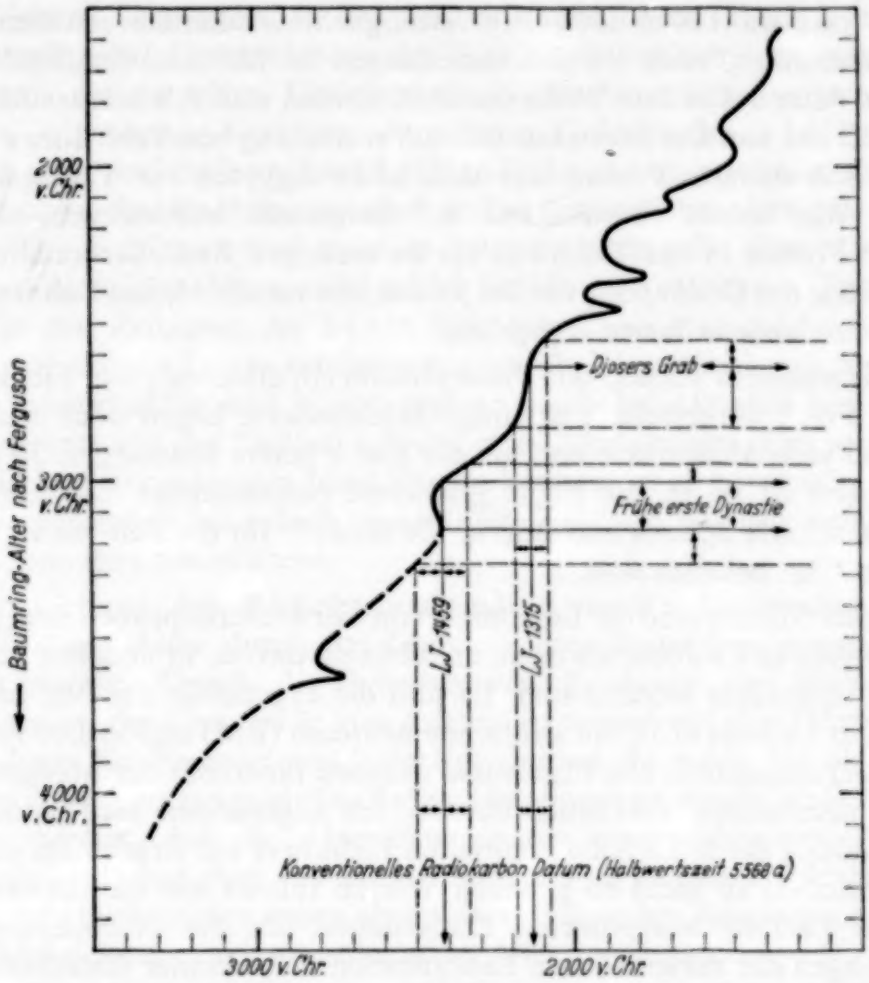


Fig. 1. Kurve zur Eichung konventioneller Radiokarbondatierungen (Halbwertszeit 5568 Jahre), ermittelt aus baumringdatiertem Holz von *Pinus aristata* nach FERGUSON. Als Beispiele sind die Meßergebnisse LJ-1315 und LJ-1459 eingezeichnet. Die gestrichelten Geraden geben die Fehlergrenzen der Messungen bzw. Eichungen an

angegebenen Fehlergrenzen zu erkennen ist, die die mittleren Fehler angeben.

Für manche Zeitgebiete ist die Bestimmungsgenauigkeit dadurch stark eingeschränkt, daß durch ein Absinken des Radiokarbonspiegels in der Luft der geringere Gehalt der älteren Proben kompensiert wurde, so daß über diesen Zeitbereich hin alle Proben den gleichen Radiokarbongehalt besitzen und die Kurve in Fig. 1 senkrecht verläuft. Dies ist

Tabelle. *Konventionelle Radiokarbondatierungen (in Jahren v. Chr. berechnet mit einer Halbwertszeit von 5568 Jahren) und durch Eichung nach Fig. 1 erhaltene Datierungen. Bei den angegebenen Laboratoriumsnummern beziehen sich die Präfixe auf die folgenden Laboratorien und Veröffentlichungen: LJ: La Jolla, unveröffentlicht. UCLA: Los Angeles, Radiocarbon* 7, *336 (1965). BM: Britisches Museum. Private Mitteilungen*

Probe	Lab. No.	Konventionelle Datierung	Geeichte Datierung
Schilf, No. 1, Sakkara, aus den Lehmziegeln der Grabstätte 3503, Nordfassade, entnommen von G. T. MARTIN 1966. Frühe I. Dynastie	LJ-1459	2410 (± 80) v. Chr.	LJ: 3000 (−60) v. Chr. 3150 (+115) v. Chr.
	BM-229	2550 (± 110) v. Chr.	BM: 3330 (± 110) v. Chr.
Schilf, No. 10, Sakkara, aus den Lehmziegeln der Grabstätte 3357, Westfassade (Hor Aha) G. T. MARTIN 1966. Beginn der I. Dynastie	LJ-1490	2420 (± 50) v. Chr.	LJ: 3010 (−50) v. Chr. 3190 (+50) v. Chr.
	BM-228	2360 (± 110) v. Chr.	BM: 2960 (± 120) v. Chr.
Leinen, Tarkhan, gefunden von W. M. F. PETRIE, Mastaba 2050, Tarkhan bei Kairo. I. Dynastie	LJ-1488	2438 (± 50) v. Chr.	LJ: 3050 (−50) v. Chr. 3210 (+50) v. Chr.
	UCLA-739	2315 (± 80) v. Chr.	UCLA: 2930 (± 90) v. Chr.
	BM-203	2200 (± 110) v. Chr.	BM: 2850 (± 110) v. Chr.
	BM-248	2210 (± 110) v. Chr.	
Djoser, Sykomor-(LJ) und Akazienholz (UCLA) aus der Stufenpyramide des König Djoser, Sakkara. J. PLANER 1961. III. Dynastie	LJ-1314	2200 (± 50) v. Chr.	LJ: 2840 (−50, +200) v. Chr.
	LJ-1315	2130 (± 50) v. Chr.	LJ: 2620 (−50, +200) v. Chr.
	UCLA-751	2110 (± 80) v. Chr.	UCLA: 2570 (−70, +150) v. Chr.

z. B. etwa im 26. und 27. Jahrhundert v. Chr. der Fall gewesen, so daß die oft und sehr genau gemessenen Holzproben aus der Stufenpyramide des König Djoser eine besonders große Fehlergrenze besitzen.

Die in der Spalte „konventionelle Datierung" angegebenen Jahreszahlen sind im Vergleich mit den chronologischen Berechnungen, die auf dem ägyptischen Kalender, den Datumsangaben und den Königslisten basieren[8], sowohl für die I. Dynastie als auch für König Djoser um fast ein halbes Jahrtausend zu jung. Dagegen stehen die in der letzten Spalte „geeichte Datierung" aufgeführten Zahlen innerhalb der beiderseitigen Unsicherheitsgrenzen in auffallendem Einklang mit der errechneten Chronologie.

Die Übereinstimmung der auf Grund historischer Befunde erwarteten Alterswerte mit den durch Eichung gewonnenen zeigt wohl, daß an der Richtigkeit der von Ferguson an der Universität von Arizona ausgearbeiteten Baumringchronologie[9] für *Pinus aristata* kaum mehr gezweifelt werden kann. Das bedeutet, daß unsere Vorstellungen vom zeitlichen Ablauf vorgeschichtlicher und frühgeschichtlicher Perioden, soweit sie sich auf Radiokarbonbestimmungen gestützt hatten, nunmehr sehr beträchtlich revidiert werden müssen. Die oben erwähnten Datierungen Schweizer Pfahlbausiedlungen haben bereits auf diesen Sachverhalt hingewiesen. Entgegen verbreiteter Erwartungen hat sich gezeigt, daß die konventionellen Datierungen nicht zu hohe, sondern um über 700 Jahre zu niedrige Alterswerte ergeben hatten. Es ist darum durchaus möglich, daß die ägyptische vordynastische Zeit sowie das Neolitikum im Niltal viel weiter zurückreicht, als es bisher den Anschein hatte.

Die Untersuchungen der Schwankungen des Radiokarbonspiegels führen nicht nur zu einer Revision der Radiokarbondatierungen, sondern lassen auch interessante Korrelationen mit Klimaschwankungen erkennen[10]. Die Schwankungen im Radiokarbonspiegel im 24. und 25. Jahrhundert v. Chr. erinnern an ähnliche Schwankungen im 15. und 17. Jahrhundert n. Chr., die mit besonders strengen Wintern in kontinentalen Gebieten einhergingen. Der Vergleich legt nahe, daß auch im 24. und 25. Jahrhundert v. Chr. ähnliche Klimaänderungen eintraten, die vielleicht mit dem Übergang vom Atlantikum zum Subboreal identifiziert

---

[8] Vgl. dazu Hayes, W. C.: Egypt-To end of twentieth dynasty. In: The Cambridge Ancient History. Rev. ed. of vol. I and II. Vol. I, chapter VI. Cambridge: Cambridge Univ. Press 1962. Dort findet man ausführliche Literaturangaben. — Edwards, I. E. S.: The early dynastic period in Egypt. In: The Cambridge Ancient History, vol. I, chapter XI. Cambridge: Cambridge Univ. Press 1964. — Smith, W. S.: The old kingdom in Egypt. In: The Cambridge Ancient History, vol. I, chapter XIV. Cambridge: Cambridge Univ. Press 1965.

[9] Ferguson, C. E.: Science (1967, im Erscheinen).

[10] Suess, H. E.: Meteorological Monographs (1967, im Druck).

werden könnten. Ob diese Klimaänderungen etwas mit dem Ende des ägyptischen Alten Reiches und dem Ablauf der Ersten Zwischenzeit zu tun haben könnte, ist eine weitere offene Frage.

Bei der Abfassung dieser Arbeit haben mich Frau GUDRUN BIELITZ und WILLARD LIBBY in wertvollster Weise beraten. Vor allem aber danke ich meinem alten Freund HANS JENSEN sehr herzlich für zahlreiche ausgedehnte und lehrreiche Diskussionen über Fragen der Ägyptologie und für sein Interesse an dieser Arbeit. Der John Simon Guggenheim Memorial Foundation bin ich für die Gewährung eines Stipendiums zu großem Dank verpflichtet. Die Radiokarbonmessungen in La Jolla werden aus Mitteln der National Science Foundation finanziert.

Zeitschrift für Physik 202, 8–12 (1967)

Temperature Dependence of Upper Critical Fields for Clean Superconductors of the Second Kind

GERHART LÜDERS

Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen

Received February 21, 1967

Boundary conditions to a generalized and linearized Ginzburg-Landau equation were recently derived by SCHÖLER for clean superconductors. In this paper they are used for a calculation of the ratio H_{c3}/H_{c2} up to first and second order in $[(T_c-T)/T_c]^{\frac{1}{2}}$. The result depends upon the electron reflexion properties of the surface. It differs from a result obtained previously by EBNETH and TEWORDT.

At temperatures T very close to the transition temperature T_c, the upper critical field H_{c2} of a superconductor of the second kind can be calculated by means of the linearized Ginzburg-Landau equation. In order to obtain also the critical field H_{c3} (parallel to a plane surface) of surface superconductivity[1], we have to supplement the linearized Ginzburg-Landau equation with a boundary condition. At somewhat lower temperatures, a generalized and linearized Ginzburg-Landau equation (with spatial derivatives up to fourth order) has to be used. For the calculation of H_{c3}, the appropriate boundary conditions for this equation have to be applied. Such boundary conditions were recently derived for a clean superconductor by SCHÖLER[2]. They differ from the boundary conditions proposed previously by EBNETH and TEWORDT[3] and, consequently, lead to a different critical field H_{c3}.

The solution of the general problem has been reduced by SCHÖLER (l.c.) to solving the differential equation

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\xi^2\right) u(\varepsilon, \xi)=\varepsilon\, u(\varepsilon, \xi)\,. \tag{1}$$

The critical field H_{c2} is obtained from solutions $u(\varepsilon, \xi)$ bounded for $\xi \to \pm\infty$ with lowest eigenvalue ε, i.e. with

$$\varepsilon=1. \tag{2}$$

---

[1] SAINT-JAMES, D., and P. G. DE GENNES: Phys. Letters **7**, 306 (1963).

[2] SCHÖLER, E.: Thesis, Göttingen 1966.

[3] EBNETH, G., u. L. TEWORDT: Z. Physik **185**, 421 (1965).

For the calculation of H_{c3} we need solutions which are bounded for $\xi \to +\infty$ only. For the following, we define a quantity η by

$$\eta = \frac{\hbar v}{2\pi kT}\sqrt{\frac{2eH_c}{\hbar c}}, \tag{3}$$

where v is the Fermi velocity of the electrons and H_c the critical magnetic field (H_{c2} or H_{c3}) in Gaussian units. The other symbols in Eq. (3) have their usual meaning.

From the linearized Ginzburg-Landau equation (with spatial derivatives up to second order) the following equation

$$\eta^2 \varepsilon = \frac{12}{7\zeta(3)}\,\frac{T_c - T}{T_c} \tag{4}$$

is obtained. $\zeta(3)$ is RIEMANN's zetafunction. On applying Eqs. (2) and (3) we get H_{c2} for clean superconductors correct up to first order in $(T_c - T)/T_c$.

In this approximation SCHÖLER's boundary conditions are

$$u\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \xi}\left(u\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0 \tag{5}$$

for a suitable $\xi = \xi_0$ corresponding to the surface of the superconductor, and a suitable $\varepsilon = \varepsilon_0$. From this, one obtains either

$$u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \tag{6}$$

or

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0. \tag{7}$$

The first alternative [Eq. (6)] is unacceptable since in this case $u(\varepsilon, \xi)$ would vanish identically for all ξ. The first Eq. (7) is the well known Ginzburg-Landau boundary condition. For solutions of Eq. (1) bounded at $\xi \to +\infty$, Eq. (7) leads to

$$\varepsilon_0 = 1/1{,}695, \qquad \xi_0 = -\varepsilon_0^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Finally from Eq. (4) we obtain the relation[1]

$$H_{c3}(T)/H_{c2}(T) = 1{,}695. \tag{9}$$

For clean superconductors, Eq. (9) is correct for $T \to T_c$ only. There are substantial deviations already for temperatures close to T_c. This problem shall now be studied.

When the linearized Ginzburg-Landau equation is replaced by its generalization with spatial derivatives up to fourth order, SCHÖLER obtains

$$\eta^2 \varepsilon = \tau + \left(\frac{7\zeta(3)}{24} + \frac{93}{140} \frac{\zeta(5)}{\zeta(3)} \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \right) \tau^2 + \cdots \tag{10}$$

instead of Eq. (4). For the sake of simplicity we used the notation

$$\tau = \frac{12}{7\zeta(3)} \frac{T_c - T}{T_c} . \tag{11}$$

The critical field $H_{c2}(T)$ can easily be calculated up to terms of the order τ^2 if Eqs. (2) and (3) are applied. The result ought to be identical with the one obtained previously by TEWORDT[4].

The boundary conditions Eq. (5) were independent of the physical properties of the surface. In contrast to this, the boundary conditions to be used in conjunction with Eq. (10) depend upon the way in which electrons are reflected by the surface. Presumably it will suffice to represent the reflexion of electrons by a one-parametric family of reflexion kernels[5]. They are characterized by the degree p of diffuseness with

$$0 \leqq p \leqq 1 \tag{12}$$

($p=0$: specular reflexion, $p=1$: strictly diffuse reflexion). In order to simplify the calculation we treat the cases $p=0$ and $p>0$ (and not too small) separately. Then SCHÖLER's first boundary condition reads

$$\begin{aligned} &\frac{31}{30} \zeta(5) \eta^2 \xi u^2 + \frac{7}{3} \zeta(3) u \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \qquad (p=0), \\ &p \frac{15}{32} \zeta(4) \eta \xi^2 u^2 + \frac{7}{3} \zeta(3) u \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \qquad (p>0). \end{aligned} \tag{13}$$

Here use was made of the fact that η is of order $\tau^{\frac{1}{2}}$ according to Eq. (4) and that $\partial u/\partial \xi$ vanishes for $\tau \to 0$ [Eq. (7)]. In Eq. (13), the arguments ε and ξ of the function $u(\varepsilon, \xi)$ differ somewhat from ε_0 and ξ_0 as given by Eq. (8). As a matter of fact, the second Eq. (13) does not depend upon our special ansatz for the reflexion kernel, and so does not the final result. We shall come back to this point in connection with Eq. (19).

In the present approximation u can be replaced by $u(\varepsilon_0, \xi_0)$, whereas $\partial u/\partial \xi$ is to be substituted by the first term of a series expansion

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 u(\varepsilon_0, \xi_0)}{\partial \varepsilon \partial \xi} (\varepsilon - \varepsilon_0) + \cdots \tag{14}$$

[4] TEWORDT, L.: Z. Physik **184**, 319 (1965).

[5] Cf. LÜDERS, G.: Z. Naturforsch. **21a**, 680 (1966) and SCHÖLER (l.c.).

[cf. Eq. (7)]. We introduce the notation

$$C=\left(u\Big/\frac{\partial^2 u}{\partial\varepsilon\,\partial\xi}\right)_{\varepsilon_0\,\xi_0}=1{,}36 \tag{15}$$

and obtain

$$\varepsilon-\varepsilon_0=\begin{cases}-\dfrac{31\zeta(5)}{70\zeta(3)}\,C\eta^2\,\xi+\cdots & (p=0),\\[2ex] -p\,\dfrac{45\zeta(4)}{224\zeta(3)}\,C\eta\,\xi^2+\cdots & (p>0),\end{cases} \tag{16}$$

from Eq. (13). On the right hand side, η is to be taken from Eq. (4) with $\varepsilon=\varepsilon_0$ and ξ is to be replaced by ξ_0 [cf. Eq. (8)]. From SCHÖLER's second boundary condition also $\xi-\xi_0$ could be calculated which is of no interest, however. To calculate $H_{c\,3}(T)$, we have to use Eq. (10) with

$$\varepsilon=\varepsilon_0+(\varepsilon-\varepsilon_0) \tag{17}$$

where ε_0 is to be taken from Eq. (8) and $\varepsilon-\varepsilon_0$ from Eq. (16). We obtain

$$\eta^2\,\varepsilon_0=\begin{cases}\tau+\left[\dfrac{7\zeta(3)}{24}+\dfrac{93\zeta(5)}{140\zeta(3)}\left(\dfrac{1+\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0^2}-\dfrac{2C}{3}\,\varepsilon_0^{-\frac{4}{3}}\right)\right]\tau^2+\cdots & (p=0)\\[2ex] \tau+p\,\dfrac{45\zeta(4)}{224\zeta(3)}\,C\,\varepsilon_0^{-\frac{4}{3}}\,\tau^{\frac{4}{3}}+\cdots & (p>0).\end{cases} \tag{18}$$

The field $H_{c\,3}$ itself finally follows from Eq. (3).

Eq. (10) with $\varepsilon=1$ and Eq. (18) can be combined to

$$\frac{H_{c\,3}(T)}{1{,}695\,H_{c\,2}(T)}=\begin{cases}1+\dfrac{93\zeta(5)}{140\zeta(3)}\left(\dfrac{1-\varepsilon_0^2}{\varepsilon_0^2}-\dfrac{2C}{3}\,\varepsilon_0^{-\frac{4}{3}}\right)\tau+\cdots & (p=0),\\[2ex] 1+p\,\dfrac{45\zeta(4)}{224\zeta(3)}\,C\,\varepsilon_0^{-\frac{4}{3}}\,\tau^{\frac{4}{3}}+\cdots & (p>0).\end{cases} \tag{19}$$

The left hand side is a measurable quantity. Its variation with temperature depends upon the degree p of diffuseness of electron reflexion by the surface. This latter quantity presumably cannot be measured directly. It is, however, restricted by inequality (12). We expect p to be close to one for physical surfaces. Therefore, the special case $p=0$ shall not be discussed any further. The second term on the right hand side is proportional to $\tau^{\frac{4}{3}}$ for $p>0$ and not to τ as in the result of EBNETH and TEWORDT (l.c.). The temperature dependence of $H_{c\,3}/H_{c\,2}$ is biggest for very diffuse reflexion ($p\approx 1$). The increase of this ratio with increasing diffuseness of reflexion corresponds to the increase of upper critical fields with increasing concentration of impurities. Apparently upper critical fields are increased by every statistical element in the orbital motion of the electrons.

As already mentioned in connection with Eq. (13), the second Eq. (19) is actually valid independently of the special ansatz for the reflexion kernel (linear combination of specular and diffuse reflexion). In the general case, however, the degree p of diffuseness is to be replaced by a formal parameter, "p", which is restricted by

$$0 \leqq \text{“}p\text{”} \leqq 2. \tag{20}$$

"p"$=0$ still means specular reflexion and so the first Eq. (19) is valid. "p" close to 2 requires physically unreasonable reflexion kernels.

We finally emphasize once more that Eq. (19) was derived for clean superconductors, i.e. for superconductors with an electron mean free path big compared to $\hbar v/2\pi k T_c$.

At a meeting at Kronenburg (Eifel) in the spring of 1965, V. AMBEGAOKAR made the remark that boundary conditions to generalized Ginzburg-Landau equations should depend upon physical properties of the surface. The author gratefully acknowledges this discussion remark. He further wants to thank L. TEWORDT for discussions on related problems. The numerical value in Eq. (15) was supplied by H. SCHULTENS.

Zeitschrift für Physik 202, 13–21 (1967)

Zur stellaren Häufigkeitsverteilung und Entstehung der chemischen Elemente

A. UNSÖLD

Institut für Theoretische Physik und Sternwarte der Universität Kiel

Eingegangen am 24. Februar 1967

Die Vorstellung, daß die schweren Elemente (d.h. alle Elemente außer Wasserstoff und vielleicht Helium) im Zusammenhang mit dem Entstehen und Vergehen von Sternen gebildet wurden, stößt auf vielerlei Schwierigkeiten. Bei der kleinen Dichte des anfänglichen Halos der Milchstraße kann die Sternbildung nicht ein mehrfaches rascher als heute vor sich gegangen sein. Die Entstehung der galaktischen Scheibe aus dem Gas des Halos (nach Bildung der Halosterne) ist nicht verträglich mit der Beobachtung, daß der Drehimpuls der galaktischen Bahnbewegung pro Masseneinheit für die extreme Halopopulation II wesentlich kleiner ist als für die Scheibenpopulation.

Im Anschluß an AMBARZUMIAN wird daher die Hypothese erörtert, daß die schweren Elemente in der Hauptsache bei einer gewaltigen Explosion im Kern der Milchstraße vor etwa $7 \cdot 10^9$ Jahren entstanden sind. Diese Annahme erweist sich mit unseren heutigen Kenntnissen kosmischer Zeiträume verträglich. Es spricht dafür, daß die relativen Häufigkeiten aller schweren Elemente in Sternen extrem kleiner, normaler und zweifach übernormaler „Metallhäufigkeit" innerhalb der Analysengenauigkeit dieselben sind. Auch die von SUESS gefundenen empirischen Regeln der Häufigkeitsverteilung dürften im Rahmen der neuen Vorstellung eher einer Deutung zugänglich werden.

Das Häufigkeitsverhältnis Helium : Wasserstoff wird gesondert diskutiert. Die Erzeugung schwerer Elemente in einzelnen Sternen und in Supernovae wird erörtert. Empirische Befunde sprechen nicht dafür, daß solche Prozesse die Häufigkeitsverteilung in der Mehrzahl der Sterne oder in der interstellaren Materie erheblich beeinflußt haben.

1. Einleitung

Die Häufigkeitsverteilung der chemischen Elemente in Sternen*, in Meteoriten und in der Erde hat seiner Zeit für die Kernphysik eine wichtige Rolle gespielt als erster Hinweis auf die magischen Zahlen bzw. die abgeschlossenen Schalen der Nukleonen.

Auf der anderen Seite enthält sie die ältesten „Urkunden" über die Entwicklung des Kosmos und die Entstehung der Elemente. Die bis vor 10 Jahren allgemein angenommene Theorie des Urknalls, des Big Bang, konnte die Entstehung der schweren Elemente nicht erklären einerseits wegen kernphysikalischer Schwierigkeiten, andererseits aber vor allem

* Die Gasnebel sollen hier nicht immer besonders erwähnt werden, denn die Hüllen der planetarischen Nebel werden fortlaufend aus ihren Zentralsternen erneuert, während aus dem interstellaren Gas bzw. dessen Verdichtungen in den diffusen (galaktischen) Nebeln sich innerhalb relativ kurzer Zeiträume die hellen, heißen Sterne der Spiralarmpopulation I bilden.

weil sich zeigte, daß in den Sternen die Häufigkeit der schweren Elemente* – meist sagt man kurz „Metallhäufigkeit" – relativ zum Wasserstoff stark mit dem Alter korreliert ist und etwa von 1/200 bis zum zweifachen des solaren Wertes variiert.

So entstand 1957 die Theorie von E. M. und G. R. Burbidge, Fowler und Hoyle[1] (kurz B^2FH-Theorie genannt), welche die Entwicklung des Milchstraßensystems so darstellt: Aus einer ursprünglich fast kugelsymmetrischen Wasserstoffmasse bildeten sich die ersten, noch metallarmen Halosterne, die Mehrzahl der Kugelsternhaufen und die Subdwarfs. Alle diese Objekte haben heute eine wenig abgeplattete räumliche Verteilung und große Raumgeschwindigkeiten relativ zur Sonne. Im Laufe der Entwicklung dieser Sterne bildeten sich Supernovae und in diesen schwere Elemente, die – wieder in den interstellaren Raum verteilt – das Ausgangsmaterial für die Bildung weiterer Generationen von Sternen immer mehr mit schweren Elementen anreicherten. Aus dem Halo bildete sich dann durch Zusammensturz der Gasmassen (die dynamisch mit den Sternen nur über das allgemeine Gravitationsfeld gekoppelt sind) die galaktische Scheibe mit der sog. Scheibenpopulation (zu der auch unsere Sonne gehört) und die Spiralarme mit ihrer Spiralarmpopulation I, zu der insbesondere die hellen blauen *O* und *B* Sterne gehören.

Auf der anderen Seite hat seit einer Reihe von Jahren Ambarzumian[2] die Vorstellung vertreten, daß in der Entwicklung der Galaxien gewaltige Explosionen in deren Kernen eine beherrschende Rolle spielten. Neuere Beobachtungen über die Struktur der Radiogalaxien, wie Cygnus A, Centaurus A, ..., die optischen Beobachtungen von Lynds und Sandage[3] an M 82 und wohl auch die quasistellaren Radioquellen bilden gewichtige Argumente für diese Auffassung, die im Westen zunächst wenig Beachtung fand.

Nachdem im Laufe der Jahre unsere Kenntnis der Häufigkeitsverteilung der Elemente in den Atmosphären der Sterne, insbesondere auch kosmogonisch wichtiger Entwicklungsstadien, erheblich zugenommen hat, erscheint es angebracht, diese im Zusammenhang mit dem Problem der Entwicklung der Milchstraße erneut zu diskutieren.

---

* In praxi verstehen wir darunter die in Sternen spektroskopisch nachweisbaren Elemente von C bis Ba. Li, Be, B spielen wegen ihrer leichten Zerstörbarkeit durch Protonen eine besondere Rolle; sie sollen hier außer Betracht bleiben. Das Häufigkeitsverhältnis von H/He müssen wir besonders besprechen.

[1] Burbidge, E. M., G. R. Burbidge, W. A. Fowler, and F. Hoyle: Revs. Modern Phys. **29**, 547 (1957).

[2] Ambarzumian, V. A.: On the nuclei of galaxies and their activity. London-New York-Sydney: Interscience Publ. 1965 und Proc. 13th Solvay-Conf. Physics, Brussels, Sept. 1964.

[3] Lynds, C. R., and A. R. Sandage: Astrophys. J. **137**, 1005 (1963).

Dabei muß man jedoch bedenken, daß die quantitative Analyse der Spektren von Sternen stets nur in Verbindung mit einer ebenso sorgfältigen Erforschung des Aufbaus, d.h. der Temperatur- und Druckverteilung etc., ihrer Atmosphären zum Erfolg führen kann. Die Beurteilung der Qualität einer Analyse setzt deshalb ein hohes Maß astrophysikalischer Erfahrung voraus. Relative Analysen — bei denen es auf die Übergangswahrscheinlichkeiten individueller Linien kaum ankommt, — werden genauer sein als absolute Häufigkeitsbestimmungen (bezogen auf Wasserstoff als häufigstes Element).

2. Kosmische Entwicklungszeiten

Das Alter der Erde, d.h. die Zeit seit der Bildung ihrer Kruste, kennen wir heute mit Sicherheit zu $4{,}5 \cdot 10^9$ Jahre. Die Sonne kann daher — nach unseren heutigen Vorstellungen über die Entstehung der Sterne und des Planetensystems — nicht wesentlich älter sein als $\sim 5 \cdot 10^9$ Jahre.

Wenn wir annehmen, daß die „elternlosen" radioaktiven Isotope, wie wir sie auf der Erde vorfinden, U^{235} und K^{40} auf einen Schlag entstanden sind, so können sie kaum älter als 7 bis $8 \cdot 10^9$ Jahre sein; sonst müßte man äußerst unwahrscheinliche Anfangs-Isotopenverhältnisse annehmen. Ein größeres (partielles) Entstehungsalter erscheint nur möglich in Verbindung mit der Hypothese irgendeiner Art von Nachlieferung. Praktisch dasselbe gilt für die Meteoriten.

Setzen wir diese terrestrischen Daten nun in Verbindung mit astronomischen, so müssen wir vorweg daran erinnern, daß letztere eng mit der Skala kosmischer Entfernungen verknüpft sind, die in den letzten zwei Jahrzehnten erhebliche Änderungen durchgemacht hat.

Einer *Hubble-Konstante H* entspricht zunächst ein (formales) „Weltalter" $T_0 = 1/H$, d.h.

$$H = 75 \quad \text{bzw. } 100 \text{ km/sec pro Megaparsec}$$
$$T_0 = 13 \quad \text{bzw. } 9.8 \cdot 10^9 \text{ Jahre.}$$

Mit plausiblen Annahmen über den Decelerationsparameter q_0 des relativistischen Weltmodells wird nach SANDAGE[4] die Zeit seit Beginn der Expansion um etwa $2 \cdot 10^9$ Jahre kürzer als T_0.

Das Alter des Halo bzw. der Scheibe unserer Milchstraße bestimmt man direkt aus der Lage des „Knie's" in den Farbenhelligkeitsdiagrammen der ältesten Kugelsternhaufen bzw. offenen Sternhaufen, d.h. aus den absoluten Helligkeiten oder Farbenindizes der Sterne, die soeben ca. 10% ihres Wasserstoffs verbrannt haben und von der Hauptsequenz nach rechts abzuwandern beginnen. Hier gehen numerisch offensichtlich relativ feine Details der Theorie der Sternentwicklung ein. Es zeigt sich zunächst, daß auf dieser Basis ein Alters*unterschied* von Halo (Kugelhaufen) und Scheibe (offene Haufen) nicht mit Sicherheit angegeben werden kann. Für „das" Alter der Milchstraße wurden bzw. werden Zahlenwerte von etwa 9 bis $12 \cdot 10^9$ Jahre angegeben.

[4] SANDAGE, A. R.: Astrophys. J. **134**, 916 (1961).

Vor kurzem haben nun HODGE und WALLERSTEIN[5] darauf hingewiesen, daß möglicherweise das Expansions-Weltalter, wie auch das Alter der Kugelhaufen und der offenen Sternhaufen revidiert werden müssen im Hinblick auf eine vorgeschlagene Korrektion der in alle verwendeten Entfernungsbestimmungen irgendwie eingehenden „Maßeinheit", nämlich der Entfernung der Hyaden. *Mit* den von HODGE und WALLERSTEIN vorgeschlagenen Korrektionen erhält man ein revidiertes Alter der ältesten offenen Haufen (NGC 188) von $7 \cdot 10^9$ Jahren und der Kugelhaufen von $9 \cdot 10^9$ Jahren (wobei der Unterschied kaum signifikant sein dürfte), während das Expansionsalter von SANDAGEs bevorzugtem Wert $8 \cdot 10^9$ Jahren auf $\sim 10 \cdot 10^9$ Jahren heraufgesetzt wird.

Wenn wir annehmen dürfen, daß die galaktische Scheibe im Anfang der Entwicklung der Milchstraße durch Kollaps des Gas-Halo entstanden ist, so können wir die Zeitdauer dieses Vorganges verhältnismäßig genau ermitteln:

Nach EGGEN, LYNDEN-BELL und SANDAGE[6] müßten nämlich in den galaktischen Bahnen der Sterne die (dem Physiker aus der Theorie der Elektronenbahnen im Atom nach BOHR und EHRENFEST wohl bekannten) adiabatischen Invarianten aus dem fast kugelsymmetrischen Anfangszustand des Systems erhalten geblieben sein, *wenn* der Kollaps der Scheibe länger gedauert hätte als etwa eine Umlaufzeit, d.h. $\sim 2 \cdot 10^8$ Jahre. Letzteres ist tatsächlich *nicht* der Fall, der Kollaps muß also weniger als $\sim 2 \cdot 10^8$ Jahre gedauert haben. Dies ist auch durchaus plausibel, da die zum freien Fall durch die Galaxis nötige Zeit selbstverständlich von derselben Größenordnung ist, wie die galaktischen Umlaufzeiten.

Da die Bahnen und die Metallhäufigkeiten der Sterne unseres Milchstraßensystems einen durchaus stetigen Übergang zeigen in dem Sinne[7]:

Alte Halopopulation II	(Subdwarfs, alte Kugelhaufen, RR-Lyrae-veränderliche mit Perioden $>0^d.4$ ...)
↓	
Mittlere Population II	(Schnelläufer der Spektraltypen $F-M$ ...)
↓	
Scheibenpopulation	(Galaktischer Kern und Scheibe, planetarische Nebel, RR Lyrae-Sterne mit Perioden $<0^d.4$ ...),
↓	

so können wir kaum der Schlußfolgerung entgehen, daß die galaktische Scheibe schon $\sim 2 \cdot 10^8$ Jahre nach Beginn des Milchstraßensystems fast

---

[5] HODGE, P. W., and G. WALLERSTEIN: Publ. Astron. Soc. Pacific **78**, 411 (1966).

[6] EGGEN, O. J., D. LYNDEN-BELL, and A. R. SANDAGE: Astrophys. J. **136**, 748 (1962).

[7] Vgl. O'CONNELL, D. J. K. (Ed.): Stellar populations. Sympos. Vatican Observatory 1958.

in ihrer heutigen Beschaffenheit und – wie wir sehen werden – mit einer Metallhäufigkeit etwa entsprechend der Sonne fertig war.

3. Häufigkeitsverteilung der Elemente in den Atmosphären der Sterne verschiedenen Alters

Die etwas umständliche Einführung des Abschn. 2 war erforderlich, um den richtigen Hintergrund zu schaffen für eine Diskussion neuerer Analysen von Sternspektren, wobei wir hier jedoch auf die Mitteilung von detaillierten Zahlenwerten [8] verzichten wollen.

Das Häufigkeitsverhältnis der schweren Elemente zum Wasserstoff, relativ zu dem der Sonne (als Standard) $(M:H)_{rel}$ variiert – wie schon bemerkt – im Bereich 1/200 bis 2. Wohl am genauesten untersucht sind der Subdwarf [9] HD 140 283 mit $(M:H)_{rel}=1/200$; der Horizontalaststern [10] HD 161 817 mit $(M:H)_{rel}=1/13$ und der nach Raumgeschwindigkeit und Abwanderung von der Hauptsequenz ziemlich alte Stern der Scheibenpopulation β Virginis [11] mit $(M:H)_{rel}=2$. In HD 140 283 sind z. B. bestimmbar die Elemente C, Na, Mg, Al, Si, Ca, Sc, Ti, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Sr, Ba.

Heliumlinien sind in allen diesen Sternen wegen ihrer verhältnismäßig niedrigen Temperatur nicht zu erwarten und nicht vorhanden. Es ist nun sehr bemerkenswert, daß in allen diesen Sternen die *relativen Häufigkeiten der schweren Elemente* untereinander innerhalb der Analysengenauigkeit ($\Delta \log N \approx \pm 0.2$) die *gleichen* sind.

In der Literatur sind immer wieder einzelne Abweichungen von dieser Regel behauptet worden. Wir möchten diese nicht für signifikant halten, da in den ohne Zweifel genauesten Analysen unserer extrem gewählten Objekte nichts derartiges zu bemerken ist. Weiterhin muß man sich klar machen, daß die Analysengenauigkeit wesentlich an die Bestimmung der sonstigen Parameter der Sternatmosphären (T_{eff}, g, Turbulenz) geknüpft ist und für die kühlen K- und M-Sterne z. Z. einfach noch nicht die nötige Genauigkeit besitzt.

Fragen wir nach der galaktischen Stellung bzw. Populationszugehörigkeit der Sterne mit verschiedener Metallhäufigkeit, so können wir heute folgendes feststellen:

1. Sterne mit Metallhäufigkeiten $(M:H)_{rel}<1/3$ (Subdwarfs) kommen *nur* in der alten Halopopulation II mit sehr hohen Raumgeschwindigkeiten relativ zur Sonne vor. Diese Sterne bewegen sich also um das galaktische Zentrum auf stark elliptischen Bahnen, ihre Bahnneigungen

[8] Hierzu vgl. Unsöld, A.: Angew. Chem. **76**, 281 (1964), sowie Unsöld, A.: Der neue Kosmos. Heidelberger Taschenbücher 16/17. Berlin-Heidelberg-NewYork: Springer 1967.

[9] Baschek, B.: Z. Astrophys. **48**, 95 (1959); **56**, 207 (1962).

[10] Kodaira, K.: Z. Astrophys. **59**, 139 (1964).

[11] Baschek, B., H. Holweger, O. Namba u. G. Traving: Z. Astrophys. **65**, 418 (1967).

sind fast statistisch verteilt. Wie wir sehen, müssen diese Sterne also innerhalb der ersten $\sim 2 \cdot 10^8$ Jahre der Existenz unserer Milchstraße entstanden sein!

2. Sterne mit Metallhäufigkeiten $1/3 < (M:H)_{rel} < 2$ bewegen sich auf kreisähnlichen Bahnen mit kleiner Neigung zur galaktischen Scheibe. Im Bereich $1/3 < (M:H)_{rel} < 1$ besteht noch eine gute Korrelation zwischen Metallhäufigkeit einerseits, Exzentrizität und Bahnneigung andererseits. Auf der anderen Seite deuten das Beispiel von β Virginis und weitere Überlegungen von SPINRAD[12] darauf hin, daß jedenfalls im Bereich normaler und besonders übergroßer Metallhäufigkeiten diese Korrelation mehr und mehr verloren geht.

4. Entstehung der schweren Elemente

Die Vorstellung einer Entstehung fast aller schweren Elemente innerhalb von $\sim 2 \cdot 10^8$ Jahren in Verbindung mit dem Werden und Vergehen der ersten Generation(en) von Sternen im Halo scheint nun Verf. in verschiedener Hinsicht auf unüberwindliche Schwierigkeiten zu stoßen:

Innerhalb eines Zeitraumes von $\sim 2 \cdot 10^8$ Jahren können (im wesentlichen schon aus energetischen Gründen) nur *B*- und *O*-Sterne mit Massen > 5 bis 6 Sonnenmassen ihre Entwicklung abgeschlossen haben. Nach allen sonstigen Erfahrungen sollte man aber erwarten, daß nur ein kleiner Bruchteil der Materie sich jeweils in so großen Sternen kondensiert. Weiterhin war ja die mittlere Dichte der Materie in dem anfänglichen, fast kugelförmigen System erheblich kleiner als heute. Warum sollte dann die Sternentwicklung mit noch größerer Geschwindigkeit vor sich gegangen sein als heute? FOWLER und HOYLE verlegen die Bildung der schwersten (insbesondere der radioaktiven) Elemente in die Supernovae I, die aus Sternen von ~ 1 bis 1,5 Sonnenmassen entstehen sollen. Da deren Entwicklung mindestens $1{,}5 \cdot 10^9$ Jahre beansprucht, so könnte dies also erst in der galaktischen Scheibe geschehen sein. Davon aber ist wiederum in der Häufigkeitsverteilung keine Spur zu erkennen.

Wenn man an der Annahme festhalten will, daß die schweren Elemente im Anfang der galaktischen Entwicklung in ganz verschiedenartigen kosmischen Gebilden und zu verschiedenen Zeiten entstanden sein sollen, so erscheint es ganz unverständlich, daß die ganze galaktische Materie bezüglich der Mischungsverhältnisse der schweren Elemente einen so außerordentlich hohen Grad von Homogenität besitzt.

Aber auch in dynamischer Hinsicht haben sich neuerdings große Schwierigkeiten für die meist vertretene Vorstellung von der Frühgeschichte des galaktischen Systems ergeben: Da der anfängliche Halo (noch ohne Scheibe) nach Ausweis der Bahnen seiner Sterne ziemlich gut

[12] SPINRAD, H.: Publ. Astron. Soc. Pacific **78**, 367 (1966).

durchmischt war, so sollte man erwarten, daß der durchschnittliche Drehimpuls pro Masseneinheit in Halo und Scheibe etwa derselbe ist. Nun hat aber OORT[13] bemerkt, daß die mittlere Geschwindigkeitskomponente in Richtung der galaktischen Rotation Θ der metallarmen RR Lyrae-Sterne (der reinsten und extremsten Halopopulation II, die wir kennen) nur $\Theta_m = 30$ km/sec beträgt, d.h. ihr galaktischer Bahndrehimpuls pro Masseneinheit beträgt nur 12% von dem der Sterne der Sonnenumgebung. Diese Beobachtung dürfte schon allein für die Vorstellung einer Bildung der Scheibe durch Kollaps aus dem Halo die größten Schwierigkeiten bieten.

Sie spricht vielmehr geradewegs für die von AMBARZUMIAN nahegelegte Vorstellung der Bildung des Halo durch eine Explosion in dem anfänglichen Kern der Milchstraße. Die direkte Beobachtung solcher Explosionen z.B. in M 82 und den Radiogalaxien wird man kaum als ein Argument *gegen* die neue Auffassung ansehen.

Im Rahmen einer solchen Theorie können wir zunächst die überall einheitliche Mischung der schweren Elemente ohne weiteres verstehen. Die mit dem Alter der Sterne nicht mehr korrelierten Schwankungen im Metallgehalt der Scheibenpopulation kann man zwanglos auf ungleichförmige Mischung von explodiertem Material mit ursprünglichem Wasserstoff zurückführen. Innerhalb der Fehlergrenzen aller relevanten Daten darf man nun auch die Entstehung des heutigen terrestrischen U^{235} und K^{40} der großen Explosion in der Frühzeit unserer Galaxie zuschreiben. Und endlich sollte es auch einer Theorie der en gros-Produktion der schweren Elemente eher möglich sein, die von SUESS[14] empirisch gefundenen und bisher theoretisch kaum verständlichen Häufigkeitsverteilungsgesetze zu deuten.

5. Zum Heliumproblem

In energetischer Hinsicht ist sehr wesentlich die Frage, ob das heute in den Population I-Sternen, der interstellaren Materie etc. vorhandene *Helium* sich im Anfang der Entwicklung unserer Milchstraße zusammen mit den schweren Elementen gebildet hat oder ob es schon am „Anfang der Welt" erzeugt wurde. Im ersten Fall würde man erwarten, daß in alten Sternen die Heliumhäufigkeit etwa proportional der der schweren Elemente wäre. Im zweiten Fall sollte das Häufigkeitsverhältnis He:H, abgesehen von dem bei der Energieerzeugung durch Wasserstoffbrennen hinzugekommenen Helium, in allen Sternen etwa gleich sein. Eine spektroskopische Entscheidung ist deshalb so schwierig, weil alle Sterne, die in $\sim 8 \cdot 10^9$ Jahren noch nicht den größeren Teil ihrer Gesamtentwicklung

[13] OORT, J. H., in: Galactic structure. Stars and Stellar Systems, vol. V, p. 483, Table 5 and p. 486, Fig. 5. Chicago and London: Univ. of Chicago Press 1965.

[14] SUESS, H. E.: Z. Naturforsch. **21a**, 90 (1966).

hinter sich gebracht haben, notwendigerweise so niedrige Temperaturen ihrer Atmosphären haben, daß ein spektroskopischer Nachweis von Helium aussichtslos wird. Auf der Sonne können wir zwar die infrarote Heliumlinie λ 10830 Å im Spektrum der Scheibe beobachten. Aber dies beruht auf Erscheinungen der Sonnenaktivität, deren Analogon auf den alten Sternen eben fehlt. Greifen wir auf Spektren von heißen Sternen des Horizontalastes oder planetarische Nebel zurück, so könnte man zwar darauf hinweisen, daß in dem *einen* genau untersuchten Horizontalaststern HD 161 817 eine Durchmischung von Innen und Außen *nicht* stattgefunden hat; es ist aber noch unbekannt, wie weit wir diese Beobachtung verallgemeinern dürfen oder nicht.

Einige Beobachtungen alter (aber durchentwickelter!) Objekte weisen auf einen normalen Heliumgehalt (wie in Population I), andere scheinen auf kleinere Heliumhäufigkeit zu deuten. Wir wollen hier keine Einzelheiten erörtern, weisen aber noch darauf hin, daß Christy[15] aus theoretischen Untersuchungen über die Pulsation von RR Lyrae-Sternen schließt, daß diese ursprünglich im Inneren die normale Heliumhäufigkeit hatten. Wenn man auch – bei vorsichtigem Abwägen aller Beobachtungen – geneigt sein dürfte, schon den alten Population II-Sternen dieselbe Heliumhäufigkeit zuzubilligen, wie den jungen Population I-Objekten, so dürfen wir dies noch keineswegs als bewiesen ansehen. Im Sinne der hier vertretenen Vorstellung haben übrigens Hoyle und Tayler[16] sogar versucht, das als ursprünglich angesehene He:H-Verhältnis quantitativ durch eine revidierte Urknall-Theorie zu erklären, nach der also am „Anfang der Welt" zunächst nur Wasserstoff *und* Helium entstanden wären.

6. Beobachtete Entstehung schwerer Elemente im Laufe der Sternentwicklung

Obwohl sich im Vorhergehenden gewichtige Argumente dafür ergeben haben, daß die für alle „normalen" Sterne konstante Mischung der schweren Elemente im Anfang der Entwicklung unserer Milchstraße bei einer gewaltigen Explosion in deren Kern entstanden ist, ist es doch wichtig, nachzusehen, wo auf der anderen Seite eine Bildung schwerer Elemente im Laufe der Entwicklung einzelner Sterne zu beobachten ist und wo nicht. Dabei ist wieder zu betonen, daß direkter Beobachtung nur die Atmosphären der Sterne zugänglich sind, das Innere wird vielfach eine andere Zusammensetzung haben.

Zunächst bemerken wir, daß viele (aber nicht alle!) Sterne die ganze Entwicklung von der Hauptsequenz zum Stadium der roten Riesen und

[15] Christy, R. F.: Astrophys. J. **144**, 108 (1966).
[16] Hoyle, F., and R. J. Tayler: Nature **203**, 1108 (1964).

in den heißen Bereich links oben im Hertzsprung-Russell-Diagramm durchmachen *ohne* die chemische Zusammensetzung ihrer Atmosphären zu ändern. Typische Beispiele sind HD 161 817 auf dem Horizontalast und die planetarischen Nebel.

Andererseits können wir die *Heliumsterne* und die *Kohlenstoffsterne* – abgesehen von Details – wohl nur so deuten, daß vielfach schon beim Verlassen der Hauptsequenz Materie, die am Wasserstoffbrennen bzw. am Heliumbrennen im Sterninneren beteiligt war, irgendwie in die Atmosphäre gelangt ist. Eine Möglichkeit hierzu bietet – nach neueren Arbeiten der Kippenhahnschen Schule[17] – die Entwicklung enger Doppelsterne mit Massenaustausch zwischen den beiden Komponenten. Daneben könnten wohl auch der Helium- und Kohlenstoff-„Flash" (was man rechnen kann, ist ja nur ein stark schematisierter kugelsymmetrischer Ablauf) auch bei einzelnen Sternen Anlaß zu ähnlichen Phänomenen geben.

Wenn auch die Folge der *Ap-Sterne* und der sich längs der Hauptsequenz nach unten daran anschließenden *Am*-(Metallinien-)*Sterne* noch weitgehend rätselhaft ist, indem wir nicht mit Sicherheit unterscheiden können, was Häufigkeits- und was Modelleffekte sind, so dürfen wir doch – abgesehen von vielen Details – wohl jedenfalls bezüglich der Ap-Sterne sagen, daß diese erst im Begriff stehen, die Hauptsequenz zu verlassen (wie sollte man sonst ihre Stellung im offenen Sternhaufen verstehen?) und daß hier ursprünglich normale Stellarmaterie mit Neutronen bestrahlt wurde (oder wird). Auch die Technetiumlinien in *S*-Sternen sind ohne diese Annahme nicht zu verstehen. Diese Neutronen können eigentlich nur aus der Folge der energieerzeugenden Kernprozesse stammen, vielleicht aus Flash-Vorgängen. Die Annahme einer Erzeugung von genügend viel Neutronen in einer Art Kernbeschleunigungsmaschine, welche mit den Magnetfeldern der Ap-Sterne operiert, erscheint quantitativ aussichtslos. Vielleicht könnte man – mit aller Zurückhaltung – an die Hypothese denken, daß bei einem „Flash" ein Ballen neutronenbestrahltes Plasma samt Magnetfeld (eine Art Plasmoid) aus dem Inneren des Sterns an die Oberfläche befördert wird? Wie dem auch sei, wir müssen auf der anderen Seite einmal feststellen, daß von einer Beeinflussung der chemischen Zusammensetzung der Materie in den Sternen oder in der interstellaren Materie durch Supernovaprozesse *empirisch* bis jetzt noch keinerlei sichere Anzeichen festgestellt werden konnten. Auch unter diesem Gesichtspunkt dürfte also der Hypothese einer en gros-Entstehung der schweren Elemente nichts im Wege stehen.

[17] KIPPENHAHN, R., u. A. WEIGERT: Z. Astrophys. **65**, 251 (1967).

Zeitschrift für Physik 202, 22–31 (1967)

Hyperfeinstrukturanomalie und Kernquadrupolwechselwirkungskonstanten des angeregten $3d^9\,4s\,4p\,{}^4P_{\frac{1}{2}}$-Terms im Cu I-Spektrum von Cu^{63} und Cu^{65}

H. Bucka, J. Ney und K. P.-Wirtnik
Institut für Kernphysik der Technischen Universität Berlin

Eingegangen am 27. Dezember 1966

The hyperfine structure of the excited $3d^9\,4s\,4p\,{}^4P_{\frac{1}{2}}$-term of the Cu I-spectrum was investigated in a level-crossing experiment using an atomic beam with copper in natural abundance as absorber. From the level-crossing signals the following relations for the hyperfine structure constants were deduced*

$$A(Cu^{63}) = 2184.66\,(17)\,\frac{g_J}{1.75}\ \text{Mc/sec}, \qquad B(Cu^{63}) = -38.65\,(11)\,\frac{g_J}{1.75}\ \text{Mc/sec},$$

$$A(Cu^{65}) = 2340.15\,(19)\,\frac{g_J}{1.75}\ \text{Mc/sec}, \qquad B(Cu^{65}) = -35.69\,(17)\,\frac{g_J}{1.75}\ \text{Mc/sec}.$$

The ratio of the magnetic hyperfine structure constants of Cu^{63} and Cu^{65} was determined with high accuracy to be

$$\frac{A(Cu^{63})}{A(Cu^{65})} = 0.93355\,(2).$$

From this ratio a hyperfine structure anomaly

$${}_{63}\Delta_{65}({}^4P_{\frac{1}{2}}) = 1.4 \cdot 10^{-4}\,(4)$$

was deduced. The width of the zero field crossing yielded a lifetime $\tau = 3.2\,(3) \cdot 10^{-7}$ sec for the excited ${}^4P_{\frac{1}{2}}$-term.

Einleitung

Aus der Hyperfeinstrukturaufspaltung freier Atome können eine Anzahl von Daten über magnetische Dipolmomente und elektrische Quadrupolmomente der Atomkerne gewonnen werden. Bei genauen Messungen der Hyperfeinstruktur verschiedener Isotope eines Elements ist ein Einfluß des endlichen Kernvolumens auf die magnetischen Aufspaltungsfaktoren A beobachtbar, wenn an der Hyperfeinstrukturaufspaltung ein Elektron mit großer Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Kernort beteiligt ist. Dieser als Hyperfeinstrukturanomalie[1] bekannte Effekt zeigt sich in einer geringen Abweichung des Verhältnisses der magnetischen Wech-

* For g_J-value see addition in proof.

[1] Bohr, A., and V. F. Weisskopf: Phys. Rev. 77, 94 (1950).

selwirkungskonstanten $A(1)/A(2)$ zweier Isotope vom Verhältnis der magnetischen Kerndipolmomente $\mu_I(1)/\mu_I(2)$ und wird beschrieben durch

$$_1\Delta_2 = \frac{A(1)}{A(2)} \cdot \frac{\mu_I(2)}{\mu_I(1)} - 1 . \qquad (1)$$

Mit der erforderlichen Genauigkeit, mit welcher die A-Faktoren gemessen werden müssen, steht im Zusammenhang, daß Hyperfeinstrukturanomalien hauptsächlich aus der Hyperfeinstrukturaufspaltung von Grundzuständen mit Hilfe der Atomstrahlresonanzmethode bestimmt wurden, da hierbei besonders schmale Signale beobachtet werden können. Hyperfeinstrukturanomalien angeregter Feinstrukturterme eines Atoms können nur dann gemessen werden, wenn die magnetische Wechselwirkungskonstante groß ist gegen die durch die Lebensdauer bedingte Signalbreite. In der vorliegenden Arbeit wurde die Hyperfeinstruktur des angeregten $3d^9\,4s\,4p\,{}^4P_{\frac{1}{2}}$-Terms des Cu I-Spektrums in einem level-crossing-Experiment untersucht, um Aussagen über die Hyperfeinstrukturanomalie von Cu^{63}, Cu^{65} und außerdem über die Kernquadrupolwechselwirkungskonstanten zu gewinnen.

Zur Hyperfeinstruktur des $3d^9\,4s\,4p\,{}^4P_{\frac{1}{2}}$-Terms im äußeren Magnetfeld

Der $3d^9\,4s\,4p\,{}^4P_{\frac{1}{2}}$-Term ist mit dem Grundzustand $3d^{10}\,4s\,{}^2S_{\frac{1}{2}}$ durch die Interkombinationslinie $\lambda = 2492$ Å verbunden (Fig. 1). Entsprechend dem Kernspin $I = \frac{3}{2}$ für Cu^{63} und Cu^{65} spaltet der ${}^4P_{\frac{1}{2}}$-Term in vier Hyperfeinstrukturterme mit den Gesamtdrehimpulsquantenzahlen $F = 3, 2, 1, 0$ auf. Die magnetischen Aufspaltungsfaktoren A dieses Terms sind aus einer optischen Untersuchung[2] zu $A(Cu^{63}) = 71$ mK und $A(Cu^{65}) = 76$ mK bekannt. Über die wesentlich kleineren Kernquadrupolwechselwirkungskonstanten B liegen dagegen keine Angaben vor. Da eine level-crossing-Untersuchung des ${}^4P_{\frac{1}{2}}$-Terms im Zusammenhang mit der schmalen Linienbreite der Signale eine höhere Meßgenauigkeit zuläßt, konnten im vorliegenden Experiment die Kernquadrupolwechselwirkungskonstanten B für beide Isotope und die Hyperfeinstrukturanomalie bestimmt werden.

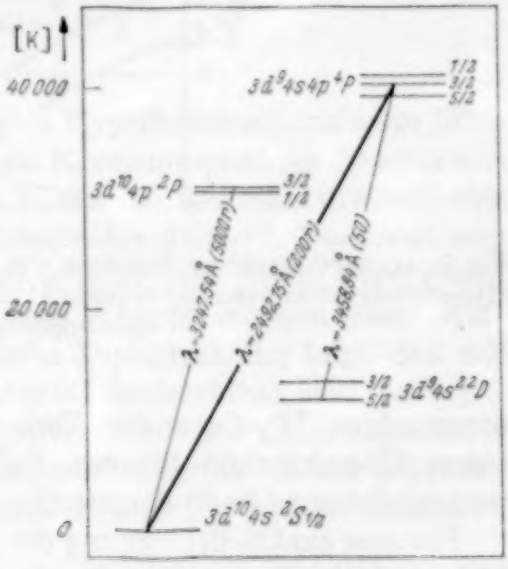


Fig. 1. Ausschnitt aus dem Cu I-Termschema

[2] WAGNER, S.: Z. Physik **141**, 122 (1955).

Die Bestimmung der Aufspaltungsfaktoren aus der Lage der level-crossing-Signale setzt die genaue Kenntnis des Verlaufs der Hyperfeinstrukturniveaus im äußeren Magnetfeld H_0 voraus. Die Wechselwirkung mit einem schwachen Magnetfeld führt zunächst zur Zeeman-Aufspaltung der einzelnen Hyperfeinstrukturterme. Bei Feldstärken, für welche die Magnetfeldaufspaltung in die Größenordnung der Hyperfeinstrukturaufspaltung kommt, entkoppeln sich zunehmend Kernspin und Hüllendrehimpuls. Für noch größere Magnetfeldstärken ergibt sich schließlich der Paschen-Back-Effekt der Hyperfeinstruktur. In Fig. 2 ist für den

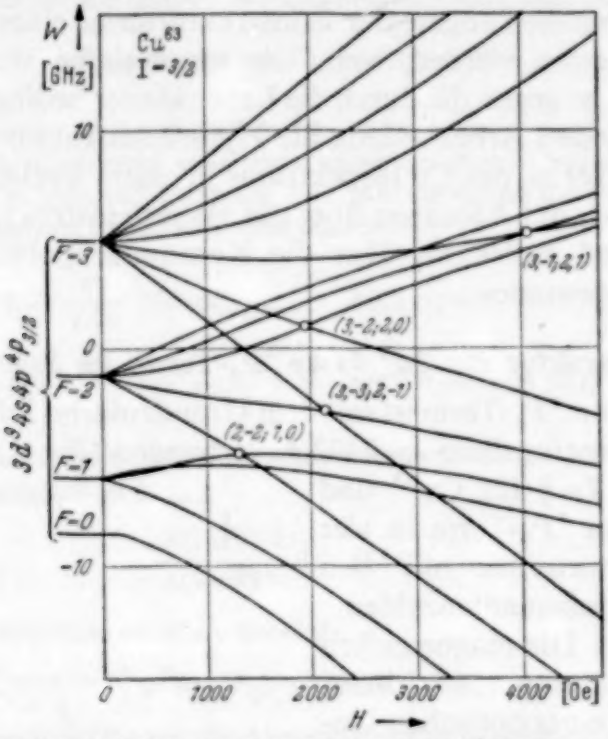


Fig. 2. Hyperfeinstrukturaufspaltung des untersuchten $^4P_{\frac{3}{2}}$-Terms und Verlauf der Hyperfeinstrukturniveaus im äußeren Magnetfeld ohne Berücksichtigung der geringen Quadrupolwechselwirkung

untersuchten $^4P_{\frac{3}{2}}$-Term der Verlauf der Hyperfeinstrukturniveaus in einem Übersichtsbild für den Fall verschwindender Kernquadrupolwechselwirkung ($B=0$) dargestellt.

Für eine exakte Berechnung der Energieniveaus im äußeren Magnetfeld wurde der Hamiltonoperator

$$\mathcal{H} = A\,\boldsymbol{I}\boldsymbol{J} + B\,\frac{3(\boldsymbol{I}\boldsymbol{J})^2 + \frac{3}{2}\boldsymbol{I}\boldsymbol{J} - \boldsymbol{I}^2\boldsymbol{J}^2}{2I(2I-1)J(2J-1)} + \mu_B g_J \boldsymbol{J}\boldsymbol{H}_0 + \mu_B g_I' \boldsymbol{I}\boldsymbol{H}_0 \qquad (2)$$

benutzt. Die ersten beiden Glieder beschreiben die magnetische Dipolwechselwirkung und die elektrische Quadrupolwechselwirkung der Elek-

tronenhülle mit dem Kern. Die Beiträge $\mu_B g_J \boldsymbol{J} \boldsymbol{H}_0$ und $\mu_B g_I' \boldsymbol{I} \boldsymbol{H}_0$ berücksichtigen die Wechselwirkungen des äußeren Magnetfelds $\boldsymbol{H}_0$ mit der Elektronenhülle bzw. mit dem Kern (μ_B Bohrsches Magneton, g_J bzw. g_I' Landéscher Aufspaltungsfaktor für Elektronenhülle bzw. Kern).

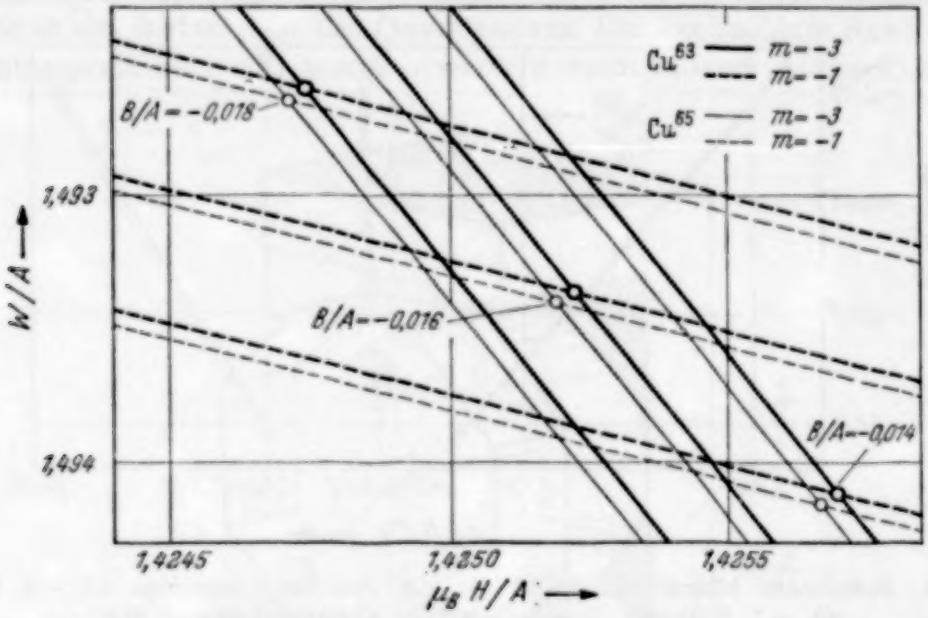


Fig. 3. Abhängigkeit der Lage des dritten Kreuzungspunktes für verschiedene Werte von B/A für die beiden untersuchten Isotope [$g_J = 1{,}75$, $g_I'(\mathrm{Cu}^{63}) = 8{,}08 \cdot 10^{-4}$ und $g_I'(\mathrm{Cu}^{65}) = 8{,}64 \cdot 10^{-4}$]

Der Energieverlauf der verschiedenen Hyperfeinstrukturniveaus führt bei bestimmten Magnetfeldstärken zu Kreuzungspunkten (level-crossings), bei denen sich in besonderen Fällen die Resonanzstreuung von Licht infolge Interferenz der Streuamplituden ändert[3]. Voraussetzung hierfür ist, daß sich die am level-crossing beteiligten Niveaus von einem der Ausgangsniveaus des Grundzustandes kohärent anregen lassen. Aufgrund der Auswahlregeln für elektrische Dipolstrahlung folgt, daß nur Kreuzungspunkte mit $\Delta m = 2$ oder $\Delta m = 1$ beobachtbar sind. In Fig. 2 sind die beteiligten Hyperfeinstrukturniveaus mit den Quantenzahlen F des schwachen Magnetfeldes sowie mit den im ganzen Gebiet geltenden Quantenzahlen $m = m_I + m_J$ in der Form $(F, m; F', m')$ gekennzeichnet*.

* Das vierte level-crossing mit $\Delta m = 2$ ist wegen des kleineren Schnittwinkels der Niveaus wesentlich breiter als die übrigen level-crossings und mit geringerer Signalhöhe zu erwarten.

[3] Colegrove, F. D., P. A. Franken, R. R. Lewis, and R. H. Sands: Phys. Rev. Letters **3**, 420 (1959). — Franken, P. A.: Phys. Rev. **121**, 508 (1960). — Breit, G.: Revs. Mod. Phys. **5**, 91 (1933). — Rose, M. E., and R. L. Carovillano: Phys. Rev. **122**, 1185 (1960).

Die Parameter des Hamiltonoperators (2) haben – entsprechend der unterschiedlichen Stärke der Wechselwirkungen – auf die Lage der Kreuzungspunkte größenordnungsmäßig verschiedenen Einfluß. Da für den untersuchten Term die Kernquadrupolwechselwirkungskonstante B wesentlich kleiner als der magnetische Aufspaltungsfaktor A ist und die

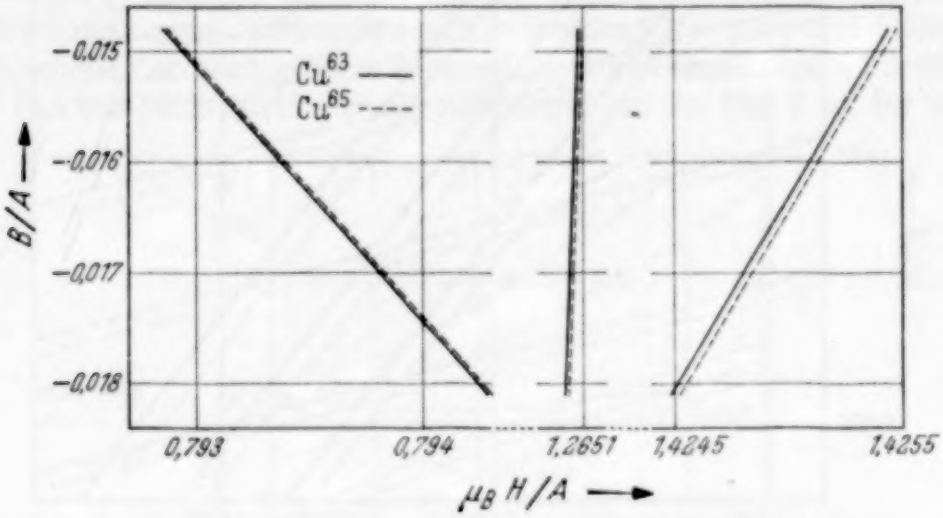


Fig. 4. Berechnete Magnetfeldstärken für die drei level-crossings (2, −2; 1, 0), (3, −2; 2, 0) und (3, −3; 2, −1) in Abhängigkeit von B/A

magnetische Wechselwirkung des Kerns (g_I') mit dem äußeren Magnetfeld H_0 sehr viel kleiner als die der Elektronenhülle (g_J) ist, wird die Lage der level-crossings in erster Näherung durch das Verhältnis A/g_J bestimmt. Zur Verdeutlichung des bei der genauen Auswertung zu berücksichtigenden Einflusses der kleineren Wechselwirkungen (B, g_I') ist in Fig. 3 die Lage des dritten Kreuzungspunktes (3, −3; 2, −1) für drei verschiedene Werte B/A und für die g_I'-Werte von Cu^{63} und Cu^{65} aufgezeichnet. Die verschieden starke Abhängigkeit der Lage der beobachteten Kreuzungspunkte von der Kernquadrupolwechselwirkungskonstanten B ist in Fig. 4 dargestellt. Das zweite level-crossing (3, −2; 2, 0) ist am unempfindlichsten gegenüber einer Quadrupolstörung und daher besonders für eine genaue Bestimmung des A-Faktors geeignet.

Experimentelle Anordnung und Durchführung der Messungen

Die bei der level-crossing-Untersuchung des $3d^9\,4s\,4p\,{}^4P_{\frac{3}{2}}$-Terms benutzte Versuchsanordnung ist in Fig. 5 skizziert. Intensives Licht (L) der Wellenlänge $\lambda = 2492$ Å wurde im äußeren Magnetfeld H_z (H_0 parallel zur z-Richtung) an einem Cu-Atomstrahl (A) gestreut, welcher Cu^{63} und Cu^{65} im natürlichen Isotopengemisch enthielt (69% bzw. 31%). Das

Magnetfeld wurde von einem Elektromagneten mit 30 cm Polschuhdurchmesser und 10 cm Polschuhabstand erzeugt. Als Lichtquelle[4] diente eine Gleichstromentladung mit Kupfer als Kathode, wobei das Kupfer in einem Molybdäntiegel mit einer Strahlungsheizung über den Schmelzpunkt erhitzt wurde. Zirkulierendes Argon von ca. 1 Torr Druck verhinderte ein Bedampfen des Quarzfensters. Die beobachtete Resonanzstrahlungsintensität (R) wurde senkrecht zum äußeren Magnetfeld H_z

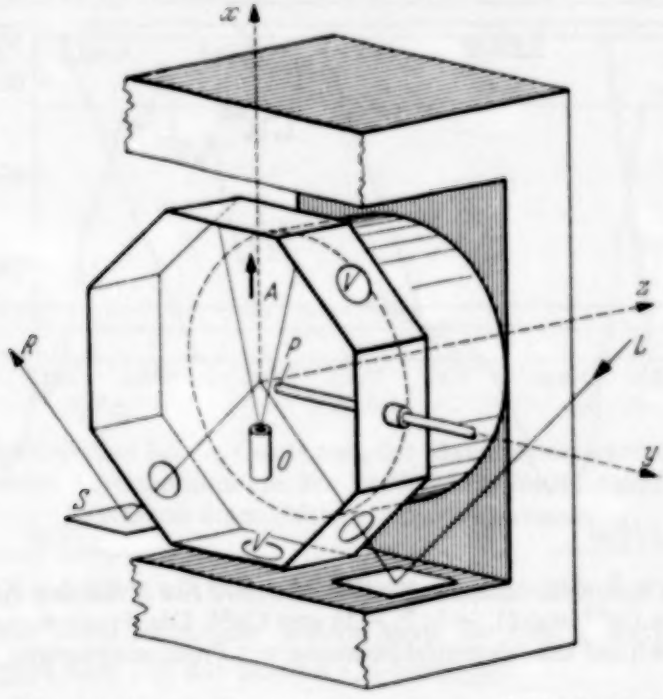


Fig. 5. Atomstrahlapparatur zur Resonanzstreuung von Licht im äußeren Magnetfeld (A Cu-Atomstrahl, O Elektronenstoßofen, P Protonenresonanzsonde, V Pumpöffnungen, L und R Richtung des eingestrahlten Lichts bzw. des beobachteten Resonanzlichts)

und senkrecht zur Einstrahlungsrichtung mit einem Photomultiplier gemessen. Vor dem Photomultiplier war ein Interferenzreflexionsfilter für die beobachtete Interkombinationslinie $3d^9\,4s4p\,^4P_{\frac{1}{2}}-4s^2S_{\frac{1}{2}}$ angebracht (400 Å Breite), durch welches insbesondere die sonst störenden starken Resonanzlinien $3d^{10}\,4p\,^2P_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}-4s\,^2S_{\frac{1}{2}}$ unterdrückt wurden.

Zur Untersuchung der geringen Intensitätsänderung der Resonanzstrahlung in der Nähe eines Kreuzungspunktes wurde dem langsam veränderten statischen Magnetfeld H_z ein rechteckig gepulstes Zusatzfeld ΔH überlagert und die Wechselstromkomponente des Photomultiplierstromes nach phasenempfindlicher Gleichrichtung mit einem Schreiber registriert. Während der Registrierung der level-crossing-Signale wurde die Magnetfeldstärke mit einer Protonenresonanzsonde (P) gemessen, die ca. 2 cm

[4] Details der experimentellen Anordnung sind beschrieben in Bucka, H., J. Ney, u. G. Heppke: Z. angew. Phys. **20**, 354 (1966).

in radialer Richtung (y-Achse) vom Zentrum des Luftspalts entfernt angebracht war. Wegen dieser durch den Strahlengang bedingten Stellung wurden die gemessenen Magnetfeldwerte mit einem Faktor $(1+1{,}5\cdot 10^{-4})$ korrigiert.

Die gemessene Änderung der Resonanzstrahlungsintensität in der Nähe der Magnetfeldstärke 1239 Oe bzw. 2383 Oe ist in Fig. 6 wiedergegeben. Als Beispiele wurden das stärkste level-crossing-Signal von

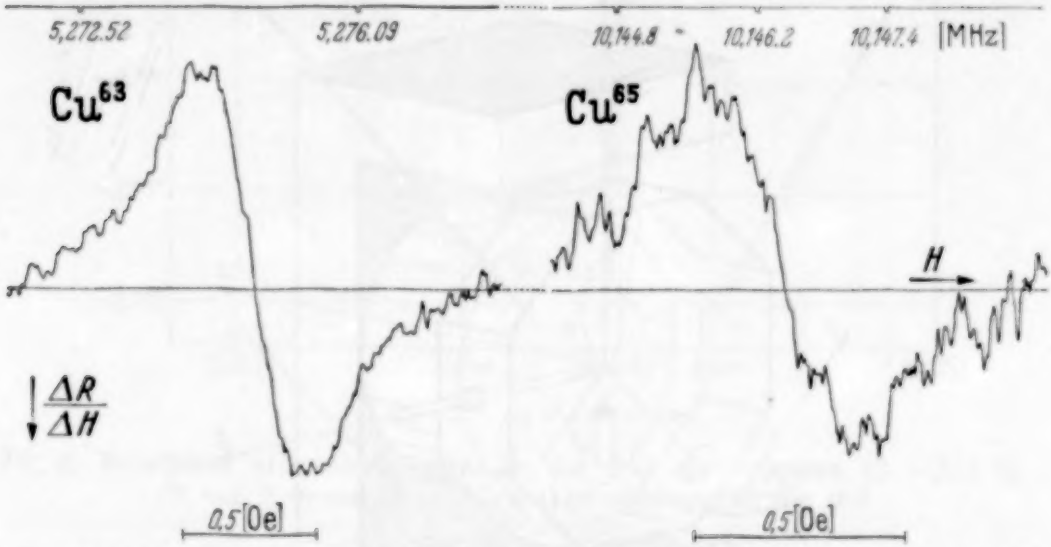


Fig. 6. Registrierte Änderungen des Resonanzlichts $\Delta R/\Delta H$ für den Kreuzungspunkt $(2, -2; 1, 0)$ von Cu^{63} und $(3, -3; 2, -1)$ von Cu^{65}. Die Frequenzmarken beziehen sich auf die Magnetfeldmessung mit Protonenresonanz

Cu^{63} $(2, -1; 1, 0)$ und das schwächste von Cu^{65} $(3, -3; 2, -1)$ gewählt. Die Zeitkonstante der Nachweisapparatur betrug 1 sec, der Modulationshub 0,1 Oe (ca. 25% der Linienbreite) und die Vorschubgeschwindigkeit etwa 0,4 Oe pro Minute. Zur genauen Vermessung der Kreuzungspunkte wurden die Signale bei steigendem und fallendem Magnetfeld H_z jeweils mit ΔH parallel und antiparallel zu H_z registriert.

Ergebnisse und Diskussion

Die für die drei Kreuzungspunkte gemessenen Magnetfeldstärken sind in Tabelle 1 für Cu^{63} bzw. Cu^{65} eingetragen. Die Fehlergrenzen setzen sich zusammen aus der Ungenauigkeit der Magnetfeldmessung und dem etwa um einen Faktor 5 kleineren Fehler, der durch die statistischen Schwankungen entsteht. Die Signalhöhen der level-crossings von Cu^{63} waren jeweils ca. zweimal größer als diejenigen von Cu^{65}.

Bei der Auswertung wurde wie folgt vorgegangen. Zunächst wurde für jedes Isotop aus den Quotienten der Magnetfeldstärken von jeweils

Tabelle 1. *Gemessene Magnetfeldstärken H für die Kreuzungspunkte (F, m; F', m') und Werte A (1,75/g_J)*

Beteiligte Terme (F, m; F', m')	Magnetfeldstärken H in Oe		A (1,75/g_J) in MHz	
	Cu^{63}	Cu^{63}	Cu^{63}	Cu^{63}
(2, −2; 1, 0)	1239,59 (8)	1326,09 (9)	2184,74 (29)	2340,26 (38)
(3, −2; 2, 0)	1974,54 (14)	2115,13 (15)	2184,59 (18)	2340,03 (19)
(3, −3; 2, −1)	2224,03 (16)	2383,43 (17)	2184,72 (21)	2340,29 (25)

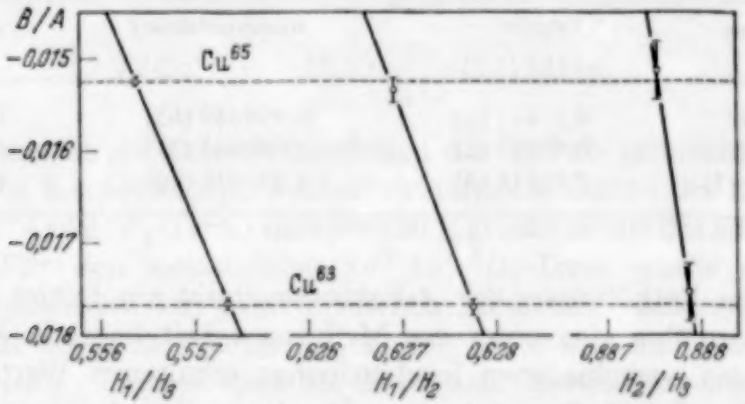


Fig. 7. Berechnete Geraden für die Quotienten der Magnetfeldstärken (H_1/H_3, H_1/H_2, H_2/H_3) jeweils zweier Kreuzungspunkte. Zur Bestimmung von B/A sind die gemessenen Werte mit ihren Fehlergrenzen eingetragen

zwei Kreuzungspunkten ein Wert für B/A ermittelt. Die aus den einzelnen Kombinationen resultierenden Werte sind in Fig. 7 eingetragen. Als Mittelwert ergibt sich für die beiden Cu-Isotope:

$$B/A(Cu^{63}) = -0{,}01767\,(5) \quad \text{bzw.} \quad B/A(Cu^{65}) = -0{,}01526\,(7).$$

Unter Verwendung dieses gemittelten Wertes B/A wurde darauf A/g_J für jedes Isotop aus den Magnetfeldstärken der drei Kreuzungspunkte bestimmt. Für die Berechnung der Kreuzungspunkte wurde zunächst $g_J = 1{,}75$[5] verwendet. (Bei reiner Russel-Saunders-Kopplung gilt $g_J = \frac{26}{15}$.) Da der genaue g_J-Faktor* vom optisch gemessenen Wert gegebenenfalls noch geringfügig abweicht, ist als Resultat die magnetische Aufspaltungskonstante multipliziert mit dem Faktor 1,75/g_J angegeben. Falls der g_J-Faktor exakt mit dem Wert 1,75 zusammenfällt, entsprechen die eingetragenen Zahlenwerte genau den A-Faktoren. Bei einer Abweichung von wenigen Prozenten ergibt sich im Zusammenhang mit dem g_I'-Faktor eine sehr geringe Korrektur, die unterhalb unserer Meßgenauigkeit liegt.

Zur Bestimmung der Hyperfeinstrukturanomalie wurden dieselben level-crossings beider Isotope mehrmals hintereinander gemessen. Da die Magnetfeldstärken der beiden Kreuzungspunkte jeweils nur ca.

* Siehe Nachtrag am Schluß der Arbeit.

[5] Moore, C. E.: Natl. Bur. Standards (U.S.), Circ. 467, vol. II (1952).

7% auseinanderliegen, kann das Verhältnis der Magnetfeldstärken wesentlich genauer bestimmt werden als die Absolutwerte und entspricht bis auf eine kleine Korrektur, bedingt durch den geringen Einfluß der Quadrupolwechselwirkung, bereits dem Verhältnis der A-Faktoren. Die erforderlichen Korrekturfaktoren f sind in Tabelle 2 angegeben. Für die

Tabelle 2. *Verhältnis der A-Faktoren von Cu^{63} und Cu^{65}*

Beteiligte Terme $(F, m; F', m')$	H^{63}/H^{65}	Korrekturfaktor f	A^{63}/A^{65}
(2, −2; 1, 0)	0,93477 (4)	0,998689 (65)	0,93353 (11)
(3, −2; 2, 0)	0,93351 (2)	1,000044 (2)	0,93355 (2)
(3, −3; 2, −1)	0,93315 (4)	1,000428 (20)	0,93355 (6)

Bildung des Verhältnisses der A-Faktoren ergibt ein Fehler in g_J von einigen Prozenten eine unter der Meßgenauigkeit liegende Korrektur. Die aus den verschiedenen level-crossings erhaltenen Werte sind in Spalte 4 der Tabelle 2 eingetragen. Da die zweiten level-crossings am unempfindlichsten gegenüber der Quadrupolwechselwirkung sind, wurden sie zur Bestimmung von A^{63}/A^{65} besonders häufig vermessen.

Mit dem in dieser Arbeit bestimmten Verhältnis der A-Faktoren

$$\frac{A(\mathrm{Cu}^{63})}{A(\mathrm{Cu}^{65})}=0{,}93355\ (2)$$

erhält man bei Benutzung des Quotienten der magnetischen Momente[6] $\mu_I(\mathrm{Cu}^{63})/\mu_I(\mathrm{Cu}^{65})=0{,}933424\ (19)$ für die Hyperfeinstrukturanomalie im angeregten $3d^9\,4s\,4p\,{}^4P_{\frac{1}{2}}$-Term

$$_{63}\Delta_{65}=\frac{A^{63}}{A^{65}}\cdot\frac{\mu^{65}}{\mu^{63}}-1=1{,}4\cdot10^{-4}\ (4),$$

wobei der Fehler zu etwa gleichen Teilen aus dem Verhältnis der A-Faktoren und dem Verhältnis der magnetischen Kernmomente resultiert. Die durch das $4s$-Elektron im Grundzustand $3d^{10}\,4s\,{}^2S_{\frac{1}{2}}$ bewirkte Hyperfeinstrukturaufspaltung wurde mit Atomstrahlresonanztechnik[7] gemessen. Für die Anomalie ergab sich $_{63}\Delta_{65}=1{,}5\cdot10^{-4}$ (2).

In der vorliegenden Untersuchung wurden folgende Beziehungen zwischen den Hyperfeinstrukturkonstanten A und B und dem g_J-Faktor

[6] WALCHLI, H. E.: Oak Ridge National Laboratory Report ORNL 1469, (1955) (unpubl.), Suppl. II.

[7] TING, Y., and H. LEW: Phys. Rev. **105**, 581 (1957).

des $^4P_{\frac{1}{2}}$-Terms nach gewichteter Mittelung der Einzelresultate erhalten:

$$A(\mathrm{Cu}^{63}) = 2184{,}66\,\frac{g_J}{1{,}75}\,(18)\,\mathrm{MHz},$$

$$B(\mathrm{Cu}^{63}) = -38{,}65\,\frac{g_J}{1{,}75}\,(11)\,\mathrm{MHz},$$

$$A(\mathrm{Cu}^{65}) = 2340{,}15\,\frac{g_J}{1{,}75}\,(19)\,\mathrm{MHz},$$

$$B(\mathrm{Cu}^{65}) = -35{,}69\,\frac{g_J}{1{,}75}\,(17)\,\mathrm{MHz}.$$

Die gewonnenen A-Faktoren bestätigen die optisch gemessenen Werte (vgl. [2]). Die Kernquadrupolwechselwirkungskonstanten des hier untersuchten $3d^9\,4s\,4p\,^4P_{\frac{1}{2}}$-Terms sind etwa 30% größer als die des $3d^{10}\,4p\,^2P_{\frac{1}{2}}$-Terms[8]. Für den metastabilen $3d^9\,4s^2\,^2D_{\frac{3}{2}}$-Term wurde die Kernquadrupolwechselwirkung mit optischen Methoden[9] bestimmt und ist ca. dreimal so groß wie im $^4P_{\frac{1}{2}}$-Term. Diese aus drei Termen vorliegenden Informationen über die Kernquadrupolwechselwirkungen geben, nach einer erforderlichen Korrektur nach STERNHEIMER[10], unabhängige Zahlenwerte für die Berechnung der Kernquadrupolmomente der Cu-Isotope. Das aus unseren Messungen gewonnene Verhältnis der B-Faktoren beider Isotope

$$\frac{B(\mathrm{Cu}^{63})}{B(\mathrm{Cu}^{65})} = 1{,}083\ (8)$$

stimmt mit dem aus Kernquadrupolresonanzmessungen bekannten Wert[11] 1,0806 (3) innerhalb der Fehlergrenzen überein.

Aus der Breite des Nullfeld-crossings (0,41 Oe) ergibt sich für den angeregten $3d^9\,4s\,4p\,^4P_{\frac{1}{2}}$-Term eine Lebensdauer von $\tau = 3{,}2 \cdot 10^{-7}$ (3).

Nachtrag bei der Korrektur. Während der Drucklegung konnte unter Mithilfe von Herrn cand. ing. V. METAG mit einem Doppelresonanzexperiment ein genauerer Wert für g_J bestimmt werden. Wir erhielten aus Hochfrequenzübergängen ($\Delta F = 0$, $\Delta m = \pm 1$ zwischen 10 Oe und 30 Oe) den Wert $g_J = 1{,}714$ (2). Mit diesem g_J-Faktor ergeben sich für die Hyperfeinstrukturwechselwirkungskonstanten die Werte:

$$A(\mathrm{Cu}^{63}) = 2140{,}0\ (23)\ \mathrm{MHz}, \qquad B(\mathrm{Cu}^{63}) = -37{,}9\ (2)\ \mathrm{MHz},$$
$$A(\mathrm{Cu}^{65}) = 2292{,}3\ (25)\ \mathrm{MHz}, \qquad B(\mathrm{Cu}^{65}) = -35{,}0\ (2)\ \mathrm{MHz}.$$

Die Deutsche Forschungsgemeinschaft stellte in dankenswerter Weise eine Anzahl Forschungsgeräte für diese Untersuchung zur Verfügung.

---

[8] NEY, J.: Z. Physik **196**, 53 (1966).
[9] FISCHER, W., H. HÜHNERMANN u. K. J. KOLLATH: Z. Physik **194**, 417 (1966).
[10] STERNHEIMER, R.: Phys. Rev. **146**, 140 (1966).
[11] KRÜGER, H., u. U. MEYER-BERKHOUT: Z. Physik **132**, 171 (1952).

Zeitschrift für Physik 202, 32–37 (1967)

Collective Intermediate Structure in the Giant Resonance of ^{28}Si*

J. B. SEABORN**, D. DRECHSEL, and W. GREINER
Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt/M., Germany

Received January 5, 1967

The theory of collective correlations is applied to ^{28}Si. The main structure of photonuclear experimental data is explained nearly quantitatively. A classification of the various structure as doorway- or one particle- one hole structure, collective intermediate structure and non collective structure is proposed.

1. Introduction

In early photonuclear experiments the giant dipole resonance appeared in the photo-absorption cross section as a single energy broad peak ($\Gamma \sim 3-5$ MeV) in the neighborhood of 20 MeV excitation. The collective model[1] of the giant resonance and the simple $1p-1h$ model[2] predict a state in this region with an appreciable part of the dipole strength. However, in more recent years with the improvement of experimental resolution, a great deal more structure has been revealed in the giant resonance and, consequently, refinements in the theory have become necessary. There appear to be two general types of substructure which occur, namely a "collective intermediate" structure where several bumps in the cross section are revealed in experiments with energy resolution of the order of 200 keV and, in some nuclei, fine structure appears when the resolution is of the order of 20 keV. It is structure of the first type which we wish to discuss here.

To some extent the intermediate structure is described by the dynamic collective theory[3] which unifies the collective model of the giant resonance and the collective model of surface oscillations. However, the completely collective treatment has not been able to account for all of the experimentally observed structure. In particular, no structure at all is predicted on the low energy side of the giant resonance[3]. Inasmuch as the gross structure of the giant resonance is given by the $1p-1h$

* This work has been supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft with a contract for studies in Nuclear Structure.

** Present address: Department of Physics, North Texas State University, Denton, Texas.

[1] JENSEN, J. H. D., and H. STEINWEDEL: Z. Naturforsch. **5a**, 413 (1950).

[2] ELLIOT, J. P., and B. W. FLOWERS: Proc. Roy. Soc. (London) A **242**, 57 (1957).

[3] WEBER, H. J., M. G. HUBER u. W. GREINER: Z. Physik **190**, 25 (1966); **192**, 182, 223 (1966).

model, as well as by the collective model, and the dipole strength is distributed over several one particle- one hole states, it has been proposed recently that the agreement between theory and experiment might be improved if, instead of the usual collective one, a particle-hole description of the giant dipole vibrations is incorporated in the theory.

The idea of collective correlations[4,5] in the framework of the particle-hole model has been developed and applied to ^{12}C and the results are in quite good agreement with the experimental photo-absorption data. However, since the intermediate structure is not as well developed in ^{12}C as it is in other light nuclei, a better demonstration of the importance of collective correlations in light nuclei will be provided by, for example, ^{28}Si. In the present paper the connection between the dynamic collective theory and the particle-hole model is discussed and results obtained from the application of the extended theory to ^{28}Si are presented.

2. The Dynamic Collective Theory and the Particle-Hole Model

It is well-known that the gross structure of the giant dipole resonance is given by the particle-hole model as well as by the collective model of the giant resonance. Moreover, 1^- states of the type envisioned by the dynamic collective theory (i.e. states involving surface oscillations) are also expressible, at least in principle, as superpositions of many-particle/many-hole configurations (as are all modes of nuclear motion). If only quadrupole surface vibrations are considered, such superpositions contain no $1p-1h$ configurations, because in addition to the even-parity configurations describing the quadrupole motion, there must be at least one odd-parity particle-hole pair to make the overall parity odd. Thus, collective 1^- states with one or more quadrupole phonons excited would, in a particle-hole treatment, be confined to the $np-nh$ subspace, where $n \geqq 2$. It is assumed in ref.[4] that the structure in the giant resonance is produced by the strong off-diagonal coupling (expected on the basis of the dynamic collective theory) of these states to the ones in the $1p-1h$ subspace, which describe the main features of the giant resonance.

The formulation of the extended theory is obtained by simply translating the dipole parts of the Hamiltonian of the dynamic collective theory into particle-hole language. That is,

$$H = H_{ph}^{(1)} + H_Q + H_{DQ}. \tag{1}$$

In Eq. (1) $H_{ph}^{(1)}$ describes the giant dipole vibrations, the matrix elements of which are calculated in the basis of $1p-1h$ configurations. The

[4] DRECHSEL, D., J. B. SEABORN, and W. GREINER: Phys. Rev. Letters **17**, 488 (1966).

[5] SEABORN, J. B., D. DRECHSEL, H. ARENHÖVEL, and W. GREINER: Phys. Letters **23**, 576 (1966).

matrix elements of the quadrupole part H_Q are calculated in the collective model with the energy $\hbar\omega_2$ of the quadrupole phonons taken from the low energy experimental spectrum. The translation of the dipole part of the interaction operator H_{DQ} into the particle-hole language is achieved by requiring that the dipole operator be the same in both pictures[4].

The secular problem can be simplified considerably by prediagonalizing the $1p-1h$ subspace and discarding the resulting 1^- eigenstates which have no dipole strength and lie far away from the giant resonance. This is reasonable since such states have no influence on the structure of the giant resonance. The matrix of Eq. (1) is thus constructed in the basis

$$|\Psi_i(1^-)\rangle = \sum_k u_{ik} |\Phi_k(1^-)\rangle, \quad (1p-1h)\text{-states}, \tag{2a}$$

$$|\tau; N v l; 1M\rangle = \sum_{\lambda\mu} (\tau l \lambda\mu | 1M) |\Psi(\tau\lambda)\rangle |N v l \mu\rangle, \quad (n^{\cdot}p-n^{\cdot}h)\text{-states with } n \geqq 2. \tag{2b}$$

In Eq. (2a) the amplitudes u_{ik} are obtained from the pre-diagonalization in the $1p-1h$ subspace. Thus, the functions $|\Psi_i\rangle$ are superpositions of the $1p-1h$ configurations $|\Phi_k\rangle$. If we restrict to 1^- states with only one dipole phonon excited ($1\hbar\omega$ excitations in the particle-hole picture), the functions $|\Psi\rangle$ in Eq. (2b) are also superpositions of $1p-1h$ configurations. States of the type in Eq. (2b) with $\tau \neq 1$ carry no dipole strength themselves and it turns out that their influence on the structure of the giant resonance is negligible. Thus, the same particle-hole functions $|\Psi\rangle$ occur in Eqs. (2a) and (2b). The quadrupole part of the basis functions is given by the collective function $|N v l \mu\rangle$ where $N-v$ of the N phonons are coupled in pairs to angular momentum zero and the remaining v are coupled to l. The eigenvalues and eigenvectors resulting from the diagonalization of the energy matrix [Eq. (1)] are used to calculate the dipole strengths of the eigenstates. The distribution of the dipole strength can then be compared with experimental photo-absorption data.

We are thus led to structure in the giant resonances due to

a) 1 particle – 1 hole states (prediagonalization of the $1p-1h$ matrix),

b) collective states as given in (2b),

c) non collective $np-nh$ states with $n \geqq 2$.

The first kind of structure might be called *doorway structure* while the second type of structure might be named *collective intermediate structure*. The *non collective structure* is substructure of the particle-hole and collective structure due to the admixture of non collective $np-nh$ states

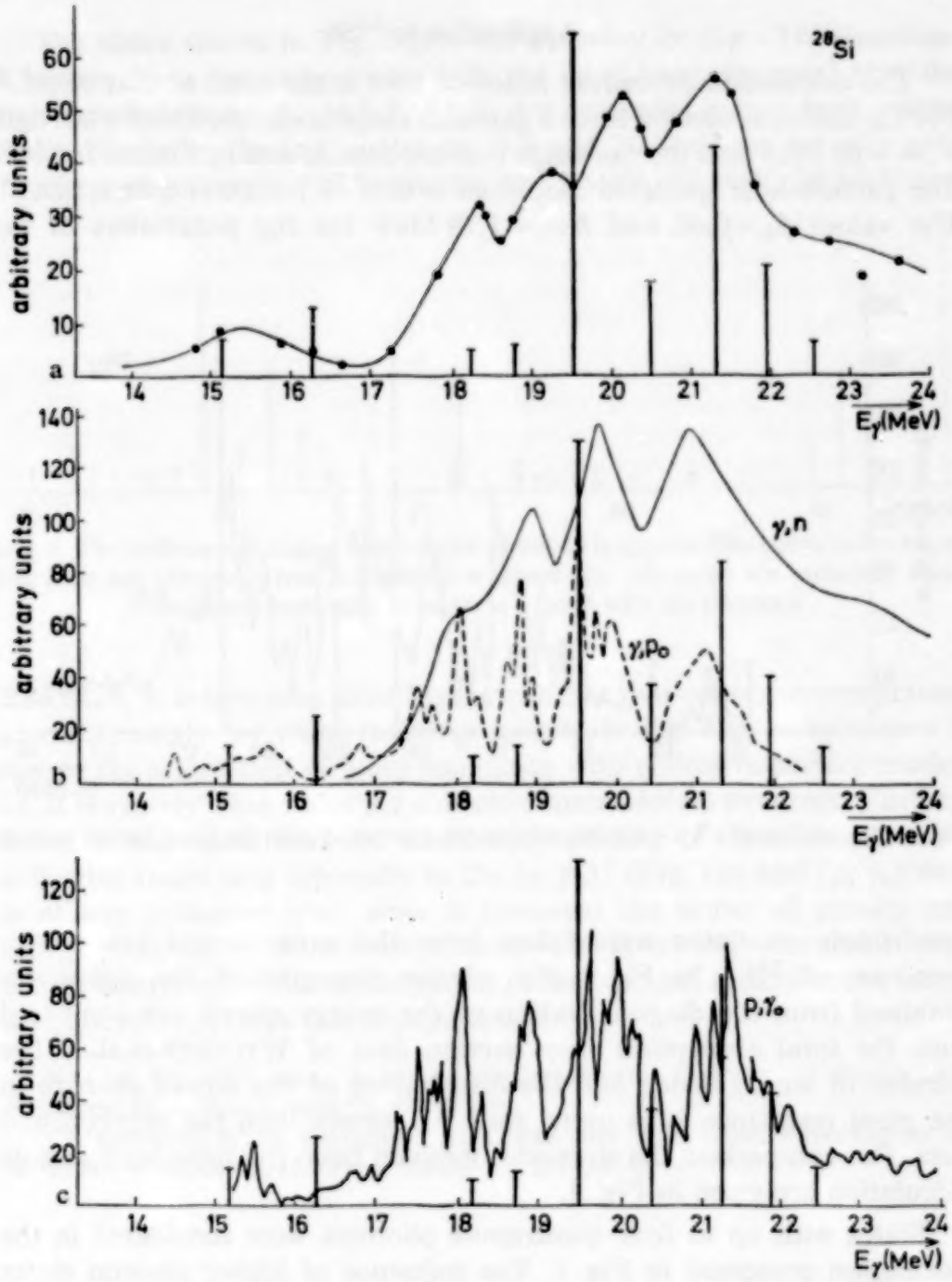


Fig. 1. The results of a particle-hole calculation with collective correlations are compared with various experimental data

to the giant resonances. In the following we give an example of these structures* for the ^{28}Si.

* It should be noticed, that here the classification of structures is according to the magnitude of the interaction energy of the various $(np-nh)$ configurations with the $(1p-1h)$ subspace.

3. Application to ^{28}Si

The calculation procedure followed here is the same as that of ref.[4]. For the nucleon-nucleon force a gaussian shape is assumed with a strength $V_0 = -60$ MeV and the exchange mixture determined by GILLET for ^{12}C. The particle-hole spectrum employed is that of BOLEN and EISENBERG[6]. The values $\beta_0 = 0.40$ and $\hbar\omega_2 = 1.78$ MeV for the parameters of the

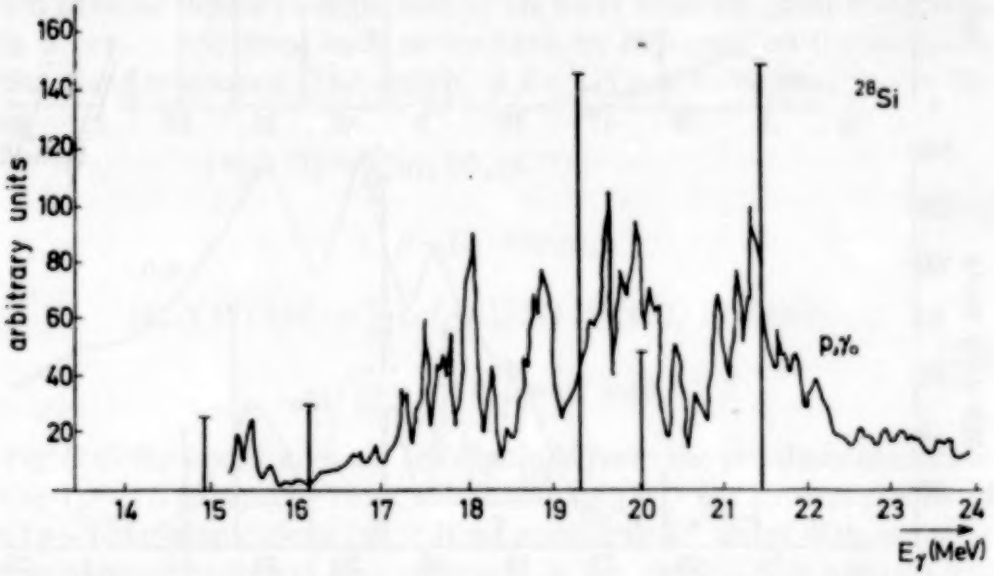


Fig. 2. The results of a $1p-1h$ calculation are compared with the (p, γ_0) cross section

quadrupole oscillator were taken from the experimental low energy spectrum of ^{28}Si. In Fig. 1 the relative strengths of the eigenstates obtained from the diagonalization of the energy matrix are compared with the total absorption cross section data of WYCKOFF et al.[7]. The number of strong states and the distribution of the dipole strength in the giant resonance is in quite good agreement with the experimental data. For comparison the strengths obtained from the pure particle hole calculation are given in Fig. 2.

States with up to four quadrupole phonons were considered in the calculation presented in Fig. 1. The influence of higher phonon states can be seen in Fig. 3 where up to six phonons are included. The higher phonons make virtually no contribution to the structure in the giant resonance region, but their presence is, of course, clearly manifested in the region above 25 MeV excitation.

---

[6] BOLEN, L. N., and J. M. EISENBERG: Phys. Letters **9**, 52 (1964).

[7] WYCKOFF, J. M., B. ZIEGLER, H. W. KOCH, and R. UHLIG: Phys. Rev. **137**, B 576 (1965).

The states shown in Fig. 2 give the doorway or $(1p-1h)$ structure. It is seen from the comparison with the (p, γ_0) experiments[8] that the major peak between 21 and 22 MeV, for example, is split into several peaks. Similarly, the (ph) states at 19.3 and 20 MeV are actually split into four major groups of levels, i.e. at 18 MeV, 19 MeV, 20 MeV and

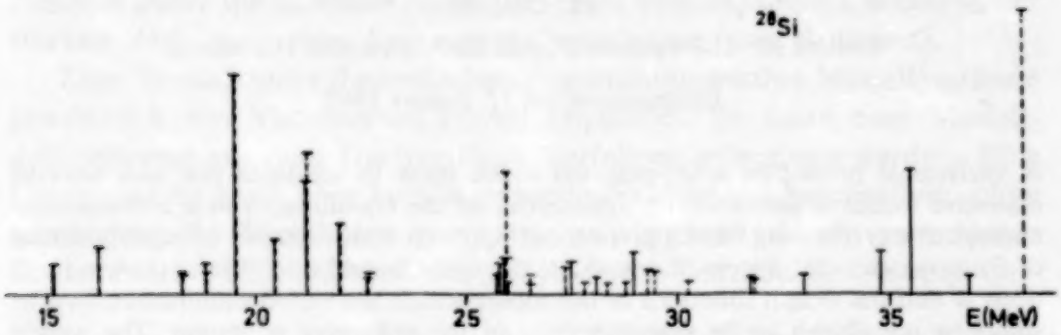


Fig. 3. The influence of higher quadrupole phonons is shown. The levels indicated by full lines are obtained from a calculation where four phonons are included; those indicated by dotted lines are obtained with six phonons

20.4 MeV. It is now seen from Figs. 1b and 1c that collective correlations account exactly for these major groups of levels. This substructure is due to the interaction of giant resonance with collective surface modes, i.e. it is exactly what we called collective intermediate structure. Furthermore, it is evident that the additional splitting of these intermediate collective states seen especially in the (γ, p_0)[9] (Fig. 1b) and (p, γ_0) data is of non collective type, since it preserves the center of gravity and energy positions of the collective states. The latter indicates small interaction matrix elements between the collective and noncollective states and, therefore, favors this interpretation.

---

[8] ALLAS, R., S. HANNA, L. MEYER-SCHÜTZMEISTER, R. SEGEL, P. SINGH, and Z. VAGER: Phys. Rev. Letters **13**, 628 (1964).

[9] MATSUMOTO, S., H. YAMASHITA, T. KAMAE, and Y. NOGAMI: Phys. Letters **12**, 49 (1964). — ULLRICH, H.: Phys. Letters **12**, 114 (1964).

Zeitschrift für Physik 202, 38–48 (1967)

Symmetrieverletzende Modellzustände und kollektive Bewegungen*

H. D. Zeh
Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg

Eingegangen am 17. Januar 1967

A variational procedure is investigated which leads to solutions that can describe collective modes connected with symmetries of the Hamiltonian in a non-phenomenological way. Starting from a given set of trial ware functions $\{\Phi\}$ all superpositions of the symmetry-transforms of any Φ are permitted in addition. The trial wave functions Φ and the weight functions of the superposition are varied simultaneously. The solutions are shown to be eigenfunctions of the symmetry operators. The weight functions are partly determined by group properties. In the case of one-dimensional representations, i.e. especially for Abelian symmetry groups, the superposition degenerates to become a projection.
In the limit of a strongly symmetry-violating solution Φ the energy spectrum is also determined by group properties and the weight function may be interpreted as the wave function of a collective motion. The equations of motion will then describe the interaction between collective and intrinsic modes.
The non-axial rotator is considered as an example.

1. Einleitung

Zur Beschreibung komplizierter physikalischer Systeme (etwa Vielteilchensysteme), die sich einer exakten Behandlung entziehen, werden oft Modellzustände benutzt. Ein Modellzustand ist rein phänomenologisch definiert durch die Fähigkeit, gewisse Gruppen von Eigenschaften des exakten Systems approximativ wiederzugeben. Erfahrungsgemäß ist das häufig auch dann möglich, wenn bezüglich anderer Gruppen von Eigenschaften qualitative Widersprüche zwischen Modell und exaktem Zustand bestehen. Die naive Interpretation, der Modellzustand Φ sei eine Näherung des exakten Zustandes Ψ in dem Sinne

$$|\langle\Psi|\Phi\rangle|^2/\langle\Psi|\Psi\rangle\langle\Phi|\Phi\rangle \approx 1,$$

ist dann sicher falsch.

Ein Beispiel ist die Beschreibung eines stationären n-Teilchen-Systems durch eine Determinante aus Einteilchenfunktionen. Eine solche Determinante, obgleich eine Funktion sämtlicher $3n$ Koordinaten, vermag nur Eigenschaften des „inneren" Zustands wiederzugeben, ist aber sicher kein stationärer Zustand bezüglich der Schwerpunktsbewegung. Eine deformierte (d.h. nicht bezüglich Drehungen invariante) Determinante kann

* Teil einer Habilitationsschrift (Heidelberg, Juli 1966).

darüber hinaus auch nicht die dann auftretenden Rotationszustände beschreiben. Da bei Rotationen ein Analogon zu Galilei-Invarianz fehlt, ist natürlich auch eine Separation von „innerer" und „kollektiver" Bewegung in diesem Fall nicht exakt möglich.

In beiden Beispielen äußert sich die Unmöglichkeit, den exakten Zustand durch die Modellwellenfunktion zu approximieren, schon in der starken Verletzung einer Symmetrie (Translation bzw. Rotation).

Zum Versuch einer theoretischen Begründung werden Modellzustände gewöhnlich aus Variationsverfahren abgeleitet. So kann eine Modelldeterminante aus dem Hartree-Fock-Verfahren gewonnen werden. Eine Determinante kann aber keinen gebundenen Zustand beschreiben, ohne mindestens die Translationssymmetrie zu verletzen, da ein gebundener Zustand aus n Teilchen eben wesentlich eine n-Teilchen-Korrelation darstellt.

Es müssen daher Superpositionen von Determinanten oder sonstigen Modellansätzen zugelassen werden. Beliebige Superpositionen würden jedoch den Zusammenhang mit den ursprünglichen Modellzuständen verloren gehen lassen und auch deren sie qualifizierende Einfachheit verlieren. Im folgenden werden die einfachst möglichen Superpositionen betrachtet, welche die Symmetrieforderungen zu erfüllen gestatten. Diese Beschränkung wird mit der Voraussetzung begründet, daß der ursprüngliche Modellansatz für die hier vorgeschlagene Interpretation „hinreichend geeignet" ist. Es bleibt dann zu untersuchen, unter welchen Umständen die ursprüngliche Modellfunktion Eigenschaften des exakten Zustands approximieren kann.

2. Erweiterung eines Variationsansatzes

Sei $\{\Phi\}$ eine Menge von Variationsfunktionen. Ist diese Menge nichtlinear (d.h. ist eine Linearkombination zweier Elemente aus $\{\Phi\}$ nicht allgemein wieder ein Element aus $\{\Phi\}$), so kann das Variationsproblem

$$\langle \delta \Phi_0 | (H - E_0) | \Phi_0 \rangle = 0, \tag{1}$$

$$E_0 = \langle \Phi_0 | H | \Phi_0 \rangle / \langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle \tag{1a}$$

auf Lösungen Φ_0 führen, die nicht Eigenzustände der mit H vertauschbaren Symmetrieoperatoren (speziell der Casimir-Operatoren) sind. Das gilt insbesondere auch dann, wenn auch $\{\Phi\}$ unter den betrachteten Symmetrietransformationen invariant ist (d.h. ein einer Symmetrietransformation U unterworfenes Element aus $\{\Phi\}$ wieder ein Element aus $\{\Phi\}$ ist).

In einem solchen Fall führt das Problem (1) zu einer Entartung, die nicht einer Entartung des exakten Problems korrespondiert. So ist z.B.

für eine kontinuierliche Gruppe, gekennzeichnet durch den Parametersatz Ω mit der zugeordneten unitären Transformation U_Ω, mit Φ_0 auch $U_\Omega \Phi_0 = \Phi_\Omega$ eine Lösung, da

$$\langle \Phi_0 | U_\Omega^+ H U_\Omega | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | H | \Phi_0 \rangle . \tag{2}$$

U_Ω mischt genau dann irreduzible Darstellungen, wenn Φ_0 nicht Eigenfunktion der Casimir-Operatoren ist.

Der ursprüngliche Ansatz $\{\Phi\}$ hat sich damit als ungeeignet erwiesen, den wirklichen Zustand zu approximieren. Um zu verstehen, wie Φ_0 trotzdem bestimmte Eigenschaften des exakten Zustands beschreiben kann, wurde vorgeschlagen[1], diesen durch eine Superposition der Φ_Ω,

$$\Psi_0 = \int d\Omega \, f(\Omega) \, U_\Omega \Phi_0 , \tag{3}$$

anzunähern. Die Gewichtsfunktion $f(\Omega)$ läßt sich aus einem zweiten Variationsverfahren bestimmen.

Diese Methode ist unbefriedigend insofern, als Φ_0 nicht entsprechend seiner späteren Interpretation bestimmt wird. Anstelle von (1) sollte das Variationsproblem[2, 3]

$$\langle \delta \Psi | (H - E) | \Psi \rangle = 0 , \tag{4}$$

$$E = \langle \Psi | H | \Psi \rangle / \langle \Psi | \Psi \rangle , \tag{4a}$$

$$\Psi = \int d\Omega \, f(\Omega) \, U_\Omega \Phi \tag{4b}$$

bei unabhängiger Variation von Φ und $f(\Omega)$ gelöst werden.

Sei Φ die Lösung aus (4) und $\{\Psi\}_\Phi$ die durch Variation von $f(\Omega)$ entstehende Teilmenge. Diese bildet nach Konstruktion einen linearen und unter der Symmetriegruppe invarianten Raum. Sei ferner Q_Φ der Projektor auf diesen Raum. Dann entspricht die Bestimmung von $f(\Omega)$ der Diagonalisierung von $Q_\Phi H Q_\Phi$. Mit H und Q_Φ vertauscht auch $Q_\Phi H Q_\Phi$ mit den Symmetrieoperatoren. Das Variationsproblem (4) führt daher im Gegensatz zu (1) auf Eigenzustände der Symmetrieoperatoren.

Ist die Symmetriegruppe kompakt, so läßt sich $f(\Omega)$ nach den irreduziblen Darstellungen $D_I^{M\,K}(\Omega)$ entwickeln:

$$f(\Omega) = \sum_{I\,M\,K} c_{I\,M\,K} \overset{*}{D}{}_I^{M\,K}(\Omega) . \tag{5}$$

I steht für einen Satz von Eigenwerten der Casimir-Operatoren. Ψ erhält damit die Form

$$\Psi = \sum_{I\,M\,K} c_{I\,M\,K} Q_I^{M\,K} \Phi , \tag{6}$$

---

[1] Peierls, R. E., and J. Yoccoz: Proc. Phys. Soc. (London) A **70**, 381 (1957).
[2] Zeh, H. D.: Z. Physik **188**, 361 (1965).
[3] Rouhaninejad, H., and J. Yoccoz: Nuclear Phys. **78**, 353 (1966).

wobei

$$Q_I^{M\,K} = \int d\Omega \, \overset{*}{D}{}_I^{M\,K}(\Omega)\, U_\Omega . \tag{7}$$

Aus den Eigenschaften der irreduziblen Darstellungen beweist man bei geeigneter Normierung

$$Q_I^{M\,K} Q_{I'}^{M'\,K'} = \delta_{I\,I'} \delta_{K\,M'} Q_I^{M\,K'}, \tag{8a}$$

$$(Q_I^{M\,K})^+ = Q_I^{K\,M}. \tag{8b}$$

Die $Q_I^{M\,K}$ bilden die Eigenräume zu I, K ab auf jene zu I, M. Insbesondere ist $Q_I^{K\,K}$ der Projektor auf den Eigenraum zu I, K.

Da die Lösungen Ψ – wie oben gezeigt – Eigenzustände der Symmetrieoperatoren sein müssen, läßt sich die Summe in (6) einschränken:

$$\Psi_{I\,M,\,\alpha} = \sum_K c_K(I\,M,\alpha)\, Q_I^{M\,K}\, \Phi(I\,M,\alpha). \tag{9}$$

α steht für alle übrigen Quantenzahlen. Φ hängt im Gegensatz zu Φ_0 von I ab.

Die Gl. (4) führt damit durch Variation von Φ bzw. $f(\Omega)$, d.h. c_K, auf das Gleichungspaar

$$\sum_{K\,K'} \overset{*}{c}_K c_{K'} \langle \delta\Phi | (H-E)\, Q_I^{K'\,K} | \Phi \rangle = 0, \tag{10a}$$

$$\sum_{K'} c_{K'} \langle \Phi | (H-E)\, Q_I^{K\,K'} | \Phi \rangle = 0. \tag{10b}$$

Für eindimensionale Darstellungen – also insbesondere bei Abelschen Gruppen – entfällt die Summe über K und damit Gl. (10b). Die Gewichtsfunktion $f(\Omega)$ ist dann eindeutig aus Symmetrieeigenschaften bestimmt, und die Superposition (4b) entartet zu einer Projektion, so daß sich die früher[2] vorgeschlagene Methode ergibt.

Die gleiche Vereinfachung ergibt sich auch für mehrdimensionale Darstellungen, wenn Φ noch eine partielle Symmetrie behält und Eigenzustand zu K ist. Die Summe über K entfällt diesmal, weil nur ein $Q_I^{M\,K}$ angewandt auf Φ nicht null ergibt.

2.1. Beispiele

2.1.1. Teilchen-Permutation. $\{\Phi\}$ sei die Menge der Produkt-Funktionen, Q_A die Projektion auf den Raum der antisymmetrischen Funktionen. Dann ist $Q_A \Phi_0$ die antisymmetrisierte Hartree-Lösung, $Q_A \Phi$ die Hartree-Fock-Lösung. Nur ein Symmetrie-Eigenwert ist in diesem Fall realisiert.

2.1.2. Drehungen.

$$f_{I\,M}(\Omega)=\sum_K c_K(I\,M,\alpha)\,\overset{*}{D}{}_I^{M\,K}(\Omega)$$

hat die Form der Wellenfunktion des nichtsymmetrischen Rotators. Die Entkopplung von Rotation und innerer Bewegung wird in Abschnitt 3.1.1 untersucht. Für Axialsymmetrie ($J_z\Phi=K_0\Phi$) entfällt die Summe über K.

Natürlich kann $f(\Omega)$ hier nicht ohne weiteres als Wellenfunktion interpretiert werden. Insbesondere ist im allgemeinen $\langle\Phi_\Omega|\Phi_{\Omega'}\rangle\neq 0$ für $\Omega\neq\Omega'$, so daß Ω nicht Observable im axiomatischen Sinn sein kann. Nur wenn bei starker Symmetrieverletzung $\langle\Phi_\Omega|\Phi_{\Omega'}\rangle$ ein scharfes Maximum bei $\Omega=\Omega'$ besitzt und in nullter Näherung durch $\delta(\Omega-\Omega')$ ersetzt werden darf, gilt

$$\langle\Phi_\Omega|\Psi\rangle\propto f(\Omega)$$

wie für eine Wellenfunktion.

2.1.3. Translationen. Der Symmetrieeigenwert ist hier der Impuls p, die irreduziblen Darstellungen sind $D_p(R)=e^{-ipR}$ und die Symmetrietransformation ist $U_R=e^{-iRP}$, P der Impulsoperator. Wegen der Galilei-Invarianz läßt sich $\Phi(p)$ ohne jede Näherung auf $\Phi(0)$ zurückführen.

Sei X der Schwerpunktsoperator, dann gilt

$$Q_p e^{ipX}=e^{ipX}Q_0 \tag{11}$$

und die Galilei-Invarianz

$$e^{-ipX}H\,e^{ipX}=H+P\,p/M+p^2/2M\,. \tag{12}$$

Damit berechnet man

$$\langle\delta\Phi|\,e^{-ipX}(H-E_p)Q_p e^{ipX}\,|\Phi\rangle=\langle\delta\Phi|\,(H+p^2/2M-E_p)Q_0\,|\Phi\rangle\,. \tag{13}$$

Ist also $\Phi(0)$ die Lösung für $p=0$, und ist ferner $\{\Phi\}$ invariant unter der Galilei-Transformation (d.h. $\{\Phi\}\equiv\{e^{ipX}\Phi\}$ und daher $\{e^{ipX}\delta\Phi\}_\Phi\equiv\{\delta\Phi\}_{e^{ipX}\Phi}$), so folgt

$$\Phi(p)=e^{ipX}\Phi(0)\,, \tag{14a}$$

$$E_p=E_0+p^2/2M\,. \tag{14b}$$

2.1.4. Teilchenzahl. Die Teilchenzahlerhaltung folgt aus der Invarianz gegen die Symmetrietransformation $U_\varphi=e^{-iN\varphi}$; N ist der Anzahloperator. Die Darstellungen sind $D_n(\varphi)=e^{-in\varphi}$ und $Q_n=\int d\varphi\,e^{-i(N-n)\varphi}$. Da N nur ganzzahlige Eigenwerte hat, kann die Integration auf das Intervall $(0,2\pi)$ beschränkt werden. Substituiert man $z=r\cdot e^{i\varphi}$, so geht Q_n über in

$$Q_n=\oint dz\,z^{n-N-1}\,. \tag{15}$$

Das ist BAYMANS Darstellung[4]. BCS-Wellenfunktionen bilden einen Spezialfall von Modellen, welche die Teilchenzahl verletzen.

3. Grenzfall starker Kopplung

Am Beispiel 2.1.2 wurde demonstriert, daß sich die Gewichtsfunktion $f(\Omega)$ im Grenzfall starker Symmetrieverletzung wie eine Wellenfunktion der mit der Symmetriegruppe verknüpften kollektiven Bewegung verhält. Starke Symmetrieverletzung war dabei definiert durch die Eigenschaft des Matrixelements $\langle\Phi|\, U_\Omega\,|\Phi\rangle$, an der Stelle $\Omega=0$ ein scharfes Maximum zu besitzen. Genauer soll nun verlangt werden, daß die Terme einer Potenzentwicklung der Darstellung $D_I^{K\,K'}(\Omega)$ wenigstens für einige I mit wachsenden Potenzen von Ω schnell kleiner werden, solange Ω innerhalb dieses Maximums liegt. Um diese Eigenschaft zu erfüllen, ist es keineswegs nötig, daß Φ einer stark asymmetrischen Dichtenverteilung entspricht. So genügt z.B. bei einem Vielteilchenzustand Φ eine leichte Asymmetrie in der Dichte, wenn nur hinreichend viele Teilchen dazu beitragen.

Um zu zeigen, daß $f(\Omega)$ nicht nur die in 2.1.2 diskutierte Eigenschaft der Wellenfunktion einer kollektiven Bewegung besitzt, sondern sich auch wie diese bestimmt, muß weiter vorausgesetzt werden, daß die Matrixelemente $\langle\Phi|\, H\,U_\Omega\,|\Phi\rangle$ und $\langle\delta\Phi|\,(H-E)\,U_\Omega\,|\Phi\rangle$ für alle $\delta\Phi$ ein „ähnliches" Maximum wie $\langle\Phi|\, U_\Omega\,|\Phi\rangle$ besitzen. Exakter formuliert sollen sich die Quotienten

$$\langle\Phi|\, H\,U_\Omega\,|\Phi\rangle/\langle\Phi|\, U_\Omega\,|\Phi\rangle$$

und

$$\langle\delta\Phi|\,(H-E)\,U_\Omega\,|\Phi\rangle/\langle\Phi|\, U_\Omega\,|\Phi\rangle$$

in Potenzreihen nach Ω entwickeln lassen, die über die Breite des Maximums von $\langle\Phi|\, U_\Omega\,|\Phi\rangle$ schnell konvergieren. Alle drei Voraussetzungen zusammen werden zu Ergebnissen führen, die Modellen „starker Kopplung" oder „adiabatischer Näherung" entsprechen. Diese Bezeichnung wird daher auch hier benutzt.

Beide zusätzlichen Voraussetzungen ergeben sich aus der ersten, wenn die Symmetrieverletzung durch viele Teilchen zustande kommt, H nur Zweiteilchenkräfte (oder Kräfte zwischen wenigen Teilchen) und $\delta\Phi$ nur Einteilchenanregungen (oder höchstens Anregungen weniger Teilchen) enthält. Die drei Voraussetzungen sind daher gewöhnlich in makroskopischen Situationen erfüllt. Während jedoch in makroskopischen Fällen keine Energieeigenzustände und daher auch keine Symmetrieeigenzustände beobachtet werden – ein makroskopischer Rotator ist z.B. ein „Drehimpulswellenpaket" mit zeitlich variierender Orientierung –, bietet etwa die Kernphysik Situationen, in denen die obigen

[4] BAYMAN, B.: Nuclear Phys. **15**, 33 (1960).

Voraussetzungen erfüllt sind, andererseits aber noch Drehimpulseigenzustände getrennt beobachtet werden.

Für das Gleichungspaar (10) läßt sich nun eine Störungsentwicklung angeben. Dazu setzt man die explizite Form (7) ein, erweitert mit $\langle\Phi|\,U_\Omega\,|\Phi\rangle$ und erhält eine Entwicklung nach Ω-Momenten von $\langle\Phi|\,U_\Omega\,|\Phi\rangle$. Beschränkung auf Momente n-ter Ordnung definiert die n-te Ordnung der Störungsentwicklung.

In nullter Ordnung ist $Q_I^{K\,K'}\propto\delta_{K\,K'}$ und (10) führt auf (1) zurück. Es ist im allgemeinen bequem, bei der Entwicklung von (10) mit $\langle\Phi_0|\,U_\Omega\,|\Phi_0\rangle$ statt mit $\langle\Phi|\,U_\Omega\,|\Phi\rangle$ zu erweitern, z. B. für $U_\Omega=e^{-iS\Omega}$:

$$\begin{aligned}&\langle\Phi|\,H\,U_\Omega\,|\Phi\rangle/\langle\Phi_0|\,U_\Omega\,|\Phi_0\rangle\\&\quad=\langle\Phi|\,H\,|\Phi\rangle-i\,\Omega[\langle\Phi|\,H\,S\,|\Phi\rangle-\langle\Phi|\,H\,|\Phi\rangle\langle\Phi_0|\,S\,|\Phi_0\rangle]-\\&\quad\quad-\tfrac{1}{2}\,\Omega^2[\langle\Phi|\,H\,S^2\,|\Phi\rangle-\langle\Phi|\,H\,|\Phi\rangle\langle\Phi_0|\,S^2\,|\Phi_0\rangle-\\&\quad\quad-2\langle\Phi|\,H\,S\,|\Phi\rangle\langle\Phi_0|\,S\,|\Phi_0\rangle+2\langle\Phi|\,H\,|\Phi\rangle\langle\Phi_0|\,S\,|\Phi_0\rangle^2]+\\&\quad\quad+\cdots.\end{aligned}\tag{16}$$

Falls insbesondere $\langle\Phi_0|\,U_\Omega\,|\Phi_0\rangle=\langle\Phi_0|\,U_{-\Omega}\,|\Phi_0\rangle$, so treten nur die geraden Terme der Entwicklung auf. In (16) verbleiben nur der erste Term und die beiden ersten Glieder des dritten Terms. In dem letzteren darf in zweiter Ordnung Φ durch Φ_0 ersetzt werden. Der erste Term wird in gleicher Ordnung (mit $\Phi=\Phi_0+\Delta_2\Phi+\Delta_4\Phi+\cdots$)

$$\langle\Phi|\,H\,|\Phi\rangle\approx\langle\Phi_0|\,H\,|\Phi_0\rangle+2\,\mathrm{Re}\,\langle\Delta_2\Phi|\,H\,|\Phi_0\rangle\,.\tag{17}$$

Aber wegen $\Delta_2\Phi\in\{\delta\Phi\}$ gilt $\langle\Delta_2\Phi\,|H|\,\Phi_0\rangle=E_0\langle\Delta_2\Phi\,|\Phi_0\rangle=0$ bei fester Normierung.

Das letzte Resultat kann verallgemeinert werden zu der Aussage, daß die n-te Korrektur der Wellenfunktion höchstens in $(n+1)$-ter Ordnung zur Energie beiträgt. Der Beweis ist wie oben und benötigt zusätzlich nur die Tatsache, daß sich die Elemente aus $\{\delta\Phi\}_{\Phi_{n-1}}$ und $\{\delta\Phi\}_{\Phi_0}$ höchstens um Korrekturen erster Ordnung unterscheiden. Bei Einführung von Lagrange-Parametern ist diese Aussage zu revidieren (vgl. 3.2).

Es ist jetzt auch offenbar, welche Bedingung an einen Operator A zu stellen ist, damit Matrixelemente bezüglich Ψ auf solche von Φ_0 zurückgeführt werden können: Sei $A=A_J^\mu$ ein irreduzibler Tensor unter der betrachteten Symmetriegruppe. Dann ist

$$\begin{aligned}\langle\Psi_{I'\,M'\,\alpha'}|\,A_J^\mu\,|\Psi_{I\,M\,\alpha}\rangle&=\sum_{K\,K'}c_K(I\,M\,\alpha)\overset{*}{c}_{K'}(I'\,M'\,\alpha')\times\\&\times\iint d\Omega\,d\Omega'\,\overset{*}{D}{}_I^{M\,K}(\Omega)\,D_{I'}^{M'\,K'}(\Omega')\langle\Phi'|\,U_{\Omega'}^+\,A_J^\mu\,U_\Omega\,|\Phi\rangle\end{aligned}\tag{18}$$

und es gilt

$$U_{\Omega'}^+\,A_J^\mu\,U_\Omega=\sum_{\mu'}\overset{*}{D}{}_J^{\mu\,\mu'}(\Omega')\,A_J^{\mu'}\,U_{-\Omega'+\Omega}\,.\tag{19}$$

Darf nun der Quotient $\langle \Phi' | A_J^{\mu} U_\Omega | \Phi \rangle / \langle \Phi_0 | U_\Omega | \Phi_0 \rangle$ wieder durch eine Potenzreihe ersetzt werden – wie es in Vielteilchensystemen für Einteilchenoperatoren (abgesehen von „spezifischen" Operatoren) der Fall ist –, so gilt in nullter Näherung [das ist für $\langle \Phi_0 | U_\Omega | \Phi_0 \rangle \propto \delta(\Omega)$]

$$\langle \Psi_{I' M' \alpha'} | A_J^{\mu} | \Psi_{I M \alpha} \rangle \propto \sum_{K K' \mu'} c_K(I M \alpha) \overset{*}{c}_{K'}(I' M' \alpha') \times$$

$$\times \left[\int d\Omega \overset{*}{D}{}_I^{M K}(\Omega) D_{I'}^{M' K'}(\Omega) \overset{*}{D}{}_J^{\mu \mu'}(\Omega) \right] \langle \Phi_0' | A_J^{\mu'} | \Phi_0 \rangle \tag{20}$$

$$= \sum_{K K' \mu'} c_K(I M \alpha) \overset{*}{c}_{K'}(I' M' \alpha') \left[\sum_\gamma \begin{pmatrix} I & J & I' & \gamma \\ M & \mu & M' & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & J & I' & \gamma \\ K & \mu' & K' & \end{pmatrix} \right] \langle \Phi_0' | A_J^{\mu'} | \Phi_0 \rangle ,$$

wobei die Klammersymbole die Clebsch-Gordon-Koeffizienten der Gruppe bezeichnen. γ ist der bei SU 2 nicht auftretende Entartungsparameter.

In höherer Näherung ergeben sich Verletzungen der durch den zweiten Clebsch-Gordon-Koeffizienten ausgedrückten K-Auswahlregeln, auch ohne daß „Bandenmischung" in den Modellzuständen Φ_0 eingeführt wird.

Symmetrieverletzende Modellzustände (insbesondere bezüglich Drehsymmetrie) ergeben sich z. B. in der Molekülphysik als Konsequenz des großen Massenverhältnisses von Kernen und Elektronen. Es ist daher auch nicht verwunderlich, daß Born und Oppenheimer[5] kollektive Bewegungszustände direkt durch Störungsentwicklung nach der kinetischen Energie der Kerne abzuleiten vermochten.

Peierls und Yoccoz haben vorgeschlagen, nicht nur Superpositionen von (durch Symmetrieverletzungen) entarteten Modellzuständen zu betrachten, sondern auch Superpositionen von „fast entarteten" Modellzuständen. Besitzen etwa $\Phi_0(x_i)$ und $\Phi_\alpha(x_i) = \Phi_0((1-\alpha)\, x_i)$ für kleine α fast den gleichen Energieerwartungswert, so soll nach diesem Vorschlag der Ansatz $\Psi = \int d\alpha\, f(\alpha)\, \Phi_\alpha$ betrachtet werden. Falls dann wiederum die Überlappfunktion $\langle \Phi_\alpha | \Phi_{\alpha'} \rangle$ ein scharfes Maximum bei $\alpha = \alpha'$ besitzt, ergeben sich kollektive Vibrationszustände. Dieser Ansatz dürfte Schwingungen von Molekülen und Festkörpern richtig beschreiben. Dagegen scheint für Vibrationszustände in Kernen dieser „makroskopische Grenzfall" nicht näherungsweise erfüllt zu sein. So haben etwa Ferrell und Visscher[6] die entgegengesetzte Annahme gemacht, daß die Gewichtsfunktion $f(\alpha)$ ein scharfes Maximum besitzt, in dessen Bereich $\langle \Phi_\alpha | \Phi_{\alpha'} \rangle$ entwickelt werden darf. Damit erklärt sich auch das frühzeitige Abbrechen der Vibrationsbanden in Kernen.

---

[5] Born, M., u. R. Oppenheimer: Ann. Physik (Leipzig) **84**, 457 (1927).

[6] Ferell, R. A., and W. M. Visscher: Phys. Rev. **102**, 450 (1956). Siehe auch die Arbeit von J. P. Amiet in diesem Band.

3.1. Beispiel – nichtsymmetrischer Rotator

Die Drehgruppe kann durch die Eulerschen Winkel beschrieben werden, d. h.

$$U_\Omega = e^{-iJ_z\varphi}\, e^{-iJ_y\vartheta}\, e^{-iJ_z\chi}.$$

Diese Darstellung ist bei $\vartheta=0$ singulär, da U_Ω hier nur von der Summe $\varphi+\chi$ abhängt. Zweckmäßig ersetzt man daher φ, ϑ, χ durch $\varphi, \vartheta, \gamma=\varphi+\chi$, um nur nach ϑ und γ zu entwickeln. Insbesondere ist nun

$$U_\Omega = e^{-i\vartheta(J_y\cos\varphi + J_x\sin\varphi)}\, e^{-i\gamma J_z}$$

und

$$D_I^{K\,K'}(\Omega) = e^{-i(K-K')\varphi}\, e^{-iK'\gamma}\, d_I^{K\,K'}(\vartheta).$$

Die Funktionaldeterminante ist gleich eins.

Wegen der vorauszusetzenden starken Symmetrieverletzung in γ und ϑ (für alle φ) enthält die Behandlung des nichtsymmetrischen Rotators in starker Kopplung nicht den symmetrischen Rotator als Grenzfall. Dieser wurde in einer früheren Arbeit[2] behandelt.

Es sollen nun die Koeffizienten c_K mit Hilfe von Gl. (10b) bestimmt werden. Diese Gleichung läßt sich schreiben als

$$\sum_{K'} (h_{K\,K'} - E\, n_{K\,K'})\, c_{K'} = 0, \tag{21}$$

$$h_{K\,K'} = \langle \Phi |\, H\, Q_I^{K\,K'} \,| \Phi \rangle, \tag{21a}$$

$$n_{K\,K'} = \langle \Phi |\, Q_I^{K\,K'} \,| \Phi \rangle \tag{21b}$$

oder

$$\sum_{K'} (\hat{h}_{K\,K'} - E\,\delta_{K\,K'})\, c_{K'} = 0 \tag{22}$$

mit

$$\hat{h}_{K\,K'} = (n^{-1}\, h)_{K\,K'}.$$

Es wird angenommen, daß $\langle \Phi_0 |\, U_\Omega \,| \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 |\, U_{-\Omega} \,| \Phi_0 \rangle$ und daß Φ_0 auf Hauptachsen transformiert ist. Daraus folgt $\langle \Phi_0 |\, \vec{J} \,| \Phi_0 \rangle = 0$ und $\langle \Phi_0 |\, J_i J_j \,| \Phi_0 \rangle = 0$ für $i \neq j$.

Man berechnet nun die Matrixelemente $\hat{h}_{K\,K'}$ mit Hilfe von (21a, b), (7) und der expliziten Form

$$d_I^{K\,K'}(\vartheta) = \sum_t \frac{\sqrt{(I+K)!\,(I-K)!\,(I+K')!\,(I-K'!)}}{t!\,(I+K-t)!\,(I-K'-t)!\,(t+K-K')!} \times \\ \times \left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{2I+K'-K-2t} \left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{2t+K'-K}. \tag{23}$$

Ersetzt man in der Näherung von PEIERLS und YOCCOZ Φ durch Φ_0, so verbleiben in niederster Ordnung nur Matrixelemente für $K'=K\pm 2$ und $K'=K$. Sie sind von der Form (abgesehen von K-unabhängigen Diagonalelementen)*

$$\hat{h}_{KK}=A[I(I+1)-K^2]+B\cdot K^2, \tag{24a}$$

$$\hat{h}_{K+2,K}=C\cdot\sqrt{(I+K+2)(I+K+1)(I-K)(I-K-1)} \tag{24b}$$

mit

$$A=\tfrac{1}{2}(A_x+A_y), \tag{25a}$$

$$B=A_z, \tag{25b}$$

$$C=\tfrac{1}{4}(A_y-A_x) \tag{25c}$$

und

$$A_i=\tfrac{1}{4}\sum_{k=x,y,z} F_k\cdot(\overline{q_k q_i}-\overline{q_k}\,\overline{q_i});\qquad i=x,y,z, \tag{26}$$

$$F_k=\langle\Phi_0|\,H J_k^2\,|\Phi_0\rangle-\langle\Phi_0|\,H\,|\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|\,J_k^2\,|\Phi_0\rangle. \tag{27}$$

Die q_i sind gegeben durch

$$q_x=\vartheta^2\sin^2\varphi, \tag{28a}$$

$$q_y=\vartheta^2\cos^2\varphi, \tag{28b}$$

$$q_z=\gamma^2=(\varphi+\chi)^2 \tag{28c}$$

und der Querstrich ist definiert durch

$$\bar{\alpha}=\int d\Omega\,\alpha(\Omega)\langle\Phi_0|\,U_\Omega\,|\Phi_0\rangle/\int d\Omega\langle\Phi_0|\,U_\Omega\,|\Phi_0\rangle. \tag{29}$$

Die Matrixelemente (24) bilden genau die Energiematrix des Kreisels[7], wenn die Größen A_i mit den (ebenfalls auf Hauptachsen gebrachten) Trägheitsmomenten Θ_{ii} in Verbindung gebracht werden durch $A_i=(2\Theta_{ii})^{-1}$.

3.2. Zusammenhang mit anderen Methoden

Sei $g(I_{op})$ eine beliebige Funktion der Casimir-Operatoren. Dann gilt $Q_I^{MK}\,g(I_{op})=Q_I^{MK}\,g(I)=g(I_{op})\,Q_I^{MK}$. Das Gleichungspaar (10a, b) ändert sich daher nicht, wenn H durch $H'=H+g(I_{op})$ und E durch $E'=E+g(I)$ ersetzt wird. Die Funktion $g(I_{op})$ mag dabei noch explizit vom Eigenwert I abhängen, d. h. $g(I_{op})=g_I(I_{op})$.

* Von weiteren Maxima der Überlappfunktion[2], etwa bei $\vartheta=\pi$, wird abgesehen.

[7] LANDAU, L. D., and E. M. LIFSCHITZ: Quantum mechanics S. 374ff. London: Pergamon Press 1958.

Andererseits sind jedoch die Bestimmungsgleichungen von Φ_0 (1) nicht gegen diese Ersetzungen invariant:

$$\langle \delta \Phi_0' | \left(H + g_I(I_{op}) - E_0'\right) | \Phi_0' \rangle = 0 . \tag{30}$$

H' führt daher auf eine modifizierte Störungsentwicklung. Insbesondere kann Φ_0' über eine explizite I-Abhängigkeit der Funktion $g_I(I_{op})$ von I abhängen.

Im Gegensatz zu Abschnitt 3 trägt die Korrektur der Zustandsfunktion $\Delta\Phi'$ nun auch in gleicher Ordnung zur Energie bei:

$$\begin{aligned} \Delta E(\Delta\Phi') &\approx 2\,\mathrm{Re}\,\langle \Delta\Phi' | H | \Phi_0' \rangle \\ &\approx 2\,\mathrm{Re}\,\langle \Delta\Phi_0' | \{E_0(\Phi_0') + g_I(I) - g_I(I_{0p})\} | \Phi_0' \rangle \\ &\approx \langle \Phi_0' | g_I(I_{0p}) | \Phi_0' \rangle - \langle \Phi | g_I(I_{0p}) | \Phi \rangle . \end{aligned} \tag{31}$$

Ersetzt man beispielsweise $g_I(I_{op}) = \lambda_I \cdot I_{op}$ und bestimmt λ_I durch die Bedingung $\langle \Phi_0' | I_{op} | \Phi_0' \rangle = I$, so ergibt sich zur Bestimmung von Φ_0' die Methode der Lagrange-Parameter. Für Translationen und bei Gültigkeit von Galilei-Invarianz konnte Gross[8] zeigen, daß bereits die nullte Näherung mit Lagrange-Parametern auf die Beziehungen (14a, b) führt. Damit ist es für diesen speziellen Fall gelungen, alle Beiträge höherer Ordnung zur Energie von I unabhängig zu machen.

Eine Wahl von $g_I(I_{op})$ entsprechend dem empirischen Spektrum – also z. B. für Rotationsbanden als $g(I_{0p}) = (2\Theta)^{-1}\,\vec{J}^2$ – führt in nullter Ordnung auf eine Methode von Lipkin[9].

---

[8] Gross, E. P.: Nuclear Phys. **14**, 389 (1960).

[9] Lipkin, H.: Ann. Phys. (N. Y.) **9**, 272 (1960).

Zeitschrift für Physik 202, 49–57 (1967)

On Corrections due to Higher-Order Electromagnetic Transitions in Nuclei

J. EICHLER

Hahn-Meitner-Institut für Kernforschung, Berlin

Received February 21, 1967

Beta and gamma transitions via virtual intermediate states may give small corrections to various physical effects. Beta-gamma and gamma-gamma angular correlations may receive contributions which are not symmetric around ninety degrees. Gamma rays following beta decay may have a small circular polarization. All these effects seem to be too small to be measurable at present or to interfere with parity experiments. Corrections to the spectrum shape factor of first-forbidden beta decays are discussed in view of the Bi^{210} (RaE) decay.

1. Introduction

An excited atomic state may decay by the simultaneous emission of two light quanta. This has been discussed by GOEPPERT-MAYER[1] in 1931. For nuclei one has to extend[2] the treatment to arbitrary multipole orders[3, 4] L, L' of the emitted gamma quanta by which the transition $i \to f$ proceeds via a virtual intermediate state n. The corresponding angular correlations and energy spectra have been discussed[3] as well as the occurrence of internal conversion processes[4]. Subsequently a remarkable experimental activity[5] arose with the aim to detect these processes, partly stimulated by early optimistic estimates[3]. As a result, we now know interesting upper limits in many cases, but there seem to be positive results only in very few instances.

In the present note we wish to point out that weak or electromagnetic decays via virtual intermediate states may, in principle, give rise to effects which might be interpreted as due to parity impurities in nuclear states. This is so, because non-resonant higher order processes (i.e. those due to virtual transitions) make it in general impossible in a sequential decay to assign a definite parity to an "intermediate state", since there is not just *one* intermediate state. Thus, defining a direction by the "first" decay, the "second" decay is not rigorously symmetric about 90° even

[1] GOEPPERT-MAYER, M.: Ann. Physics **9**, 273 (1931).

[2] SACHS, R. G.: Phys. Rev. **57**, 194 (1940).

[3] EICHLER, J., and G. JACOB: Z. Physik **157**, 286 (1959).

[4] EICHLER, J.: Z. Physik **160**, 333 (1960).

[5] For recent references see KNAUF, K., and H. SOMMER: Z. Physik **183**, 10 (1965). — SUTTER, G.: Ann. phys. **8**, 323 (1963).

if parity is conserved. Similarly, the gamma rays following a beta decay will be polarized. Clearly, it is essential that the intermediate states involved have a finite lifetime. Then we may look upon the corrections as due to the overlap of levels of different parity.

In sect. 2 we consider the effective transition amplitude and in sects. 3 and 4 we discuss a gamma cascade and a beta decay followed by a gamma decay. Sect. 5, finally, deals with corrections to forbidden beta spectra.

2. The Effective Transition Amplitude

If the parities of initial and final states are related by the condition $\pi_i \pi_f = (-)^{I_f - I_i}$ the effective transition operator for double gamma decays is well defined and independent of exchange interactions in the nuclear Hamiltonian. This statement corresponds to SIEGERT's theorem for single gamma transitions [6] and, in a similar way, is based on the requirement that the interaction

$$H\{A\} = H_0 + H_1\{A\} + \tfrac{1}{2} H_2\{A\} + \cdots \tag{1}$$

of the electromagnetic field with the nuclear system be gauge invariant. This leads to the conditions given by SACHS and AUSTERN [6]

$$H_1\{\nabla G\} = [g, H_0], \tag{2a}$$

$$H_2\{\nabla G\} = [g, [g, H_0]], \quad \text{etc.} \tag{2b}$$

where $G(\boldsymbol{r})$ is a scalar function and

$$g = i \sum_{a=1}^{A} e_a G(\boldsymbol{r}_a), \qquad (\hbar = c = 1). \tag{3}$$

In lowest order in kR ($k = \omega$... wave number of the gamma quantum, R... nuclear radius) the double gamma transition will involve only electric multipole matrix elements provided $\pi_i \pi_f = (-)^{I_f - I_i}$. In this case the vector potential can be written as the gradient of a scalar function

$$A^{(e)}_{LM} = \nabla G_{LM}. \tag{4}$$

Then the desired transition amplitude involves H_2 in first order and H_1 in second order perturbation theory. When writing down the sum over intermediate states $|n\rangle$ the condition (2a) together with Eq. (4) would yield the energy factors $(\omega_n - \omega_f)(\omega_i - \omega_n)$ in the numerator of the perturbation expression. This factor differs from $\omega \cdot \omega'$ (ω, ω' being the energies of the quanta actually emitted, with $\omega + \omega' = \omega_0 = \omega_i - \omega_f$) which might be expected from the analogy with single gamma transitions. It can be shown, however, that the part of the perturbation sum which

[6] SACHS, R. G., and N. AUSTERN: Phys. Rev. **81**, 705 (1951).

contains the difference between these two energy dependences just cancels the matrix element of the double commutator H_2. As a result we find the transition amplitude

$$T_{i\to f} \propto (\omega\cdot\omega')^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_n \frac{\omega\,\omega'\langle f|\,g_L(\omega')\,|n\rangle\langle n|\,g_{L'}(\omega)\,|i\rangle}{\omega_i-\omega_n-\omega}+\right.$$
$$\left.+\sum_n \frac{\omega\,\omega'\langle f|\,g_L(\omega)\,|n\rangle\langle n|\,g_{L'}(\omega')\,|i\rangle}{\omega_i-\omega_n-\omega'}\right\}, \tag{5}$$

where the lowest L, L' are determined by the angular momenta of the intermediate states n and $g_{LM}(\omega)\propto\omega^{L-1}\cdot r^L\cdot Y_{LM}(\hat{r})$ are the ordinary electric multipole operators.

In the special case of a simple model Hamiltonian containing no exchange interaction Eq. (5) has been obtained by GRECHUKHIN[7]. In this case the matrix element of H_2 and the corresponding term which can be split from the perturbation sum (and makes up the difference between the two energy dependences discussed above) are separately negligible. However, we know from the Thomas-Reiche-Kuhn sum rule for real nuclei[8] that exchange interactions will give large contributions to the double commutator H_2. The present derivation (given in similar form in ref.[6] for resonance fluorescence in the dipole approximation), on the other hand, does not depend on the form of the nuclear Hamiltonian H_0.

If initial and final states satisfy the relation $\pi_i\,\pi_f=(-)^{I_i-I_f+1}$ the leading single gamma transition of lowest multipolarity is magnetic. Then SIEGERT's theorem cannot be applied. Correspondingly $H_2\{A\}$ cannot be given in a model-independent form. In a simple single-particle model, however, $H_2\{A\}$ may be neglected[3], and the transition amplitude is given by Eq. (5) with one of the electric multipole operators being replaced by ω^{-1} times the corresponding (model-dependent) magnetic multipole operator. Thus the energy spectrum is in all cases, namely (EL, EL'), (EL, ML'), (ML, ML') given by[7]

$$S(\omega)\propto\omega^{2L+1}(\omega_0-\omega)^{2L'+1}+(\omega_0-\omega)^{2L+1}\,\omega^{2L'+1}, \tag{6}$$

provided the energy dependence of the denominator in Eq. (5) may be neglected.

3. Gamma-Gamma Cascades

If in a cascade transition $i\to n\to f$ (with the energies $\omega_1=\omega_i-\omega_n>0$, and $\omega_2=\omega_n-\omega_f>0$) all states involved have a definite parity the gamma-gamma angular correlation is expected to contain only even Legendre

[7] GRECHUKHIN, D. P.: Nuclear Phys. **35**, 98 (1962); **47**, 273 (1963); **62**, 273 (1965).

[8] See e.g. LEVINGER, T. S.: Nuclear photo-disintegration. New York: Oxford University Press 1960.

polynomials (aside from possible recoil corrections). Strictly speaking, this is correct if each of the gamma energies ω_1 and ω_2 can be assigned – at least in principle – to a definite nuclear transition. But this will, in general, not be possible, since second-order transitions give rise to a continuous gamma spectrum. A gamma quantum with the energy $\omega \approx \omega_1$ may not only originate from the transition $i \to n$, but as part of a slowly varying spectrum also from the transitions $i \to n' \to f$ (with $\omega_{n'} > \omega_i$) or from $n \to f$. The corresponding multipole operators may have different parities so that the interference leads to odd Legendre polynomials in the angular correlation although parity is not violated.

For simplicity, we confine ourselves to *one* intermediate state n' and pure multipole transitions. Furthermore only $i \to n'$ and $n' \to f$ are allowed to interfere. Let the leading cascade transition be

$$i \xrightarrow{(L_1 \tau_1)} n \xrightarrow{(L_2 \tau_2)} f,$$

{with $\tau = 0$ and 1 for magnetic and electric transitions, respectively} and the competing transition be

$$i \xrightarrow{(L_1' \tau_1')} n' \xrightarrow{(L_2' \tau_2')} f,$$

then the angular correlation can be calculated from Eq. (5), if the finite width of the intermediate state n is properly incorporated. Dropping small corrections to the *even* part of the correlation we obtain the unnormalized result

$$W(\vartheta, \omega) = \sum_{\nu = \text{even}} A_n(\omega)(2I_n+1)^{-1} F_\nu(L_1 L_1 I_i I_n) F_\nu(L_2 L_2 I_f I_n) P_\nu(\cos\vartheta) + \\ + \sum_{\nu} B_{n'}(\omega)(2L_1'+1)(2L_2'+1)\tfrac{1}{4}\left(1+(-)^{L_1'+L_2'+\tau_1'+\tau_2'+\nu}\right)^2 \times \\ \times \begin{pmatrix} L_1' & L_2' \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \nu \\ 0 \end{vmatrix}^2 \begin{Bmatrix} I_i & I_{n'} & L_1' \\ I_{n'} & I_f & L_2' \\ L_1' & L_2' & \nu \end{Bmatrix} P_\nu(\cos\vartheta), \tag{7}$$

where the brackets indicate Clebsch-Gordan coefficients and $9j$-symbols, respectively. Clearly, the interference of the transitions $i \to n'$ with $n' \to f$ gives rise to odd Legendre polynomials if $L_1' + L_2' + \tau_1' + \tau_2' = \text{odd}$. The coefficients are

$$A_n(\omega) = \omega\,\omega' \left\{ \frac{\omega'^{\,2L_2} \cdot \omega^{2L_1}}{(\omega_i - \omega_n - \omega)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_n^2} + \frac{\omega^{2L_2} \cdot \omega'^{\,2L_1}}{(\omega_i - \omega_n - \omega')^2 + \frac{1}{4}\Gamma_n^2} \right\} \delta^2_{L_1 \tau_1} \delta^2_{L_2 \tau_2} \tag{8}$$

and

$$B_{n'}(\omega) = 2(\omega \cdot \omega')^{L_1' + L_2' + 1} \times \\ \times \frac{(\omega_i - \omega_{n'} - \omega)(\omega_i - \omega_{n'} - \omega') + \frac{1}{4}\Gamma_{n'}^2}{\left[(\omega_i - \omega_{n'} - \omega)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_{n'}^2\right]\left[(\omega_i - \omega_{n'} - \omega')^2 + \frac{1}{4}\Gamma_{n'}^2\right]} \delta^2_{L_1' \tau_1'} \delta^2_{L_2' \tau_2'}. \tag{9}$$

The real multipole amplitudes $\delta_{L\tau}$ are connected with the corresponding matrix elements by

$$\delta_{L_1\tau_1}=\frac{1}{(2L_1+1)!!}\sqrt{\frac{L_1+1}{L_1}}\langle n\,\|\,\mathcal{M}(L_1\,\tau_1)\,\|\,i\rangle,\quad \text{etc.}, \tag{10}$$

where we have adopted the usual[9] convention for the multipole operators,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(EL,M)&=\sum_k e_k\, r_k^L\, i^L\, Y_{LM}(\hat{r}_k)\\ \mathcal{M}(ML,M)&=\frac{e}{2M_p}\, i^{L+1}\sum_k\left(g_{s\,k}\,\boldsymbol{s}_k+\frac{2}{L+1}\,g_{l\,k}\,\boldsymbol{l}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(r_k^L\, Y_{LM}(\hat{r}_k)\right),\end{aligned} \tag{11}$$

Denoting the energy resolution of the gamma counter by $\Delta\omega$ and integrating over the interval $\Delta\omega$ centered around the resonance of Eq. (8) we can use

$$\Gamma_n=8\pi\,\{(2I_f+1)/(2I_n+1)\}\,\omega^{2L_2+1}\,\delta^2_{L_2\tau_2}$$

to write the relative contribution of the odd terms as

$$\frac{B_{n'}}{A_n}\approx 8\,\frac{2I_f+1}{2I_n+1}\cdot\frac{\omega_1^{L_1'+L_2'-2L_1}\,\omega_2^{L_1'+L_2'+1}\,\Delta\omega}{(\omega_{n'}-\omega_n)(\omega_n-\omega_i+\omega_{n'}-\omega_f)}\cdot\frac{\delta^2_{L_1'\tau_1'}\,\delta^2_{L_2'\tau_2'}}{\delta^2_{L_1\tau_1}}. \tag{12}$$

A dimensional estimate shows that odd Legendre polynomials in the angular correlation are not likely to be found, even under very favourable conditions.

It may be amusing to consider the special case in which n' is identical with n and $L_1'=L_1$, $L_2'=L_2$ but $(L_1\,\tau_1)$ and $(L_2\,\tau_2)$ have different parities. Then, expanding the energies in Eqs. (8) and (9) around ω_1 and ω_2 and integrating over the resonance we obtain the estimate

$$\frac{B_n}{A_n}\approx\frac{\Delta\omega\,\Gamma_n}{\pi(\omega_1-\omega_2)^2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{L_2-L_1}\left\{(L_1+L_2+1)\,\frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{\omega_1\,\omega_2}-1\right\} \tag{13}$$

where $\Gamma_n\ll\Delta\omega\ll|\omega_1-\omega_2|$ is assumed. Eq. (13) reflects the fact that the assignment of nuclear transitions to gamma quanta becomes more difficult when the transition energies are approximately equal. Such an accidental indistinguishability may give rise to asymmetric angular correlations.

It is easy to work out more general cases. One might expect for instance to obtain larger effects from the interference of $i\to n$ with $i\to n'$ if $\pi_n=-\pi_{n'}$. This is not so. The energy ratio is again typically of the order

$$\Gamma_n\,\Delta\omega/[(\omega_n-\omega_{n'})(\omega_i-\omega_f)]\quad\text{or}\quad\Gamma_n\,\Gamma_{n'}/(\omega_n-\omega_{n'})^2.$$

[9] See e.g. ALDER, K., A. BOHR, T. HUUS, B. MOTTELSON, and A. WINTHER: Revs. Modern Phys. **28**, 432 (1956).

4. Gamma Rays following Beta Decay

There are two experiments involving beta decays, which are of considerable importance as a test on parity violation in nuclear states. (i) gamma quanta following a beta decay should be polarized if parity is violated, (ii) the beta-gamma angular correlation should contain a term proportional to cos ϑ. Both effects may appear not only when the intermediate state n is contaminated by a small amplitude with the "wrong" parity, but they may also appear if there is no well-defined intermediate state. The latter is the case if *virtual* transitions contribute, in which the virtual intermediate state n' has the opposite parity as n.

For definiteness, consider an initial state i which decays by a once-forbidden beta decay (end-point energy W_0) into the intermediate state n with spin I_n. Then n undergoes a gamma transition (energy ω_γ) of the multipole order $(L\tau)$ to the final state f. In competition there may be a virtual allowed or super-allowed transition into an energetically inaccessible state n' (with $I_{n'}=I_n$, $\pi_{n'}=-\pi_n$) which decays by $(L\tau')$ into f. The beta transitions are mediated by the matrix elements[10, 12]

$$\begin{aligned}\langle S\rangle &= -\xi\, C_A\, i\int(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})+C_A\int\gamma_5\\ \langle V\rangle &= \xi\, C_A\int(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\sigma})-\xi\, C_V\, i\int\boldsymbol{r}-C_V\int\boldsymbol{\alpha}\end{aligned}\tag{14}$$

for first-forbidden transitions (using the ξ-approximation for heavy nuclei, $\xi=\alpha Z/2R$) and by

$$\begin{aligned}\langle S'\rangle &= C_V\int 1\\ \langle V'\rangle &= C_A\int\boldsymbol{\sigma}\end{aligned}\tag{15}$$

for allowed transitions. In particular, we have in mind virtual Fermi transitions into the isobaric analogue state of the initial nucleus, in which case

$$\int 1=(N_i-Z_i)^{\frac{1}{2}}=(2T_{3i})^{\frac{1}{2}}.$$

We may also expect transitions to be favoured which lead to a "spin flip analogue state" generated by the operator

$$\sum_k \boldsymbol{\sigma}_k\,\tau_k^+.$$

Since the virtual transition gives rise to a continuous sharing of the energy between the lepton system and the gamma quantum one has to average over an interval $\Delta\omega$ centered around the resonance region taking into account the energy dependence W_0^5 and ω_γ^{2L+1} of lepton spectrum and gamma spectrum, respectively. Defining the polarization

[10] KRÜGER, L.: Z. Physik **157**, 369 (1957).

by $P=(N_R-N_L)/(N_R+N_L)$ one obtains in the familiar[10] way

$$P=2Q\frac{\langle V\rangle\langle V'\rangle+\langle S\rangle\langle S'\rangle}{\langle V\rangle^2+\langle S\rangle^2} \tag{16}$$

with

$$Q\approx\frac{\delta_{L\tau'}}{\delta_{L\tau}}\left\{\frac{\Delta\omega\,\Gamma_n}{2\pi(\omega_i-\omega_{n'}-W_0)}\left[\frac{2L+1}{\omega_n-\omega_f}-\frac{5}{W_0}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\,\frac{\Gamma_n\Gamma_{n'}}{(\omega_i-\omega_{n'}-W_0)^2+\frac{1}{4}\Gamma_{n'}^2}\right\}. \tag{17}$$

While

$$\Gamma_n=8\pi[(2I_f+1)/(2I_n+1)]\,\omega_\gamma^{2L+1}\,\delta_{L\tau}^2$$

is a purely radiative width, $\Gamma_{n'}$ will mainly be determined by the particle width if the state n' is in the continuum. Similarly as the polarization, we may obtain the beta-gamma angular correlation which, for heavy nuclei, is given by

$$W(\vartheta)=1+a\cos(\vartheta)$$

with

$$a=2Q\frac{v}{c}\,\frac{F_1(L\,L\,I_f\,I_{n'})}{\sqrt{3I_{n'}(I_{n'}+1)}}\times$$
$$\times\frac{\langle V\rangle\langle V'\rangle-(\langle V\rangle\langle S'\rangle+\langle V'\rangle\langle S\rangle)\sqrt{I_{n'}(I_{n'}+1)}}{\langle V\rangle^2+\langle S\rangle^2}. \tag{18}$$

Dimensional estimates may easily be derived from Eqs. (10) and (11) using $(\omega R)\approx 6.5\cdot 10^{-3}\,E_{\gamma\,\mathrm{MeV}}\cdot A^{\frac{1}{3}}$, but there is much uncertainty concerning the strength distribution of the Gamow-Teller matrix element $\langle V'\rangle$. For $L=1$ and reasonable values of the parameters it appears that polarization and anisotropy are several orders of magnitude smaller than the effects expected from parity violation. In particular, if the leading beta transition is strongly K-forbidden the multipole transition $(L\tau')$ in the competing transition will be hindered by the same degree of K-forbiddenness.

5. The Shape of Beta Spectra

First-forbidden beta spectra in heavy nuclei usually have an allowed shape. If, however, there are strong cancellations among the matrix elements, one may expect considerable deviations from the allowed shape, as for instance in Bi^{210}(RaE)[11]. Just in those cases one might ask whether virtual allowed beta transitions (e.g. transitions into the isobaric analogue state of the initial state*) followed by an electro-

* For β^+-transitions one might expect *first* a virtual electromagnetic transition into the analogue state corresponding to the final state and *then* a beta decay.

[11] DANIEL, H.: Nuclear Phys. **31**, 293 (1962).

magnetic transition may give measurable contributions to the decay. Then, the total energy E_0, available for the decay, has to be shared between the lepton system and the gamma quantum ω_γ. Let the decay rate of a usual allowed decay be written[12] as

$$\frac{d\lambda}{dW}=(g^2/2\pi^3)\,\xi_0\,F(Z,W)\,p\cdot W(W_0-W)^2 \tag{19}$$

with

$$\xi_0=C_V^2(\int 1)^2+C_A^2(\int \sigma)^2, \tag{20}$$

and p, W and $F(Z, W)$ being the electron momentum, energy and the Fermi function. Then, the beta decay accompanied by the emission of a gamma quantum (of multipole order L) proceeds with the probability

$$\frac{d^2\lambda'}{dW\,d\omega_\gamma}=(g^2/2\pi^3)\,\xi_0\,F(Z,W)\,p\,W(E_0-\omega_\gamma-W)^2\,\omega_\gamma^{2L+1}\times \times\frac{4\delta_{L\tau}^2}{(\omega_i-\omega_n-(E_0-\omega_\gamma))^2}. \tag{21}$$

Here, for convenience of writing, we have assumed, that only one intermediate state n contributes. If the gamma ray is not observed, we have to integrate over the gamma energy (neglecting ω_γ in the denominator) from $\omega_\gamma=0$ to $\omega_\gamma=E_0-W$ and thus obtain

$$\frac{d\lambda'}{dW}=(g^2/2\pi^3)\,\xi_0\,F(Z,W)\,p\,W(E_0-W)^2\,S'_L(W)\,\frac{4\delta_{L\tau}^2}{(\omega_i-\omega_n-E_0)^2}. \tag{22}$$

The spectrum correction factor is given by

$$S'_L(W)=\{(L+2)(2L+2)(2L+3)\}^{-1}\,(E_0-W)^{2L+2}. \tag{23}$$

The decay probability $\lambda'(W)$ has to be added to the leading first-forbidden decay probability, $\lambda(W)$, thus giving rise to a positive contribution in the low-energy part of the spectrum.

It is well known that the beta spectrum of $Bi^{210}(1^-\rightarrow 0^+)$ still presents some difficulties[12, 13], even when exact radial electron wave functions are used in the analysis[14], in that there are about 3 percent[14] more electrons in the low-energy portion of the spectrum[11] than can be accounted for in the customary theory of beta decay. The corrections can be most conveniently discussed if we divide Eq. (22) by a transition probability which has an allowed spectrum shape and an effective

[12] See e.g. KONOPINSKI, E. T., and M. E. ROSE, in: SIEGBAHN, Alpha-, beta- and gamma-ray spectroscopy, vol. 2. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1965.

[13] DEUTSCH, T. P., and P. LIPNIK: Nuclear Phys. **61**, 97 (1965).

[14] BÜHRING, W.: Nuclear Phys. **49**, 190 (1963).

strength $\xi_{\text{eff}} \approx C_V^2 \cdot 6.12 \cdot 10^{-5}$ which fits the measured[15] ft value, $\lg ft(\text{Bi}^{210}) = 8.0$. The ratio is

$$\varepsilon = \frac{d\lambda'/dW}{d\lambda/dW} = S_1'(W) \frac{4\delta_{E1}^2}{(\omega_i - \omega_{n'} - E_0)^2} \frac{\xi_0}{\xi_{\text{eff}}}$$
$$\varepsilon = \frac{1}{15} \frac{(E_0 - W)^4 \, \delta_{E1}^2}{(\omega_i - \omega_{n'} - E_0)^2} \frac{\xi_0}{\xi_{\text{eff}}}. \tag{24}$$

Assuming a pure Fermi transition into the isobaric analogue state, with $(\int 1)^2 = 44$ and $\omega_i - \omega_{n'} - E_0 \approx 18$ MeV we may estimate the ratio ε to be of the order of 10^{-3} for small electron energies. On the other hand, while the precise discrepancy between experiment and the usual beta decay theory depends somewhat on the particular choice of parameters the approximate deviation is of the order of a percent[14]. Thus it seems that the proposed correction is about one order of magnitude too small to account for the discrepancies.

Still, a more detailed analysis may be worthwhile. An enhancement of ε may be expected (i) if there is a "spin flip analogue state" with a large Gamow-Teller matrix element to the 1^- state in Bi^{210}, (ii) if there are sizable contributions from energetically near-lying intermediate states, (iii) if the giant dipole resonance in Po^{210} has large beta matrix elements to Bi^{210}. Actually, the dipole state in Po^{210} may have a large overlap with the analogue state of the $I = 1^-$ ground state of Bi^{210}, both states having a similar structure.

The author has benefited from comments by R. LIPPERHEIDE.

[15] Nuclear Data Sheets.

Zeitschrift für Physik 202, 58–69 (1967)

A Semi-Phenomenological Nuclear Optical-Model Potential

R. LIPPERHEIDE
Hahn-Meitner Institut für Kernforschung, Sektor Kernphysik, Berlin, West Germany

Received February 21, 1967

A new semi-phenomenological form of the nuclear optical-model potential for the description of the average elastic scattering of nucleons is proposed. It consists of an energy-independent, nonlocal "single-particle" term and a sum of energy-dependent, factorable terms exhibiting "intermediate structure".

1. Introduction

In a recent paper[1], a form of the generalized optical-model potential for elastic scattering was proposed which yields the unaveraged elastic scattering amplitude with full account of the narrow compound nucleus resonances.

The aim of the present paper is to derive from the results of ref.[1] an optical-model potential in the proper sense, which describes the elastic scattering amplitude averaged over some energy interval.

In sect. 2 the form of the generalized optical-model potential of ref.[1] is further specified. In sect. 3 the procedure of taking the energy average is explained. It is found that the proper optical-model potential is approximately equal to the energy average of the generalized optical-model potential. It is therefore also "causal" and satisfies a dispersion relation. The proper optical-model potential obtained in this way is further simplified in sect. 4. An attempt is made to reduce it to an intuitively appealing semi-phenomenological form with a limited number of parameters, so that it can be used in the numerical analysis of experimental data.

Sect. 5 contains some concluding remarks.

2. The Generalized Optical-Model Potential

The generalized optical-model potential proposed in ref.[1] has the following form (Eq. (6.43) of ref.[1]):

$$\mathscr{V}_E(x, x') = \mathscr{V}^{(0)}(x, x') + \mathscr{V}_E^{(\mathrm{direct})}(x, x') + \sum_i V_{iE}(x)\, V_{iE}(x')\, G_i(E). \quad (2.1)$$

Here $\mathscr{V}^{(0)}(x, x')$ is an energy-independent term representing the average interaction of the extra particle with the nucleons in the target nucleus

[1] LIPPERHEIDE, R.: Nuclear Phys. **89**, 97 (1966).

in the ground state (shell-model or Hartree-Fock potential). The sum of factorable terms arises from the coupling of the continuum to discrete bound or quasi-bound states below and in the continuum, labeled by the index i. The quantities $V_{iE}(x)$ characterize the strength of this coupling, and the coordinate-independent factors

$$G_i(E)=\left[E-E_i-\int_{\varepsilon_1}^{\infty}\frac{u_i(E')\,dE'}{E-E'+i\eta}\right]^{-1} \tag{2.2}$$

are weight functions with poles on the real E-axis for $E<\varepsilon_1$ (ε_1 is the lowest inelastic threshold) or below the real axis on unphysical sheets for Re $E>\varepsilon_1$. The sum in Eq. (2.1) contains many terms with strongly fluctuating weight functions $G_i(E)$, corresponding to the many narrow resonances in the elastic scattering cross section. Finally, the term $\mathscr{V}_E^{(\text{direct})}(x, x')$ represents the contribution from the direct coupling between elastic and inelastic continuum channels without the intermediary of the discrete states. It is expected to be small and weakly energy-dependent if a shell-model description is to be meaningful at all.

In keeping with our expectation that the direct coupling between the continua is not very important compared with the coupling to the discrete states, we may regard the quantities $V_{iE}(x)$ as real and energy-independent. This is seen from the shell-model calculation in ref.[1]. Neglecting in (6.40) of ref.[1] the second term on the right-hand side due to the direct coupling, we are left with the term $V_{i\mathbf{k}}^{(0)}$, which becomes in the coordinate representation (cf. (A.20) of ref.[1])

$$V_i(x)=\sqrt{A+1}\,\langle\Phi_i(0,\ldots,A),\ V\,g(1,\ldots,A)\rangle\,, \tag{2.3}$$

where Φ_i is the wave function of the discrete state, g is the wave function of the target nucleus, and V is the residual interaction,

$$V=\sum_{i<j}^{A}v_{ij}-\sum_{i=0}^{A}V_0(i) \tag{2.4}$$

(for further details see ref.[1]).

The shell-model interpretation of the scattering process can be carried further, following MAHAUX and WEIDENMÜLLER[2]. This leads to further insight in the structure of the quantity $V_i(x)$. The energies E_i in Eq. (2.2) are the eigenvalues of the total Hamiltonian in the space of the

[2] BRENIG, W.: Nuclear Phys. **13**, 333 (1959). — FANO, U.: Phys. Rev. **124**, 1866 (1961). — MACDONALD, W. M.: Nuclear Phys. **54**, 393 (1964); **56**, 636 (1964). — WEIDENMÜLLER, H. A.: Nuclear Phys. **75**, 189 (1966). — WEIDENMÜLLER, H. A., and K. DIETRICH: Nuclear Phys. **83**, 332 (1966). — WEIDENMÜLLER, H. A.: Z. Naturforsch. **21a**, 896 (1966). — MAHAUX, C., and H. A. WEIDENMÜLLER: Nuclear Phys. (in press).

bound shell-model states, i.e.

$$\langle \Phi_i, H\Phi_j \rangle = E_i \delta_{ij}, \tag{2.5}$$

where

$$\Phi_i = \sum_j O_{ij} \Phi_j^{(0)} + \sum_j O'_{ij} \Phi_j^{(1)}. \tag{2.6}$$

Here the $\Phi_j^{(0)}$ are bound two-particle-one-hole states ("doorway states"), while the $\Phi_j^{(1)}$ are the remaining more complicated bound shell-model states. If the target ground state g is taken as a pure shell-model state, then only the doorway-states $\Phi_j^{(0)}$ in the expansion of Φ_i will contribute to the matrix element $V_i(x)$ in Eq. (2.3), since V contains only one- and two-body forces. Hence

$$V_i(x) = \sum_j O_{ij} V_j^{(0)}(x), \tag{2.7}$$

where

$$V_j^{(0)}(x) = \sqrt{A+1}\, \langle \Phi_j^{(0)}(0, \ldots, A),\, V\, g(1, \ldots, A) \rangle. \tag{2.8}$$

The quantity O_{ij}^2 determines the distribution of the doorway state $\Phi_j^{(0)}$ over the states Φ_i ("$2p-1h$ strength function"). This distribution may be assumed to be of the form (cf. MAHAUX and WEIDENMÜLLER [2])

$$O_{ij}^2 = \frac{W_j d_j}{2\pi[(E_i - E_j^{(0)})^2 + W_j^2/4]}, \tag{2.9}$$

where d_j is the average spacing of the energies E_i near the energy $E_j^{(0)}$ of the doorway state $\Phi_j^{(0)}$ over a range of the order of the "spreading width" W_j of the doorway state. The latter is given by [3]

$$W_j = \frac{2\pi}{d_j} \overline{V_j^2}, \tag{2.10}$$

where $\overline{V_j^2}$ is the average of the square of the matrix element between the doorway state $\Phi_j^{(0)}$ and any of the more complicated states with energies in the neighborhood W_j of $E_j^{(0)}$. The spacing of the doorway states is generally larger than the spreading widths, so that the doorway states have practically no overlap with one another. Thus the generalized optical-model potential of Eq. (2.1) becomes

$$\mathscr{V}_E(x, x') = \mathscr{V}^{(0)}(x, x') + \mathscr{V}_E^{(\text{direct})}(x, x') + \sum_j V_j^{(0)}(x) V_j^{(0)}(x')\, g_j(E), \tag{2.11}$$

where

$$g_j(E) = \sum_j O_{ij}^2 G_i(E). \tag{2.12}$$

In Eq. (2.11) the number of factorable terms is now drastically reduced as compared to Eq. (2.1). Each factorable term corresponds to a doorway state labeled by j. Associated with each doorway state there are a large

[3] DANOS, M., and W. GREINER: Phys. Rev. **138**, B 876 (1965).

number of "compound states" labeled by i which give rise to as many narrow "resonance" terms in the energy-dependent coefficient $g_j(E)$ belonging to that doorway state (Eq. (2.12)). The generalization to overlapping doorway states is straightforward.

3. The Proper (Averaged) Optical-Model Potential

Following the interpretation of FESHBACH, PORTER, and WEISSKOPF[4], we define the optical-model potential in the proper sense* as that single-particle operator which yields the elastic scattering amplitude averaged over some energy interval rather larger than the average spacing of the narrow compound nucleus resonances. The problem is now how to smooth out the energy dependence of the generalized optical-model potential $\mathscr{V}_E(x, x')$ so that it becomes a potential $\mathscr{V}_E^{\text{opt}}(x, x')$ which yields the average of the scattering amplitude. We shall find approximately that $\mathscr{V}_E^{\text{opt}}(x, x')$ is simply the average of $\mathscr{V}_E(x, x')$.

(*i*) *Averaging Procedure.* We adopt the following prescription for taking the energy average of a function $F(E')$ over a range I about the energy E[5]:

$$\langle F(E)\rangle_I = \frac{I}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(E')\,dE'}{(E-E')^2+I^2}. \tag{3.1}$$

If $F(E)$ is analytic in the upper half E plane and vanishes there sufficiently strongly for $|E|\to\infty$, then

$$\langle F(E)\rangle_I = F(E+iI). \tag{3.2}$$

The scattering amplitude derived from the generalized optical-model potential of Eq. (2.11) is easily found to be (see also ref. [1], sect. 6 (i))

$$f_E(\hat{k}, \hat{k}') = f_E^{(0)}(\hat{k}, \hat{k}') + \sum_{jj'} \Gamma_{kj}^{(-)*}[A^{-1}(E)]_{jj'}\Gamma_{k'j'}^{(+)}. \tag{3.3}$$

Here $f_E^{(0)}(\hat{k}, \hat{k}')$ is the "nonresonant" scattering amplitude coming from the terms

$$\mathscr{V}^{(0)}(x, x') + \mathscr{V}_E^{(\text{direct})}(x, x'),$$

which is unitary inasmuch as one can neglect the antihermitian part of $\mathscr{V}_E^{(\text{direct})}(x, x')$. The quantities $\Gamma_{kj}^{(\pm)}$ are given by

$$\Gamma_{kj}^{(\pm)} = \Gamma_{-k\,j}^{(\mp)*} = \int V_j^{(0)}(x)\,\psi^{(0)(\pm)}(k, x)\,dx, \tag{3.4}$$

where

$$\psi^{(0)(\pm)}(k, x) = \psi^{(0)(\mp)*}(-k, x)$$

---

* In the following we shall, in contrast to ref. [1], reserve the term "optical-model potential" to the optical-model potential in the proper sense.

[4] FESHBACH, H., C. E. PORTER, and V. F. WEISSKOPF: Phys. Rev. **96**, 448 (1957).

[5] WIGNER, E. P.: Ann. of Math. **53**, 36 (1951); **55**, 7 (1952). — BROWN, G. E.: Revs. Modern Phys. **31**, 893 (1959).

are the scattering wave functions corresponding to

$$\mathscr{V}^{(0)}(x,x')+\mathscr{V}_E^{(\text{direct})}(x,x'),$$

and $k^2=2m\,E$. The quantities $\Gamma_{kj}^{(\pm)}$ are expected to be smoothly energy-dependent. Finally

$$\begin{aligned}A_{jj'}(E)&=A_{j'j}(E)\\&=[g_j(E)]^{-1}\,\delta_{jj'}-2m\int_0^\infty\frac{\Gamma_{k'j}^{(-)}\,\Gamma_{k'j'}^{(-)\,*}\,dk'}{k'^2-2m\,E-i\eta}-\sum_\alpha\frac{\Gamma_{\alpha j}\,\Gamma_{\alpha j'}}{E_\alpha-E},\end{aligned}\tag{3.5}$$

where the last term takes account of the bound states of

$$\mathscr{V}^{(0)}(x,x')+\mathscr{V}_E^{(\text{direct})}(x,x').$$

The last term of the scattering amplitude (3.3) is analytic in the upper half E plane and vanishes for $|E|\to\infty$ (cf. Eqs. (2.2), (2.12) and (3.5)). Its energy average is therefore obtained by replacing E by $E+i\,I$. Since the terms $f_E^{(0)}(\hat{k},\hat{k}')$ and $\Gamma_{kj}^{(\pm)}$ are smoothly energy-dependent and therefore unaffected by the averaging, we have

$$\langle f_E(\hat{k},\hat{k}')\rangle=f_E^{(0)}(\hat{k},\hat{k}')+\sum_{jj'}\Gamma_{kj}^{(-)\,*}[A^{-1}(E+i\,I)]_{jj'}\,\Gamma_{k'j'}^{(+)}.\tag{3.6}$$

On the other hand, consider the averaged generalized optical-model potential

$$\langle\mathscr{V}_E(x,x')\rangle=\mathscr{V}_{E+i\,I}(x,x')\tag{3.7}$$

($\mathscr{V}_E(x,x')$ is analytic in the upper half E plane!). The potential (3.7) differs from that of Eq. (2.11) only in that $g_j(E)$ is replaced by $g_j(E+i\,I)$. Solving the optical-model Schrödinger equation with this potential,

$$\left(T+\mathscr{V}_{E+i\,I}(x,x')-E\right)\tilde{\psi}_E=0,\tag{3.8}$$

we find for the corresponding scattering amplitude

$$\tilde{f}_E(\hat{k},\hat{k}')=f_E^{(0)}(\hat{k},\hat{k}')+\sum_j\Gamma_{kj}^{(-)\,*}[\tilde{A}^{-1}(E)]_{jj'}\,\Gamma_{kj'}^{(+)},\tag{3.9}$$

where

$$A_{jj'}(E)=[g_j(E+i\,I)]^{-1}\,\delta_{jj'}-2m\int_0^\infty\frac{\Gamma_{k'j}^{(-)}\,\Gamma_{k'j'}^{(-)\,*}\,dk'}{k'^2-2m\,E-i\eta}-\sum_\alpha\frac{\Gamma_{\alpha j}\,\Gamma_{\alpha j'}}{E_\alpha-E}.\tag{3.10}$$

Now $\tilde{A}_{jj'}(E)$ differs from $A_{jj'}(E+i\,I)$ only in that the integral and sum in Eq. (3.10) contain E instead of $E+i\,I$ in the denominator. However, since $\Gamma_{k'j}^{(-)}$ is expected to be a smooth function of $|k'|^2$ and $|E_\alpha-E|\gg I$ for the energies of interest, the integral and sum are almost independent of E (in fact the integral and sum are often simply replaced by $i\,\pi\,|\Gamma^{(-)}|^2=\text{const}^2$), and we can approximately set

$$\tilde{A}_{jj'}(E)=A_{jj'}(E+i\,I),\tag{3.11}$$

and therefore

$$\tilde{f}_E(\boldsymbol{k},\hat{\boldsymbol{k}}')=\langle f_E(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\rangle\,. \tag{3.12}$$

Thus we can define the optical-model potential as

$$\mathscr{V}_E^{\text{opt}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=\langle\mathscr{V}_E(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\rangle=\mathscr{V}_{E+iI}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\,. \tag{3.13}$$

In cases of physical interest one must be able to choose the averaging interval I such that in fact $\langle f\rangle_I$ and $\langle\mathscr{V}_E\rangle_I$ do not depend on it. This will be the case if the generalized optical-model potential and the unaveraged scattering amplitude have an energy dependence which can be characterized by two distinct structures, one of which varies over energy intervals small compared to some standard interval I_0 (fine structure) while the other varies over intervals much larger than I_0 ("intermediate" and "giant" structure). If I is chosen of the order of magnitude of I_0, the averages will indeed be largely independent of I. In our case, the fine structure is connected with the poles of the functions $G_i(E)$ (width $2\pi u_i$), and the intermediate structure is incorporated in the strength function O_{ij}^2 ("spreading width" W_j). These structures in the generalized optical-model potential (2.11) reflect themselves in similar structures in the second term of the scattering amplitude (3.3). However, the giant structure in the scattering amplitude is mainly of geometric origin, i.e. is due to the energy-independent term $\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ of the potential (2.11), and manifests itself in the first as well as the second terms of Eq. (3.3). There is also a "dynamic" giant structure connected with the coarse energy dependence of the generalized optical-model potential (2.11). However, this cannot be attributed so directly to a physical quantity as in the case of the intermediate structure and the $2p-1h$ strength function.

The result (3.13), which may seem somewhat surprising, is a consequence of the assumption of the existence of such a "hierarchy" of structures.

(*ii*) *Evaluation of* $g_j(E+iI)$. The fine structure in the generalized optical-model potential (2.11) comes from the presence of the "resonance" denominators $G_i(E)$. The width of the "resonances" in the optical potential is determined by (cf. Eq. (2.2))

$$\Gamma_i(E)=2\pi u_i(E)\,\Theta(E-\varepsilon_1)\,. \tag{3.14}$$

In the spirit of the previous remarks we assume that $2\pi u_i(E)\ll I$. For real energies $G_i(E+iI)$ is then a sufficiently smooth function of E, and we can replace the summation over i in $g_j(E+iI)$ [Eq. (2.12)] by an integration (neglecting $u_i(E)$):

$$g_j(E+iI)=\frac{1}{d_j}\int O_j^2(\lambda)\,\frac{d\lambda}{E+iI-\lambda}\,, \tag{3.15}$$

where

$$O_j^2(\lambda)=\frac{W_j d_j}{2\pi[(\lambda-E_j^{(0)})^2+W_j^2/4]}. \tag{3.16}$$

Since, for real E, the denominator of the integrand in Eq. (3.15) is analytic in the lower half λ-plane, the contour of the integral can be closed in the lower half-plane to yield

$$g_j(E+iI)=[E+iI-E_j^{(0)}+iW_j/2]^{-1}. \tag{3.17}$$

Now the physical choice for the averaging interval I is that it has a magnitude much smaller than the spreading width W_j. Then $g_j(E+iI)$ becomes independent of I and we find for the optical-model potential

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_E^{\mathrm{opt}}(x,x')=\mathscr{V}^{(0)}(x,x')+\mathscr{V}_E^{(\mathrm{direct})}(x,x')+\\ +\sum_j V_j^{(0)}(x)\,V_j^{(0)}(x')\,\frac{1}{E-E_j^{(0)}+iW_j/2}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

The fine structure of the optical-model potential has been averaged out, and the intermediate structure reflecting the behavior of the $2p-1h$ strength function has been made explicit.

It should be noted that the appearance of the width W_j in Eq. (3.18) is not a true inelastic effect, but a consequence of replacing the sum over discrete states by an integral [Eq. (3.15)]. This was made possible by the introduction of the term iI, i.e. by the averaging over the energy. Such averaging is not needed if the "compound resonances" overlap, i.e. if $\Gamma_i(E)\approx d$. If the width $2\pi u_i$ is not negligible, its average value over the spreading width should be added to W_j.

(*iii*) *Dispersion Relations.* The optical-model potential, as the average of the generalized optical-model potential, also has the causal property which was derived for the latter in ref. [1]. Indeed, if $\mathscr{V}_E$ has no singularities for $\mathrm{Im}\,E>0$, then $\mathscr{V}_E^{\mathrm{opt}}=\mathscr{V}_{E+iI}$ is analytic for $\mathrm{Im}\,E>-I$.

In the time-dependent description we find

$$\begin{aligned}\mathscr{V}^{\mathrm{opt}}(\tau)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iE\tau}\mathscr{V}_{E+iI}\,dE\\ &=\frac{1}{2\pi}e^{-I\tau}\int_{-\infty+iI}^{\infty+iI}e^{-iE\tau}\mathscr{V}_E\,dE\\ &=\frac{1}{2\pi}e^{-I\tau}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iE\tau}\mathscr{V}_E\,dE.\end{aligned} \tag{3.19}$$

The last step follows from the analyticity of the integrand in the upper half-plane. Thus

$$\mathscr{V}^{\mathrm{opt}}(\tau)=e^{-I\tau}\mathscr{V}(\tau)=e^{-I\tau}\mathscr{V}_1(\tau)\,\Theta(\tau)+\mathscr{V}_0\,\delta(\tau). \tag{3.20}$$

The retarded contribution in the optical-model potential is suppressed by the factor $e^{-I\tau}$ as compared to the generalized optical-model potential. The optical-model potential is in a sense "less retarded", in accordance with its smoother energy dependence in the stationary theory.

Since $\mathcal{V}_E^{\text{opt}}$ is analytic for Im $E > -I$, it satisfies a dispersion relation on the real axis. However, its antihermitian part is now given by

$$W_E^{\text{opt}} = I \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{W_{E'}\, dE'}{(E'-E)^2 + I^2}; \tag{3.21}$$

it is thus no longer zero below the inelastic threshold ε_1, but begins to become apprecialbe at energies about equal to $\varepsilon_1 - I$. (For energies E near the elastic threshold $E=0$ it is clearly meaningless to average over an interval I which would partly lie in the region of negative energies, and therefore we consider the optical-model potential only for energies E several times larger than I. The dispersion relation for the optical-model potential is therefore

$$V_E^{\text{opt}} = \mathcal{V}^{(0)} + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{W_{E'}^{\text{opt}}\, dE'}{E'-E}. \tag{3.22}$$

It would be tempting to test relation (3.22) by substituting in it the hermitian and antihermitian parts of the energy-dependent phenomenological optical-model potentials available in the literature. However, we must be aware of the fact that these potentials are usually local and therefore contain a spurious energy dependence to account for the nonlocality. Moreover, they are usually determined from the asymptotic part of the wave function, thus leaving room for possible energy-dependent ambiguities. Finally the antihermitian part is not known for a large enough range of energies to enable us to evaluate the integral in Eq. (3.22) reliably. If the local optical-model potentials turn out to satisfy Eq. (3.22), this would testify to their being causal. However, due to their spurious energy dependence, we do not expect this to be the case. The Perey-Buck potential with its energy-independent real and imaginary (except for a discontinuity at $E=0$) parts evidently does not satisfy Eq. (3.22), and is therefore not causal.

4. Semi-Phenomenological Form of the Optical-Model Potential

We should like to propose the optical-model potential (3.18) as a semi-phenomenological form to be used for fitting elastic scattering cross sections and for DWBA calculations. To serve this purpose, its separate terms must be given an explicit form which is physically appealing, and the number of parameters must be reduced as much as possible.

Let us therefore consider the terms on the right-hand side of Eq. (3.18) under this aspect.

The energy-independent "average interaction" $\mathscr{V}^{(0)}$ should be reasonably well represented by a finite shell-model potential of Saxon-Woods shape with parameters of the same order of magnitude as are currently used for the hermitian parts of the optical-model potential. Perhaps a better version, which takes account of the nonlocality of $\mathscr{V}^{(0)}$ due to the Pauli exclusion principle, would be to use a real non-local Perey-Buck type potential[6]. This potential does indeed seem to be able to represent a Hartree-Fock potential[7], and thus comes closest in form and meaning to $\mathscr{V}^{(0)}$. We have so far ignored spin- and Coulomb effects. We expect these to be most important in the term $\mathscr{V}^{(0)}$ rather than in the energy-dependent part of the optical-model potential. For lack of a detailed theory, we take the view that they are probably best taken into account separately by adding appropriate single-particle Coulomb and spin-orbit potentials to a spin-independent nuclear Hartree-Fock or shell-model potential:

$$\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \mathscr{V}_0 + V_{\text{Coulomb}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{l}\, V_{\text{s. o.}}, \tag{4.1}$$

where $\mathscr{V}_0$ is a real, energy-independent Saxon-Woods potential or a real Perey-Buck potential.

While PEREY and BUCK have used the form (4.1) with *complex* $\mathscr{V}_0$ as the entire optical-model potential, we propose to take $\mathscr{V}^{(0)}$ as a real function, to which energy-dependent and complex terms must be added to give the complete optical-model potential (3.18).

The next term in Eq. (3.18), $\mathscr{V}_E^{(\text{direct})}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$, is expected to be small and weakly energy-dependent. Beyond this nothing more can be said about it, and we therefore either neglect it or regard it as being included in $\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$, thereby neglecting its energy dependence and its non-hermitian part.

Finally, we have the factorable "resonance" terms in the optical-model potential. They give rise to the intermediate structure, while partly modifying also the giant structure in the cross sections, which is predominantly determined by the energy-independent term $\mathscr{V}^{(0)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$. Since the "resonance" terms alone make up the nonhermitian part of the optical-model potential, their magnitude may be estimated from the absorption cross section. Judging by the size of the absorptive part of the phenomenological potentials usually employed, we expect the strength of the "resonance" terms to be much (perhaps an order of magnitude) smaller than $\mathscr{V}^{(0)}$ for energies between zero and ~ 150 MeV. The

[6] PEREY, F. G., and B. BUCK: Nuclear Phys. **32**, 353 (1962).

[7] DAVIES, K. I. R., S. J. KRIEGER, and M. BARANGER: Nuclear Phys. **84**, 545 (1966).

"resonance" terms are to be classified according to total spin J and parity π; the residues $V_j^{(0)}(x)$, the positions $E_j^{(0)}$, and widths W_j of the "resonances" must be determined by fitting. This implies of course a rather large parameter space, which, however, seems to be inescapable if intermediate resonances are to be fitted in detail. If also the intermediate resonances are to be averaged out, i.e. if the averaging interval is chosen larger than the average spacing of these resonances, the number of parameters of this dispersion contribution may be reduced to a minimum. Then only the "dynamic" giant structure of the optical-model potential is left, but it is at present unclear how the dependence on the coordinates is to be simplified, i.e. how the sum of factorable terms can be approximated by a closed expression with a reasonably simple (nonlocal) coordinate dependence.

In any case, due to the factorability of the "resonance" terms it is not necessary to solve a new differential equation for any new choice of "resonance" parameters. The scattering amplitude determined from the potential (3.18) can be given in closed form:

$$f_E^{\text{opt}}(\hat{\boldsymbol{k}}, \hat{\boldsymbol{k}}') = f_E^{(0)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') + \sum_{jj'} \Gamma_{\boldsymbol{k}j}^{(-)*} [B^{-1}(E)]_{jj'} \Gamma_{\boldsymbol{k}'j'}^{(+)}, \tag{4.2}$$

$$B_{jj'}(E) = (E - E_j^{(0)} + i W_j/2)\,\delta_{jj'} - 2m \int_0^\infty \frac{\Gamma_{\boldsymbol{k}'j}^{(-)} \Gamma_{\boldsymbol{k}'j'}^{(-)*}\, d\boldsymbol{k}'}{\boldsymbol{k}'^2 - 2mE - i\eta} - \sum_\alpha \frac{\Gamma_{\alpha j} \Gamma_{\alpha j'}}{E_\alpha - E}, \tag{4.3}$$

where

$$f_E^{(0)}(\boldsymbol{k}, \hat{\boldsymbol{k}}') \quad \text{and} \quad \Gamma_{\boldsymbol{k}j}^{(\pm)}$$

[see formula (3.4)] are given by the solution of the Schrödinger equation with the energy-independent potential $\mathscr{V}^{(0)}$, which varies smoothly from nucleus to nucleus.

For the radial dependence of the quantities $V_j^{(0)}(x)$ one may also use a Saxon-Woods form factor or perhaps a shape which is peaked at the surface of the nucleus. The strength of the coupling potentials $V_j^{(0)}(x)$ must again be determined by fitting.

5. Conclusion

The main result of the present paper is the semi-phenomenological optical-model potential (3.18). It differs in several respects from the optical-model potentials now in use. It consists of two parts, a "shape part" $\mathscr{V}^{(0)} + \mathscr{V}^{(\text{direct})}$, and a "dispersive part" characterized by a sum of factorable "resonance" terms.

The shape part of the optical-model potential is hermitian and energy-independent except for antihermitian and energy-dependent contributions from $\mathscr{V}^{(\text{direct})}$, which, however, are expected to be small.

(Note that the amplitude corresponding to the "shape-part" of our optical-model potential is not identical with the shape-elastic amplitude in the customary sense[4].) It should be fairly well represented by a real, energy-independent Saxon-Woods well or a real Perey-Buck potential of about the same strength and shape as the ones used now. A real Perey-Buck plus spin-orbit potential for the single-particle (or giant) resonance producing part has been used in the bound-state calculations of MELDNER et al.[8], who find that it reproduces well the magic numbers.

Absorption and dispersion effects are taken account of by the "dispersive" part of the optical-model potential. As mentioned in ref. [1], dispersion and absorption are always coupled (namely, by a dispersion relation). Dispersion is so to speak the virtual counterpart of absorption, and inasmuch as dispersion causes an energy dependence of the optical-model potential, so does absorption. It is therefore only natural that the terms which give rise to absorption also give rise to the energy dependence of the optical-model potential.

One may prefer not to include the intermediate resonances in the optical-model potential, but to use the latter just to calculate the "shape-elastic" part of the scattering amplitude, and to add resonance terms in the scattering amplitude. This would correspond to a definition of the optical-model potential in a sense different from ours or that, e.g., of FESHBACH[9], whose potential has about as much structure as the scattering amplitude itself. To some extent this might seem to be a matter of taste, but such a procedure would actually require more parameters to be fitted, since the numerators of the resonance terms in the scattering amplitude are complex (while they are real in our optical-model potential), and the widths in the scattering amplitude include the elastic width (the widths of the "resonances" in our optical-model potential do not contain the elastic width; they are determined by the strength function O_{ij}^2, a quantity of physical interest by itself). While the optical-model potential discussed in the present paper is almost as complicated as the scattering amplitude to be calculated from it and therefore loses in intuitive appeal, it seems that nothing can be done about it. Intermediate structure simply requires many parameters, and, so we feel, these parameters are most economically and significantly put into the optical-model potential (from which, due to the factorability, the scattering amplitude can be calculated easily) rather than into resonance terms added ad hoc to a "potential" scattering amplitude.

We emphasize, however, that we regard the optical-model potential as more than just a convenient parametrization of the on-shell elastic

---

[8] MELDNER, H., G. SÜSSMANN, and W. ULRICI: Z. Naturforsch. **20a**, 1217 (1965).
[9] FESHBACH, H.: Ann. Phys. (N.Y.) **5**, 357 (1958).

scattering amplitudes. It yields the optical-model wave function in all regions of space and off-shell amplitudes (averaged over the energy) which may be used in the description of more complicated processes such as initial and final state interactions in stripping, etc.

Phenomenological optical-model potentials with resonance terms have been considered by DAVIS[10].

We close with a few remarks on the generality of our results. The general analytic properties of $\mathscr{V}_E^{\text{opt}}$ are rigorous (cf. ref. [1]). However, we have also established a number of more detailed features of the optical-model potential: The factorability of the energy-dependent terms, the identification of the intermediate structure with the behavior of the $2p-1h$ strength function, and the interpretation of $\mathscr{V}^{(0)}$ as a Hartree-Fock or shell-model potential. These properties have been derived on the basis of the shell model, in particular, on the assumption that the target nucleus is in a pure shell-model state (not necessarily a closed shell-model state)[1].

However, we are inclined to think that the semi-phenomenological *form* (3.18) is of more general validity, for the following reasons: (i) The factorability property is a general consequence of approximating the Green function used for eliminating the non-elastic channels by a kernel of finite rank, with corresponding "bound states embedded in the continuum"; these need not have a simple structure in terms of shell-model states. (ii) The concept of a doorway state hinges more upon the two-particle nature of the nuclear forces than on the assumption that the continuum consists of uncorrelated target states plus an extra nucleon (shell-model continuum state). Doorway states can in principle also be defined with respect to correlated continuum states – they are simply the set of states connected strongly to the incident continuum channel in first order in the "residual" interaction. The distribution of these doorway states over the "bound states embedded in the continuum" or "compound states" can again be characterized by a strength function, giving rise to intermediate structure in the optical-model potential. Finally, (iii) the energy-independent term $\mathscr{V}^{(0)}$ must represent the average interaction of the extra nucleon with the nucleons in the target. Instead of a shell-model or Hartree-Fock potential, we may then interpret it as the (antisymmetrized) expectation value of the nucleon-nucleus interaction in the exact target ground state.

Of course, the real test of the potential (3.18) is how well and how significantly it fits the experimental data. This is going to be investigated.

[10] DAVIS, R. H.: Conf. on Recent Progress in Nucl. Physics with Tandems, Heidelberg 1966.

Zeitschrift für Physik 202, 70–73 (1967)

Spinbestimmung des Grundzustandes von ^{10}B durch Mottstreuung

K. Bethge, G. Günther, K. R. Schubert und E. Speth
II. Physikalisches Institut der Universität Heidelberg

Eingegangen am 22. Februar 1967

From Mott scattering of ^{10}B on ^{10}B the ground state spin of ^{10}B is directly determined to be 3 in agreement with the theoretical prediction of the intermediate coupling model.

Die elastische Coulombstreuung identischer Teilchen, die sog. Mott-Streuung, gestattet es, den Spin von Teilchen und auch von komplexen Kernen direkt zu messen. Die Methode läßt sich jedoch nur auf solche Elemente anwenden, von denen sowohl ein Strahl beschleunigter Ionen als auch ein Target hergestellt werden können. Nachdem es gelungen ist, Bor-Ionen im Heidelberger Tandem-van-de-Graaff-Generator zu beschleunigen[1,2], kann der Spin des ^{10}B im Grundzustand nach der Methode der Mott-Streuung bestimmt werden.

^{10}B, einer der vier stabilen *uu*-Kerne, liegt in jenem Zwischenbereich leichter Kerne, in dem die Wechselwirkung der Kernkräfte zwischen Nukleonen in nicht gefüllten Schalen nicht gegenüber der Spin-Bahn-Wechselwirkung vernachlässigt werden kann[3]. Mit der Annahme einer intermediären Kopplung wurde für den Grundzustand des ^{10}B der Spin 3 berechnet[4,5].

Bei Streuprozessen, in denen gestreutes und rückgestreutes Teilchen nicht unterschieden werden können, müssen die Streuamplituden kohärent überlagert werden. Im differentiellen Wirkungsquerschnitt tritt durch Quadrieren der Amplitude ein Interferenzterm auf, der wesentlich vom Spin der Teilchen abhängt. Bei ganzzahligem Spin der Teilchen wie im Fall des ^{10}B, erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f(\theta)|^2+|f(\pi-\theta)|^2+\frac{2}{2s+1}\,\mathrm{Re}\big(f(\theta)\,f^*(\pi-\theta)\big).$$

---

[1] Günther, G., K. R. Schubert, and K. Bethge: Nuclear Phys. (im Druck).
[2] Hortig, G., O. Müller, K. R. Schubert u. E. Fluck: Z. Naturforsch. **21b**, 609 (1966).
[3] Goeppert-Mayer, M., and J. H. D. Jensen: Elementary theory of nuclear shell structure. New York: John Wiley and Sons 1955.
[4] Inglis, D. R.: Revs. Modern Phys. **25**, 390 (1953).
[5] Kurath, D.: Phys. Rev. **101**, 216 (1955).

Setzt man in diesen Ausdruck für $f(\theta)$ die Coulombstreuamplitude ein, so erhält man für nicht polarisierte Teilchen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{Z^2e^2}{4E}\right)^2\left\{\sin^{-4}\theta/2+\cos^{-4}\theta/2+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{2s+1}\sin^{-2}\theta/2\cos^{-2}\theta/2\cos(\eta\ln\mathrm{tg}^2\theta/2)\right\} \quad (1)$$

(Z Kernladungszahl, e Elementarladung, E, θ kinetische Energie bzw. Streuwinkel im Schwerpunktsystem.)

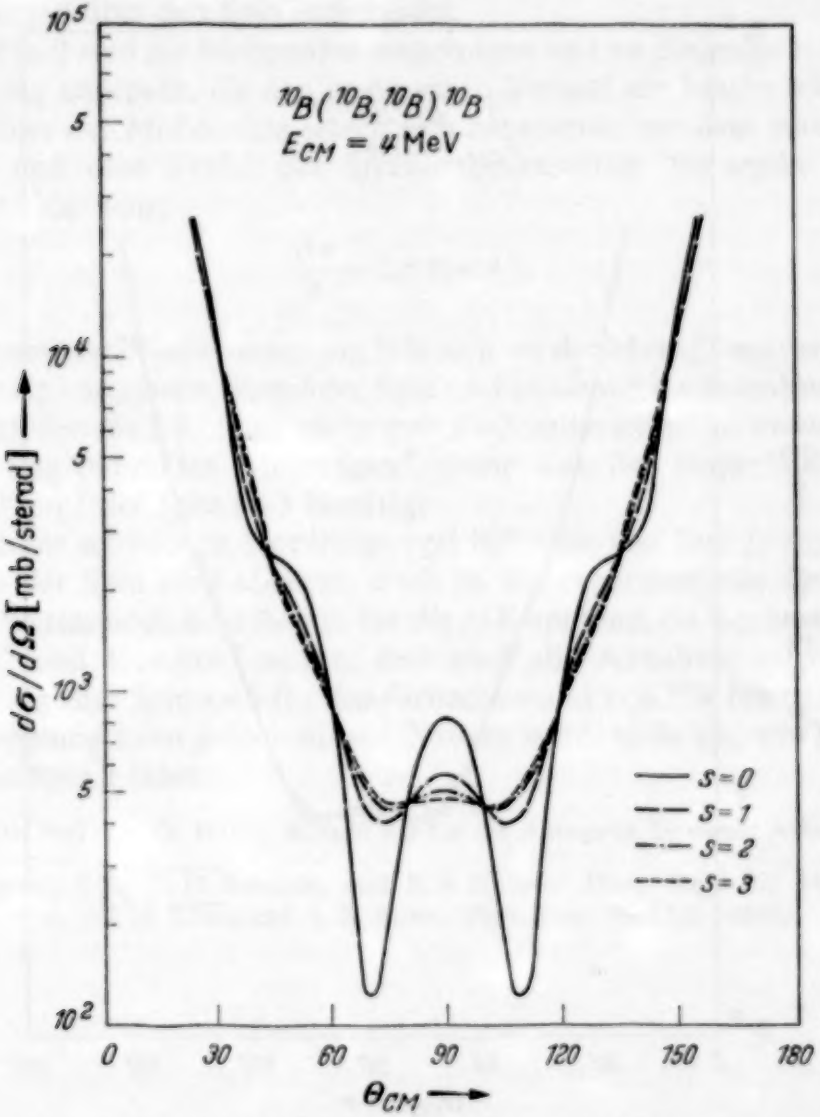


Fig. 1. Berechnete Winkelverteilungen der elastischen $^{10}B-^{10}B$-Coulomb-Streuung für Spinwerte $s=0$, 1, 2 und 3

In (1) beschreiben die beiden ersten Terme die Rutherfordstreuung für gestreutes und rückgestreutes Teilchen. Der Interferenzterm hängt vom Spin s und vom Sommerfeldparameter $\eta = Z^2 e^2/\hbar \cdot v_{rel}$ ab.

Mit wachsendem η nimmt die Frequenz der Interferenzen in den um 90° (c.m.) symmetrischen Winkelverteilungen zu, während mit wachsendem Spin s die Interferenzamplitude abgeschwächt wird. Für kleine Werte von s kann aus der Amplitude der Interferenzen auf den Spin der streuenden Teilchen geschlossen werden. In Fig. 1 sind für die Streuung von ^{10}B an ^{10}B bei 4 MeV (c.m.) die nach (1) berechneten Winkelverteilungen für die Spins $s=0, 1, 2$ und 3 gezeigt. Da Gl. (1) nur für reine Coulombstreuung gilt, wurden Winkelverteilungen bei 3 und 4 MeV (c.m.) gemessen ($E_{Coul}(^{10}B - ^{10}B) = 5{,}6$ MeV (c.m.)). Die

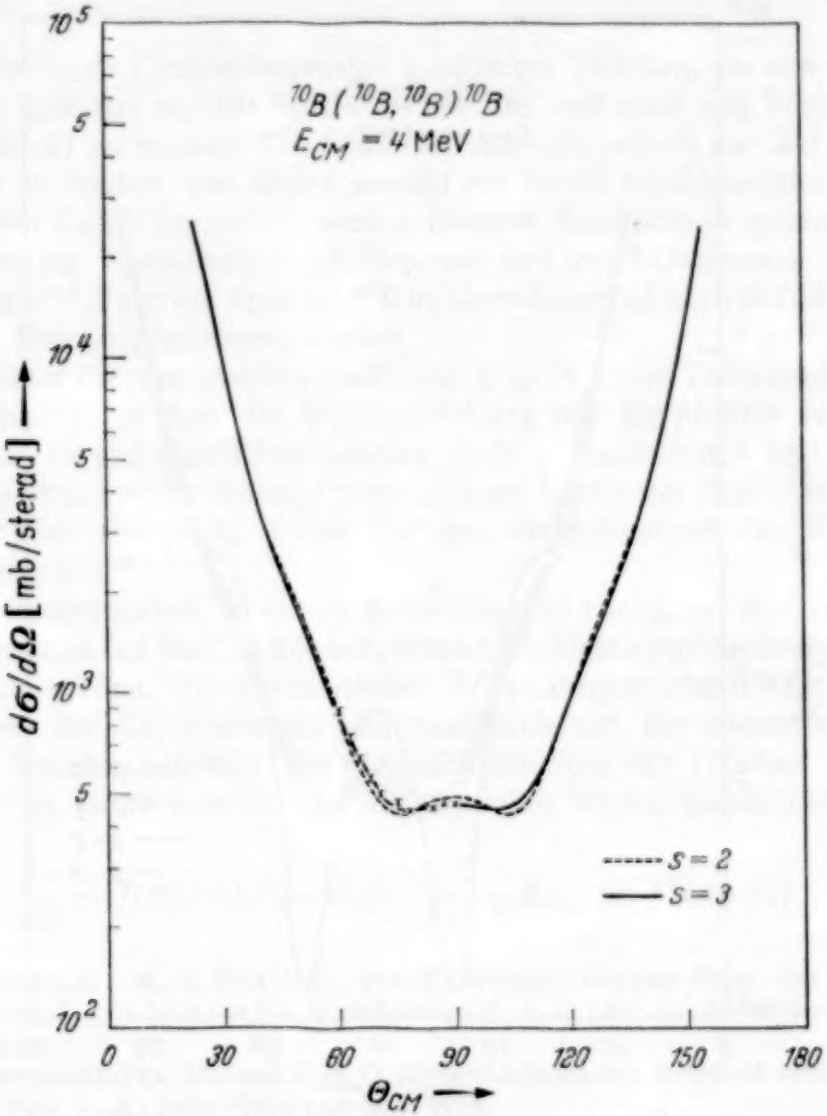


Fig. 2. Winkelverteilungen: I Meßpunkte, Rechnung für $s=3$ ———, Rechnung für $s=2$ ·····

Annahme reiner Coulombstreuung ist gerechtfertig, denn bei der ^{11}B–^{11}B-Streuung konnte gezeigt werden[1], daß für eine Winkelverteilung bei $E=4$ MeV (c.m.) die Streuung am Kernpotential noch vernachlässigt werden kann.

Die Fehler der Messung müssen so klein sein, daß nach Fig. 1 zwischen $s=2$ und $s=3$ unterschieden werden kann. Dies ist möglich, wenn der Gesamtfehler 4% unterschreitet.

Die Messungen wurden am Heidelberger Tandem-Van-de-Graaff-Beschleuniger mit einer früher beschriebenen Apparatur[1] ausgeführt. Wegen der Symmetrie der Winkelverteilungen um 90° (c.m.) brauchen diese nur im Winkelbereich $\theta \leqq 90°$ gemessen zu werden. Außerdem genügen relative Wirkungsquerschnitte, da schon die Form der Winkelverteilungen über den Spin entscheidet.

In Fig. 2 sind die Meßpunkte eingetragen und an diejenige berechnete Verteilung angepaßt, die den gemessenen Verlauf am besten wiedergibt. Die Fehler der Meßpunkte setzen sich zusammen aus dem statistischen Fehler und dem Fehler der Strahlstrommessung. Es ergibt sich ein Gesamtfehler von:

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = 2{,}5\% < 4\%.$$

Die gemessene Winkelverteilung läßt sich an die Mott-Streuquerschnitte nur für $s \geqq 3$ anpassen, womit der Spin $s=1$ eindeutig ausgeschlossen wird. Spins größer als 3 können nicht von $s=3$ unterschieden werden, doch wurde aus indirekten Messungen[6] sowie aus der Hyperfeinstrukturaufspaltung[7] der Spin $s=3$ bestätigt.

Mit der schwachen Nordheimregel läßt sich aus dem *jj*-Kopplungsschema der Spin $s=3$ ableiten, doch ist die experimentelle Bestätigung dieses Wertes noch kein Beweis für die *jj*-Kopplung, da Rechnungen von INGLIS[4] und KURATH[5] zeigen, daß auch die Annahme intermediärer Kopplung zum Spin $s=3$ für den Grundzustand von ^{10}B führt. Die reine LS-Kopplung kann jedoch ausgeschlossen werden, da sie, wie beim ^{6}Li, auf den Spin 1 führt.

Herrn Prof. Dr. O. HAXEL danken wir für die Anregung zu dieser Arbeit.

[6] PRUITT, J. S., C. D. SWARTZ, and S. S. HANNA: Phys. Rev. **92**, 1456 (1953).
[7] GORDY, W., H. RING, and A. B. BURG: Phys. Rev. **74**, 1191 (1948).

Zeitschrift für Physik 202, 74—88 (1967)

One-Dimensional Model of Deuteron-Potential Scattering

W. BIERTER*
Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg

K. DIETRICH
Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg
and
Max-Planck-Institut für Kernphysik, Heidelberg

Received February 23, 1967

A one-dimensional model of deuteron-potential scattering is considered as a simplified picture of a stripping process and is rigorously treated as a three-body system.

I. Introduction

One of the simplest and best known cases of a reaction between composite particles is the scattering of deuterons by complex nuclei. It is above all the stripping reaction $d(A, B)p$ or $d(A, C)n$ which has been extensively studied. It is known as a powerful tool of nuclear spectroscopy. Several theoretical approaches have been tried[1]: methods based on perturbation theory (Butler theory[2], distorted wave Born approximation[3]), dispersion theory of nuclear reactions[4], and — at high energies of the deuteron — impulse approximation[5] and the Glauber method[6]. The validity of these approximations, especially in the region of low and medium energies, is not clear.

As a first step in a more rigorous theory, one would like to understand the scattering of deuterons by a potential. This reaction exhibits already all the essential difficulties of a three-body problem, since the potential is playing the rôle of the third particle with infinite mass. Therefore, one might be tempted to conceive an even more drastic simplification of a stripping model, namely the case of a wall reflecting only one of the two constituents of the deuteron.

---

* Present address: Seminar für Theoretische Physik der Universität Basel.

[1] SITENKO, A. G.: Soviet Phys. Uspechi **2**, 195 (1959). (This article contains further references to the literature.)

[2] BUTLER, S.: Proc. Roy. Soc. (London) A **208**, 559 (1951).

[3] TOBOCMAN, W.: Phys. Rev. **94**, 1655 (1954).

[4] SHAPIRO, I. S.: Selected Topics in Nuclear Physics, Low Tatra Mountains 1962, IAEA Vienna.

[5] CHEW, G. F.: Phys. Rev. **80**, 196 (1950).

[6] GLAUBER, R.: Phys. Rev. **99**, 1515 (1955).

Even this problem, however, was shown to yield no simple analytical solution* [7].

In this work we consider a one-dimensional model of deuteron-potential scattering and determine the scattering amplitudes as solutions of the Lovelace-Faddeev integral equations [8, 9]. We represent all interactions by square well potentials and neglect the spins of the nucleons.

The theoretical procedure is outlined in chapter II and the results are given in chapter III.

II. Theory

We replace the potential by a third particle of finite mass and perform the limit to infinite mass in the final equations. Furthermore, throughout this paper, we choose, as a convenient frame of reference, the centre of momentum system (total momentum $P=0$). As we shall see, we have to know the T-matrices of all two-particle "subsystems" in order to obtain the scattering matrix of the three-particle case. More specifically, we have to approximate the subsystems in a way which is well suited for the solution of the three-particle problem. Therefore, in the first section of this chapter, we discuss the two-particle system.

II.1. The Two-Particle System

The T-operator for a subsystem is determined as the solution of the Lippmann-Schwinger equation:

$$\hat{T}(\hat{W})=\hat{V}+\hat{V}\,\hat{G}_0(\hat{W})\,\hat{T}(\hat{W}), \tag{2.1}$$

where $\hat{V}$ is the interaction, $\hat{G}_0$ is the free resolvent operator

$$\hat{G}_0(\hat{W})=\frac{1}{W-H_0} \tag{2.2}$$

and

$$\hat{W}=\hat{E}+i\varepsilon. \tag{2.3}$$

To avoid confusion, we denote all quantities referring to a two-particle system by a hat $\hat{}$. The Hamiltonian $\hat{H}_0$ is the kinetic energy of relative motion.

---

* An analytical solution can easily be found for the case of reflection of deuterons by an impermeable wall the deuterons being bound by a δ-function potential (private communication by J. H. D. JENSEN). Reflection by an impermeable wall, however, does not lead to break up.

[7] JOST, R.: J. Appl. Math. and Phys. (ZAMP) **6**, 316 (1955).

[8] FADDEEV, L. D.: Soviet Phys. JETP **12**, 1014 (1961); — DOKLADY **6**, 384 (1961); **7**, 600 (1963).

[9] LOVELACE, C.: Phys. Rev. **135**, B 1225 (1964).

In general, the Born series

$$\hat{T}(\hat{W})=\hat{V}+\hat{V}\hat{G}_0\hat{V}+\hat{V}\hat{G}_0\hat{V}\hat{G}_0\hat{V}+\cdots \tag{2.4}$$

does not converge because of the presence of bound states and resonances. More specifically, it can be shown [10] that the Born series fails to converge whenever there are eigenvalues $\eta_\nu(\hat{W})$ of the kernel $\hat{G}_0\hat{V}$ outside the unit circle ($|\eta_\nu(\hat{W})|>1$)

$$\hat{G}_0(\hat{W})\hat{V}\,|\hat{\Psi}_\nu(\hat{W})\rangle=\eta_\nu(\hat{W})\,|\hat{\Psi}_\nu(\hat{W})\rangle\,. \tag{2.5}$$

If an eigenvalue $\eta_\nu(\hat{W})$ passes through the unit circle as a function of $\hat{W}$, this is to be interpreted as the occurrence of a bound state ($\hat{W}<0$) or a "resonance" (Re $\hat{W}>0$) [10].

The eigenstates $|\hat{\Psi}_\nu(\hat{W})\rangle$ will be called "Weinberg-states". They satisfy the orthonormality conditions

$$\langle\hat{\Psi}_\nu(\hat{W}^*)|\,\hat{V}\,|\hat{\Psi}_\mu(\hat{W})\rangle=\delta_{\mu\nu}\,. \tag{2.6}$$

There is a denumerably infinite set of eigenvalues η_ν for each value of $\hat{W}$. We count the quantities η_ν in the order of decreasing modulus.

We want to approximate the interaction $\hat{V}$ by a finite sum of separable terms so that the remainder $\hat{V}^1$ is small and can be treated in perturbation theory:

$$\hat{V}=\hat{V}^1+\sum_\nu \hat{V}\,|\Gamma_\nu(\hat{W})\rangle\langle\tilde{\Gamma}_\nu(\hat{W})|\,\hat{V}\,. \tag{2.7}$$

It can then be shown [10] that by putting

$$\begin{aligned}|\Gamma_\nu(\hat{W})\rangle&=|\hat{\Psi}_\nu(\hat{W})\rangle\\ \langle\tilde{\Gamma}_\nu(\hat{W})|&=\langle\hat{\Psi}_\nu(\hat{W}^*)|\end{aligned} \tag{2.8}$$

("ideal choice"), the T-operator assumes the following form:

$$\hat{T}(\hat{W})=\hat{T}^1(\hat{W})+\sum_{\nu=1}^{N}\hat{V}\,|\hat{\Psi}_\nu(\hat{W})\rangle\,\frac{1}{1-\eta_\nu(W)}\,\langle\hat{\Psi}_\nu(\hat{W}^*)|\,\hat{V}\,, \tag{2.9}$$

where $\hat{T}^1$ is defined by the integral equation

$$\hat{T}^1=\hat{V}^1+\hat{V}^1\hat{G}_0\hat{T}^1\,. \tag{2.10}$$

Furthermore, if the summation in (2.7) is extended over all states $|\hat{\Psi}_\nu\rangle$ which correspond to eigenvalues $\eta_\nu(\hat{W})$ outside the unit circle ($|\eta_\nu|>1$) the Born series is sure to converge for Eq. (2.10).

Clearly, the "propagator" $(1-\eta_\nu)^{-1}$ becomes infinite or large whenever η_ν becomes unity (bound state) or nearly unity ("resonance").

[10] WEINBERG, S.: Phys. Rev. **131**, 440 (1963).

If the energy $\hat{W}=\hat{E}+i\varepsilon$ is such that one or a few bound states or resonances dominate the reaction, the perturbation $\hat{V}^1$ can be completely neglected[11] and the operator $\hat{T}$ can be approximated by the sum in Eq. (2.9):

$$\hat{T}(\hat{W})\approx\sum_{\nu=1}^{N}\hat{V}\,|\,\hat{\Psi}_\nu(\hat{W})\rangle\,\frac{1}{1-\eta_\nu(\hat{W})}\,\langle\hat{\Psi}_\nu(\hat{W}^*)|\,\hat{V}. \tag{2.11}$$

A practical solution of the three-particle problem can only be obtained if the two-particle T-operators are represented as in Eq. (2.11), i.e. by a finite number of pole terms.

The different terms in (2.11) describe the reaction as proceeding through bound states or "resonances" of the two-particle system. The energy dependence of the "vertex-functions" or, in other words, of the separable potentials (2.7), represent the modification due to the continuum.

II.2. The Three-Particle System

Adopting the customary notation we denote by $\delta=1, 2, 3$ the asymptotic states (channels) in which particle δ is free and the remaining two interact, and by $\delta=0$ the state of three free constituents.

Consequently, we write the interaction V_δ and the "channel Hamiltonians" H_δ as follows:

$$\begin{aligned} &V_\delta=V(x_\alpha-x_\beta);\quad \alpha,\beta\neq\delta;\quad \delta=1,2,3\\ &V_0=0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} H_\delta&=H_0+V_\delta=\sum_{i=1}^{3}\frac{p_i^2}{2m_i}+V_\delta\\ &=\frac{p_\delta^2}{2\mu_\delta}+\frac{q_\delta^2}{2\nu_\delta}+V_\delta. \end{aligned} \tag{2.13}$$

In the last equation, we use relative masses and momenta with the following definitions:

$$\begin{aligned} q_1&=\frac{m_3\,p_2-m_2\,p_3}{m_2+m_3} && \text{(and cyclic permutations)}\\ \mu_1&=\frac{m_1(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3} && \text{(and cyclic permutations)}\\ \nu_1&=\frac{m_2\,m_3}{m_2+m_3} && \text{(and cyclic permutations).} \end{aligned} \tag{2.14}$$

[11] GLÖCKLE, W., J. HÜFNER, and H. A. WEIDENMÜLLER: Nuclear Phys. A **90**, 481 (1967).

We denote the channel wave functions $|\Phi_{\delta m}\rangle$

$$H_\delta |\Phi_{\delta m}\rangle = E_m |\Phi_{\delta m}\rangle \tag{2.15}$$

by two indices: δ describes the "geometrical channel", while m represents all quantum numbers determining an asymptotic state. In our case, we have: for $\delta \neq 0$, $m = \mu, p_\delta, \hat{E}_\delta$;

$$\hat{E}_\delta = E - \frac{p_\delta^2}{2\mu_\delta}$$

(μ = internal quantum numbers of the interacting two-particle state); for $\delta = 0$, $m = p_\delta, q_\delta$.

Furthermore, for the sake of clarity, we shall always denote momenta of a final configuration by p'. The S- and T-matrix are then given by the well-known relations:

$$S_{\alpha n, \beta m} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta(n-m) - 2\pi i\,\delta(E_n - E_m)\,T_{\alpha n, \beta m}, \tag{2.16}$$

$$T_{\alpha n, \beta m} = \langle \Phi_{\alpha n} | U_{\alpha\beta} | \Phi_{\beta m} \rangle, \tag{2.17}$$

$$U_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma \neq \alpha} V_\gamma + \sum_{\gamma \neq \alpha} V_\gamma\, G(W) \sum_{\delta \neq \beta} V_\delta, \tag{2.18}$$

$$G(W) = G(E + i\varepsilon) = \frac{1}{W - H}. \tag{2.19}$$

The theoretical description of any reaction involving more than two particles is complicated by the fact that the kernel $G_0 V$ of the resolvent equation

$$G(W) = G_0(W) + G_0(W)\, V\, G(W) \tag{2.20}$$

is not square-integrable. Physically spoken, this is because the kernel $G_0 V$ contains disconnected graphs in which two particles interact and the third one is a spectator. Here we put

$$G_0 = \frac{1}{W - H_0} \tag{2.21}$$

and

$$V = \sum_{\gamma=1}^{3} V_\gamma. \tag{2.22}$$

As a consequence, Eq. (2.20) cannot be solved as it stands.

FADDEEV[8] succeeded in formulating the three-particle scattering problem in terms of integral equations, with a kernel being square-integrable if it is iterated once.

These equations can be formulated[9] in terms of the transition operators

$$U_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma \neq \alpha} V_\gamma + \sum_{\delta \neq \beta} U_{\alpha\delta}\, G_0\, T_\delta. \tag{2.23}$$

Here, T_δ, the T-operator in the asymptotic system δ, is defined by the Lippmann-Schwinger equation

$$T_\delta(W)=V_\delta+V_\delta G_0(W)\,T_\delta(W) \tag{2.24}$$

and is simply related to the $\hat{T}_\delta$-operator of the two interacting particles:

$$\langle p_\delta q_\delta|\,T_\delta(W)\,|p'_\delta q'_\delta\rangle=\delta(p_\delta-p'_\delta)\,\langle q_\delta|\,\hat{T}_\delta(\hat{W}_\delta)\,|q'_\delta\rangle \tag{2.25}$$

with

$$\hat{W}_\delta=W-\frac{p_\delta^2}{2\mu_\delta}. \tag{2.26}$$

It is seen from Eq. (2.23) that the transition operator $U_{\alpha 0}$ describing three-particle break up is obtained as a linear combination of the operators $U_{\alpha\delta}$ for $\delta\neq 0$. These transition operators satisfy a set of equations in which $U_{\alpha 0}$ does not occur. Thus, the amplitudes for three-particle break up can be easily obtained, if the amplitudes for all the other transitions are known (on and off the energy shell).

The only quantities of practical interest are the matrix-elements of $U_{\alpha\beta}$ between channel states $|\Phi_{\alpha m}\rangle$, i.e. the elements of the T-matrix.

The Lovelace-Faddeev equations (2.23) can be transformed into a set of integral equations for matrix-elements of $U_{\alpha\beta}$ if the operators T_δ are represented as a sum of propagator terms with separable residues as in Eq. (2.7). If we recur to the so-called "ideal choice" (2.11), we obtain, from (2.23), a set of $3N$ integral equations for the matrix-elements of $U_{\alpha\beta}$ between Weinberg states $|\Psi_{\alpha\mu p_\alpha\hat{W}_\alpha}\rangle$:

$$\begin{aligned}&X_{\alpha\mu,\beta\nu}(p_\alpha,p'_\beta)\\&\quad=Y_{\alpha\mu,\beta\nu}(p_\alpha,p'_\beta)+\sum_{\substack{\delta\neq\beta\\ \rho=1,\ldots,N}}\int_{-\infty}^{+\infty}dp_\delta\,X_{\alpha\mu,\delta\rho}(p_\alpha,p_\delta)\,K_{\delta\rho,\beta\nu}(p_\delta,p'_\beta).\end{aligned} \tag{2.27}$$

Here, the different quantities are defined as follows:

$$Y_{\alpha\mu,\beta\nu}(p_\alpha,p'_\beta)=\langle\Psi_{\alpha\mu p_\alpha\hat{W}_\alpha}|\sum_{\gamma\neq\alpha}V_\gamma\,|\Psi_{\beta\nu p'_\beta\hat{W}_\beta}\rangle, \tag{2.28}$$

$$K_{\delta\rho,\beta\nu}(p_\delta,p'_\beta)=\langle\Psi_{\delta\rho p_\delta\hat{W}_\delta}|\,V_\delta\,|\Psi_{\beta\nu p'_\beta\hat{W}_\beta}\rangle\,\frac{\eta_{\delta\rho}(\hat{W}_\delta)}{1-\eta_{\delta\rho}(\hat{W}_\delta)}, \tag{2.29}$$

$$\hat{W}_\delta=E+i\varepsilon-\frac{p_\delta^2}{2\mu_\delta}=\hat{E}_\delta+i\varepsilon, \tag{2.30}$$

$$X_{\alpha\mu,\beta\nu}(p_\alpha,p'_\beta)=\langle\Psi_{\alpha\mu p_\alpha\hat{W}_\alpha}|\,U_{\alpha\beta}\,|\Psi_{\beta\nu p'_\beta\hat{W}_\beta}\rangle. \tag{2.31}$$

These equations have the form of many-channel two-particle Lippmann-Schwinger equations with a kernel which, for complex energy, is square-

integrable without performing iterations. Of course, the Weinberg states for the asymptotic three-particle system are trivially related to the Weinberg states $|\hat{\Psi}\rangle$ of the two interacting particles:

$$\langle p'_\alpha q'_\alpha | \Psi_{\alpha\mu p_\alpha \hat{w}_\alpha}\rangle = \delta(p_\alpha - p'_\alpha)\langle q'_\alpha | \hat{\Psi}_{\alpha\mu\hat{w}_\alpha}\rangle . \tag{2.32}$$

Eq. (2.5) now reads as

$$\frac{1}{\hat{W}_\alpha - \frac{q_\alpha^2}{2\nu_\alpha}} V_\alpha |\hat{\Psi}_{\alpha\mu\hat{w}_\alpha}\rangle = \eta_{\alpha\mu}(\hat{W}_\alpha)|\hat{\Psi}_{\alpha\mu\hat{w}_\alpha}\rangle . \tag{2.33}$$

From Eq. (2.33) it can be seen that, at the energy of the bound deuteron the Weinberg state $|\Psi_{\alpha 1 p_\alpha \hat{w}_\alpha}\rangle$ is equal to the channel state $|\Phi_{\alpha m}\rangle$:

$$|\Psi_{\alpha 1 p_\alpha \hat{E}_\alpha}\rangle = |\Phi_{\alpha 1 p_\alpha \hat{E}_\alpha}\rangle . \tag{2.34}$$

Therefore, the physically interesting elements of the T-matrix are immediately obtained from the solution of the integral equations (2.27).

These become the equations given by LOVELACE[9], if the following approximations are made.

1. The operator T_δ in each channel δ is replaced by only one term* of Eq. (2.11).

2. The Weinberg state in each channel is replaced by the channel wave functions $|\Phi_{\alpha m}\rangle$, i.e. the energy dependence of the vertex-functions is neglected.

3. The numerator $\eta_{\delta 1}(\hat{W}_\delta)$ is put equal to unity and the denominator $(1-\eta_{\delta 1})$ is expanded to first order around the bound state energy $\hat{W}_\delta^0$:

$$\begin{aligned} 1-\eta_{\delta 1}(\hat{W}_\delta) &= -\left(\frac{d\eta_{\delta 1}}{d\hat{W}_\delta}\right)_{\hat{w}_\delta^0}(\hat{W}_\delta - \hat{W}_\delta^0) \\ &= -\left(\frac{d\eta_{\delta 1}}{d\hat{W}_\delta}\right)_{\hat{w}_\delta^0}(p_\delta^2 - p_\delta^{0\,2})\frac{1}{2\mu_\delta} . \text{**} \end{aligned} \tag{2.35}$$

We would like to emphasize that contrary to the pole approximation[9] the Weinberg method yields the correct threshold behaviour of propagators and vertex functions.

In order to treat the scattering of deuterons by a potential we just have to put the mass of the third particle equal to infinity

$$m_3 = \infty . \tag{2.36}$$

* In the case of particles with spin one has, of course, to distinguish singlet and triplet channels and to represent T_δ in each of them by one term.

** Here, LOVELACE also proposes some improved approximations.

The expressions (2.14) for the relative momenta and masses simplify and remain finite. Thus the method can be applied to deuteron-potential scattering as it stands. In this case, however, it will usually not be true that only one pole term in (2.11) dominates the reaction and the generalizations beyond the Lovelace method become essential. The validity of our method and of the approximations proposed by LOVELACE will be discussed in a subsequent paper[12].

III. Solution of the Integral Equations and Results

In the following, if we speak of the "potential" we always mean the interaction $V_1 = V_2$ and V_3 is the nucleon-nucleon interaction. For all these interactions we use square well potentials:

$$V_\delta = \begin{cases} -V_{0\delta} & \text{for} \quad -a_\delta < x_\delta < +a_\delta \\ 0 & \text{for} \quad |x_\delta| > a_\delta . \end{cases} \tag{3.1}$$

Then the eigenvalues $\eta_{\delta\rho}$ are obtained as the roots of the "eigenvalue equations"

$$z_{\delta\rho} \operatorname{ctg} z_{\delta\rho} - i\,\alpha_\delta a_\delta = 0 \quad \text{for states of positive parity,} \tag{3.2}$$

$$z_{\delta\rho} \operatorname{tg} z_{\delta\rho} + i\,\alpha_\delta a_\delta = 0 \quad \text{for states of negative parity,} \tag{3.3}$$

with

$$z_{\delta\rho} = \sqrt{\frac{2\nu_\delta}{\hbar^2}\left(\hat{E}_\delta + \frac{V_{0\delta}}{\eta_{\delta\rho}(E_\delta)}\right)}\, a_\delta \tag{3.4}$$

and

$$\alpha_\delta = \sqrt{\frac{2\nu_\delta}{\hbar^2}\hat{E}_\delta}\,. \tag{3.5}$$

The Weinberg states $|\hat{\Psi}_{\delta\rho}\rangle$ are simple functions so that the inhomogeneous terms $Y_{\alpha\mu,\beta\nu}(p_\alpha, p'_\beta)$ and the matrix-elements

$$\langle \Psi_{\delta\rho\, p_\delta \hat{w}_\delta^3} | V_\delta | \Psi_{\beta\nu\, p'_\beta \hat{w}_\beta} \rangle$$

can be calculated analytically.

Only the integration over p_δ is left in Eq. (2.27). Following the usual Fredholm procedure, this integral is transformed into a sum and the integration interval is limited to that range of p_δ which corresponds to values of the kernel $K_{\delta\rho,\beta\nu}$ appreciably different from zero. The solution is considerably complicated by the singularities of the kernel. There are two types of singularities:

1. The poles of the propagator $(1-\eta_{\delta\rho})^{-1}$ which occur at the energies of the bound states of the subsystems.

[12] BIERTER, W., and K. DIETRICH: To be submitted to Nuovo cimento.

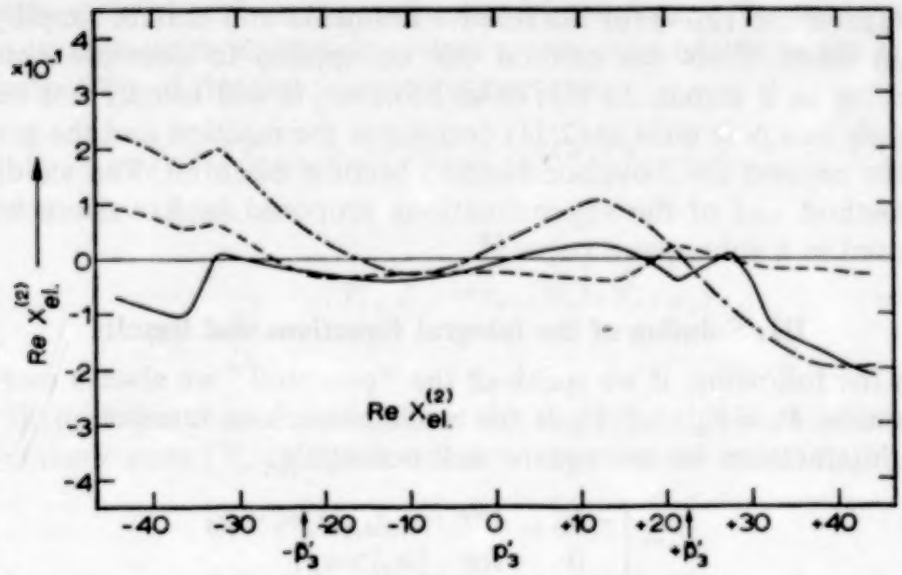


Fig. 1

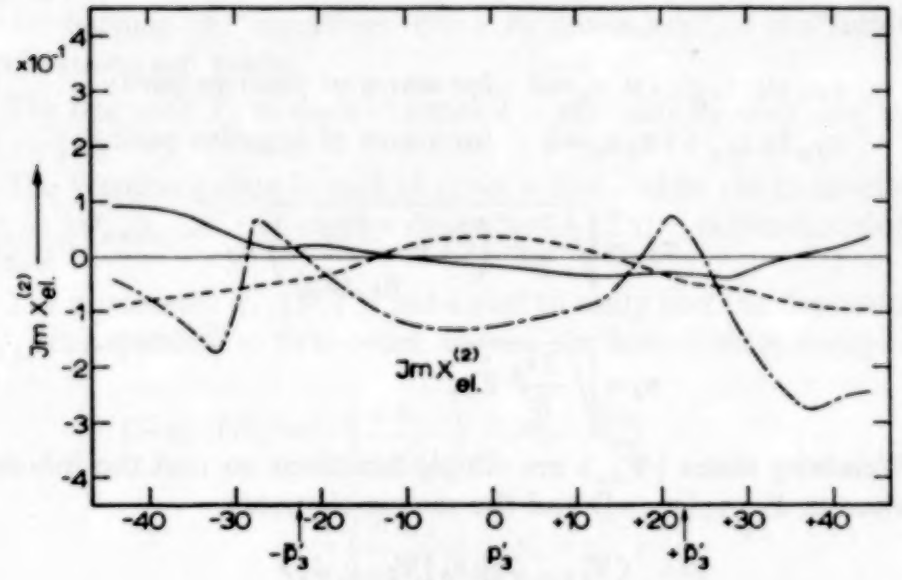


Fig. 2

Figs. 1–4. T-matrix elements for elastic scattering ($X^{(2)}_{el}$) and for stripping ($X^{(2)}_{str}$) for different values of the potential depth: $V_{01}=V_{02}=15$ MeV (——), $V_{01}=V_{02}=11$ MeV (-------), $V_{01}=V_{02}=7$ MeV (— · — · —) with a constant radius $a_1=a_2=2$ f. Total energy $E=-1$ MeV; $V_{03}=11.133$ MeV; $a_3=1$ f

2. The singularities of the matrix-elements

$$\langle \Psi_{\delta\,\rho\,p_\delta\,\hat{w}^2_\delta} | V_\delta | \Psi_{\beta\,\nu\,p'_\beta\,\hat{w}_\beta} \rangle$$

which, in the case of our one-dimensional model, turn out to be poles of first order in p_δ. These singularities are a consequence of the cuts in

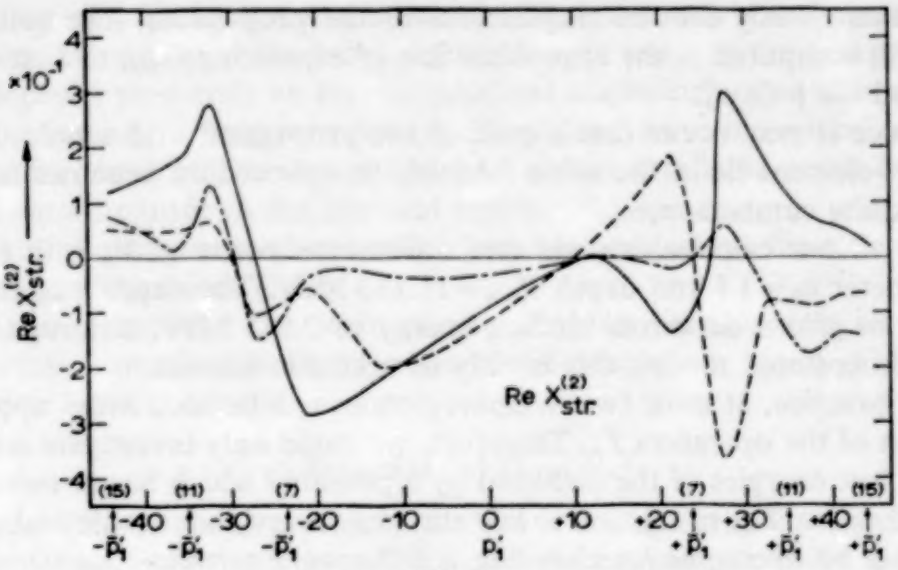


Fig. 3

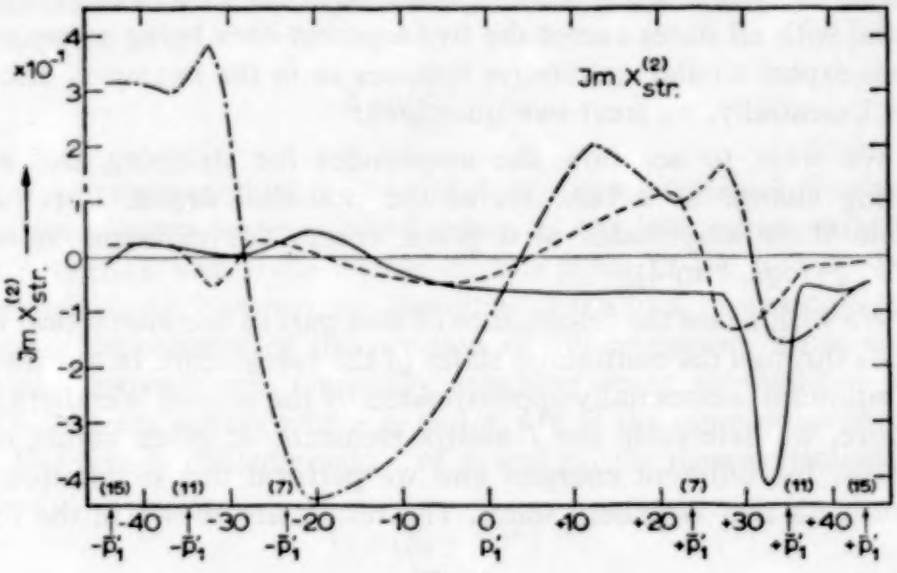


Fig. 4

the complex energy plane going from the bound state poles and the three-particle threshold to $+\infty$.

Whenever there is a singularity in an interval $\langle a, a+\Delta\rangle$ the energy limit $W \to E$ does no longer commute with the integration. In the case of singularities of the matrix-elements we have to perform the integration as follows:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{a+\Delta} dp_\delta \frac{f(p_\delta)}{p_\delta - p_\delta^0 - i\varepsilon} = \text{P} \int_a^{a+\Delta} dp_\delta \frac{f(p_\delta)}{p_\delta - p_\delta^0} + i\pi f(p_\delta^0), \tag{3.6}$$

and analogously for the singularities of the propagator. The principal value is computed in the approximation of expanding $f(p_\delta)$ to first order around the pole p_δ^0.

Since it may occur that a pole of the propagator and a pole of the matrix-element lie in the same interval, this procedure becomes technically quite cumbersome.

In all our calculations, we used a deuteron potential V_3 with radius parameter $a_3 = 1$ f and depth $V_{03} = 11.133$ MeV. The depth was chosen so as to give a deuteron binding energy of 2.213 MeV, although, in a one-dimensional model, this is only of aesthetic interest.

In practice, at most two Weinberg states can be used as an approximation of the operators T_δ. Therefore, we could only investigate scattering at low energies of the deuteron by a potential which has at most two bound states. The restriction to low energies is very undesirable and could possibly be overcome by choosing a different separable approximation of the subsystems. The restriction to a scattering potential of not more than 2 bound states is less serious, since we could as well treat a deeper potential with all states except the two topmost ones being occupied and we then expect similar qualitative features as in the examples discussed below. Essentially, we treat two questions:

1. We want to see how the amplitudes for stripping and elastic scattering change as a function of the potential depth. For this we calculate these amplitudes at a given energy for different values of $V_{01} = V_{02}$ (Figs. 1 to 4).

2. We wish to see the importance of that part of the interaction which proceeds through the continuum states of the subsystems. In our method, this continuum is essentially approximated by the second Weinberg state. Therefore, we determine the T-matrix elements, at given values of the potentials, for different energies and we perform this calculation with one and with two Weinberg states. The results are shown in the Figs. 5 to 8.

In all figures, the amplitudes $X_{31,\beta 1}(p_3, p'_\beta)$ are shown as functions of the final momentum p'_β. Here, p'_3 is, up to a sign, the momentum of the centre of gravity of the final deuteron, while p'_1 and p'_2 are the momenta of the free nucleon in the corresponding asymptotic states. In our one-dimensional model, there are only two "physical" values of the amplitudes in each of these channels. They are indicated in the figures by little arrows ($\pm \bar{p}'_\beta$).

Some of our calculations ($E = +1$ MeV)* are performed above the threshold for three-particle break up. We did not calculate the corre-

* We always give the values for the *total* energy E. The kinetic energy of the ingoing deuteron is obtained from it by adding the binding energy 2.213 MeV.

sponding amplitudes for this break up. The reason is a technical one: the physical region of the break up reaction is small at the energy used and depends sensitively on the stripping and scattering amplitudes at very small values of the final momenta p'_β. We did not have enough calculated points for these amplitudes in order to obtain a reliable result for the break-up amplitude in the physical region.

The following general statements can be made about the solution of the integral equations (2.27):

It turns out that the main contribution to the integrals in (2.27) originates from the vicinity of poles of the propagator $(1-\eta_{\delta\rho})^{-1}$ if, at the same time, the matrix-element

$$\langle \Psi_{\delta\rho\, p_\delta \hat{W}^*_\delta} | V_\delta | \Psi_{\beta\nu\, p'_\beta \hat{W}_\beta} \rangle$$

is large. This happens especially if there is a singularity of the matrix-element lying nearby. The positions of the propagator poles depends only on the energy of the corresponding bound state of the subsystem and the total energy E, i.e. the zeroes of $(1-\eta_{\delta\rho})$ occur at those values $p_{\delta\rho}$ for which we have

$$E=\frac{p^2_{\delta\rho}}{2\mu_\delta}+E_{\delta\rho}.$$

Here, $E_{\delta\rho}$ is the energy of the bound state ρ in subsystem δ. So the poles of the propagator occur at fixed values of the integration variable for given potentials and given energy E. The poles of the matrix-elements in the variable p_δ, however, are functions of the final momentum p'_β. The particular dependence of the position of the singularity on p'_β depends upon the interactions. Generally speaking most singularities of the matrix-elements appear where p_δ and p'_β are of the same order of magnitude. For largely different values of p_δ and p'_β, the matrix-elements go to zero as

$$[c+(p_\delta-p'_\beta)^2]^{-1}.$$

Thus, large values of the physical amplitudes are to be expected if the physical values of p'_β are comparable to the values $p_{\delta\rho}$ of one of the propagator poles. Therefore, the amplitude for stripping should be largest, if the binding energy of the stripped nucleon in the final state is comparable to the binding energy of the deuteron. These general considerations also hold for the three-dimensional case.

These arguments are borne out by the results given in the Figs. 1 to 4. Here, at a given value of the energy E, the T-matrices for elastic scattering and stripping are shown as a function of the final momentum p'_β for three different values of the potential depth $V_{01}=V_{02}=7$ MeV; 11 MeV; 15 MeV and a constant radius $a_1=a_2=2$ f.

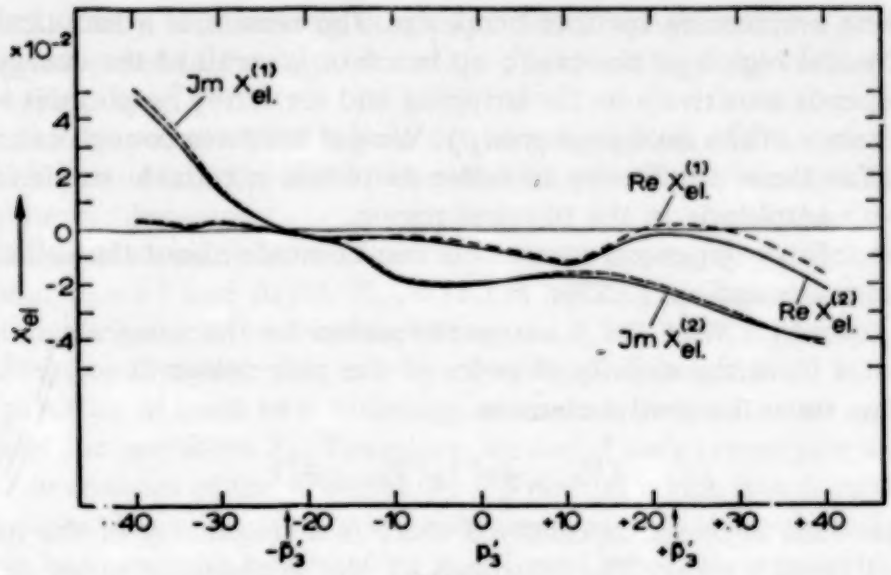


Fig. 5

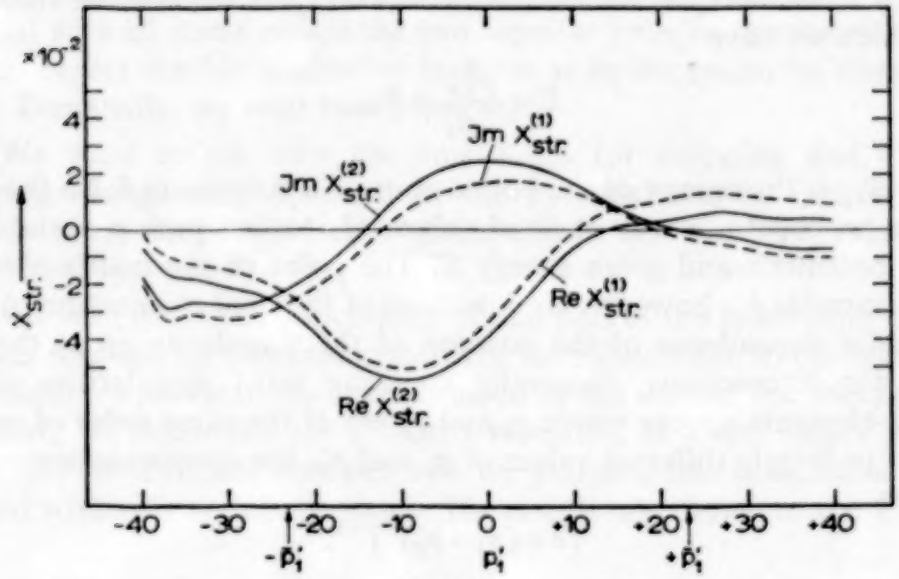


Fig. 6

Figs. 5 and 6. *T*-matrix elements for elastic scattering and stripping calculated with one ($X_{el}^{(1)}$, $X_{str}^{(1)}$; ------) and two Weinberg states ($X_{el}^{(2)}$, $X_{str}^{(2)}$; ———). Total energy $E=-1$ MeV; $V_{01}=V_{02}=V_{03}=11.133$ MeV; $a_1=a_2=a_3=1$ f

There is only one bound state in all these potentials and a resonance over them (index $^{(2)}$). In the case of $V_{01}=7$ MeV the binding energy of this state is almost equal to the binding energy of the deuteron. At $V_{01}=11$ MeV and $V_{01}=15$ MeV these binding energies are correspondingly larger; the potential with $V_{01}=15$ MeV contains a broad single-particle resonance near the energy of the ingoing deuteron. The calculated

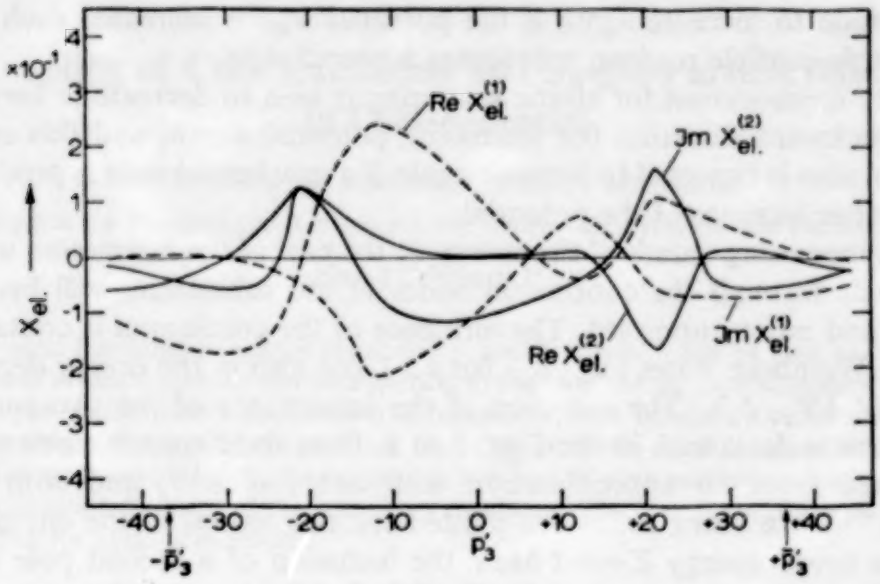


Fig. 7

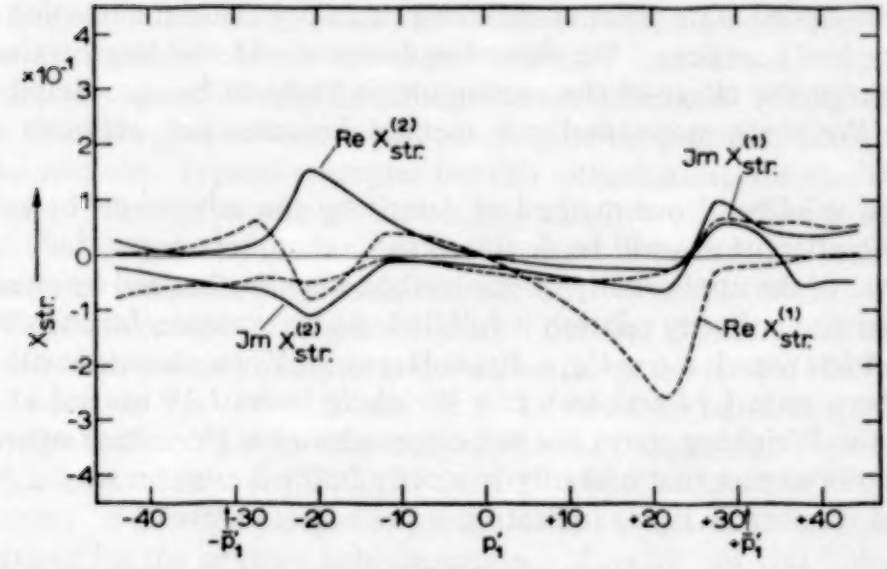


Fig. 8

Figs. 7 and 8. T-matrix elements for elastic scattering and stripping calculated with one ($X_{el}^{(1)}$, $X_{str}^{(1)}$; -------) and two Weinberg states ($X_{el}^{(2)}$, $X_{str}^{(2)}$; ——). Total energy $E=+1$ MeV; $V_{01}=V_{02}=V_{03}=11.133$ MeV; $a_1=a_2=a_3=1$ f

values of the T-matrix for stripping at the physical values of p'_β are largest in the case of $V_{01}=7$ MeV. For increasing potential depth the stripping cross-sections decrease in forward direction and increase in backward direction. The behaviour at $V_{01}=15$ MeV in contrast to the other two cases is likely modified by the presence of the single particle resonance. According to our general arguments, we expect the stripping

amplitude to increase again if the potential V_{01} is increased such that the single-particle resonance becomes a bound state.

The cross-section for elastic scattering is seen to decrease in forward and backward direction for increasing potential depth, and this cross-section also is expected to increase again if a new bound state is produced by further increase of the potential.

At increasing values of the energy E, the part of the interaction which proceeds through the continuum states of the subsystems will become more and more important. The influence of the continuum is contained in the Weinberg states $|\hat{\Psi}_{\alpha\mu}\hat{w}_\alpha\rangle$ for $\mu>1$ and also in the energy dependence of $|\hat{\Psi}_{\alpha 1}\hat{w}_\alpha\rangle$. The question of the importance of the two-particle continua is dealt with in the Figs. 5 to 8. Here the T-matrix elements as obtained from an approximation with one (index $^{(1)}$) and with two (index $^{(2)}$) Weinberg states are plotted for two values of the energy E. At the lower energy $E=-1$ MeV the inclusion of a second pole term modifies the results only very slightly, while at the higher energy $E=+1$ MeV this turns out to be very important. So we can conclude that the bound state poles of the subsystems dominate the reaction only at very low energies of the incoming deuteron. At still larger values of the energy the effect of the continuum is likely to be distributed over many Weinberg states and our method becomes impracticable as it stands.

The validity of our method of describing the subsystems by one or two Weinberg states will be discussed in a subsequent paper[12]. A rough estimate of the applicability of our method may be obtained by checking whether the unitarity relation is fulfilled. As an example, for the case of $E=-1$ MeV and $V_{01}=V_{02}=V_{03}=11.133$ MeV we obtained with one Weinberg state 1.14 and with two Weinberg states 1.19 instead of one. Since the Weinberg states are not eigenstates of a Hermitean operator, we cannot expect that unitarity is strictly fulfilled nor can we judge the second number (1.19) as indicating a less accurate result.

One of us (W. B.) would like to thank the Professors J. H. D. JENSEN and B. STECH for their kind hospitality at the Theoretical Institute in Heidelberg and the "Swiss National Fund" for a grant.

We like to thank the "Deutsche Forschungsgemeinschaft" for the financial support of the numerical calculations, which have been carried out on a IBM 7090 at the "Institut für Hochenergiephysik der Universität Heidelberg".

Zeitschrift für Physik 202, 89—96 (1967)

Coupling of Core Excitation and Single-Particle Motion in Odd-A-Nuclei

F. Beck, J. Birkholz, and P. Manakos
Institut für Theoretische Kernphysik der Technischen Hochschule Darmstadt

Received February 25, 1967

A physical fractional parentage expansion is presented which can be used to treat the coupling of single-particle and core motion in terms of the physical eigenstates of the core. The antisymmetry requirement is formulated in a subsidiary condition which allows diagonalization of the coupling Hamiltonian in the product space of the core and the extra-core particle. Restriction to a subset of core excitations leads to only approximate fulfillment of the subsidiary condition. The usefulness of the method is tested in the quasi-spin model.

1. Introduction

One of the earliest successes of nuclear shell theory was the understanding of closed shell $\pm$ one nuclei in terms of the single-particle motion of the extra-core nucleon[1]. For closed shells the core should be spherical symmetric and sufficiently "stiff" against excitations to supply nothing more than a spherical symmetric single-particle potential for the unpaired nucleon. Typical examples for this situation are the nuclei ^{17}O, ^{17}F and ^{15}O, ^{15}N whose ground states and low excitation properties should be determined by single-particle motion in the (s, d)-shell and single-hole motion in the p-shell, respectively.

While this is true as a "gross feature", detailed experimental analysis has shown that small but typical deviations from the simple shell model predictions do occur which can be understood as admixture of core excitation to the single-particle motion. For the Oxygen isotopes evidence for this is found in the splitting of the $1/2^+$ and $3/2^+$ levels of ^{17}O [2], the occurence of low-lying negative parity states in this nucleus[2], and $E2$ admixture for the neutron hole-transition $3/2^- \rightarrow 1/2^-$ in ^{15}O [3]. Another example of similar physical origin is the fine structure of the giant dipole resonance components in ^{16}O, ^{40}Ca and ^{208}Pb which cannot be explained by particle-hole-excitations upon a spherical symmetric core[4-6].

[1] Goeppert-Mayer, M., and J. H. D. Jensen: Elementary Theory of Nuclear Shell Structure, New York: John Wiley & Sons 1955.

[2] Salisbury, S. R., and H. T. Richards: Phys. Rev. **126**, 2147 (1962).

[3] Rose, H. J., and J. S. Lopes: Phys. Letters **22**, 601 (1966).

[4] Dolbilkin, B. S., V. I. Korin, L. E. Lazareva, and F. A. Nikolaev: JETP Letters **1**, 148 (1965).

[5] Wyckoff, J. M., B. Ziegler, H. W. Koch, and R. Uhlig: Phys. Rev. **137**, B 576 (1965).

[6] Kluge, G.: Z. Physik **197**, 288 (1966).

A quantitative description of these effects suffers from the fact that low-lying positive parity excitations of an even-even core are, in shell model language, rather complicated superpositions of many-particle-many-hole-excitations. Thus, attacking the problem of the neighbouring odd-A-nucleus in a straightforward manner is characterized by involved coupling and diagonalization procedures. For the positive parity states of ^{17}O an approximate solution has been given by Brown and Green [7].

In view of these difficulties, some authors [8, 9] prefer an expansion in terms of physical core states which simplifies the treatment considerably, especially if special model descriptions for the core excitations are employed (e.g. collective model, quasi-boson-model). Since one expands into a product space of single-particle and core motion, the "blocking effect", i.e. the restriction of the single-particle states due to the Pauli exclusion principle is not taken into account. Especially for light nuclei this neglect may become serious.

In the following we develop a scheme which still works in a product space of single-particle and core motion and which employs physical core excitations. We show that the Pauli principle can be taken into account by a subsidiary condition which contains one-particle density matrix elements between core states. Mathematically this scheme is very similar to the well known fractional parentage expansion. While the usual fractional parentage expansion, however, answers the question which fathers belong to a given son, we select a certain class of fathers and look what physical sons they produce ("physical fractional parentage"). Since, by restriction to the low-lying core excitations alone, the subsidiary condition can be fulfilled only approximately, we test the usefulness of the formulation in a simple, exactly soluble model (Chap. 4).

2. Transformation of One- and Two-Particle Operators

In order to simplify the formalism we start by introducing the following notations:

E	the space of all one-particle states,
E_A	the space of all *antisymmetric* A-particle states,
$\{\|k\rangle\}$	an orthonormal basis of E,
$\{\|N\rangle\}$	an orthonormal basis of E_A,
F	the tensor product of E and E_A,
$\|k \otimes N\rangle$	an element of F.

[7] Brown, G. E., and A. M. Green: Nuclear Phys. **75**, 401 (1966).

[8] Goswami, A., and A. I. Sherwood: Nuclear Phys. A **91**, 64 (1967).

[9] Ahrenhövel, H., D. Drechsel, W. Greiner, and J. B. Seaborn: Series of preprints, University of Frankfurt/M. 1966/67.

Employing the usual Fermion creation and annihilation operators we define linear mappings

$$\mathscr{A}=\frac{1}{\sqrt{A+1}}\sum_{k,N} a_k^+ \,|N\rangle\langle k\otimes N| \tag{1a}$$

and

$$\tilde{\mathscr{A}}=\frac{1}{\sqrt{A+1}}\sum_{k,N}|k\otimes N\rangle\langle N|\, a_k \tag{1b}$$

from F in E_{A+1} and E_{A+1} in F, respectively*. $\mathscr{A}\tilde{\mathscr{A}}$ is the identity operator in E_{A+1}

$$\mathscr{A}\,\tilde{\mathscr{A}}=1\,. \tag{2}$$

On the other hand the operator Γ defined by

$$\Gamma=\tilde{\mathscr{A}}\,\mathscr{A} \tag{3}$$

is evidently the antisymmetrizer in F, that is, Γ is the orthogonal projection operator on the subspace $\Gamma(F)$ of totally antisymmetric states in F

$$\begin{aligned}\Gamma^2&=\Gamma\\ \Gamma^+&=\Gamma\,.\end{aligned} \tag{4}$$

This implies for

$$|u\rangle=\tilde{\mathscr{A}}\,|\psi\rangle\,,$$

$|\psi\rangle$ being an element of E_{A+1}, the relations

$$\Gamma\,|u\rangle=|u\rangle$$

and

$$\langle k\otimes N|u\rangle=\frac{1}{\sqrt{A+1}}\,\langle N|\,a_k\,|\psi\rangle\,.$$

We denote that the matrix elements of Γ are given by

$$\Gamma_{k\,N,\,k'\,N'}=\langle k\otimes N|\,\Gamma\,|k'\otimes N'\rangle=\frac{1}{A+1}\,\langle N|\,a_k\,a_{k'}^+\,|N'\rangle\,. \tag{5}$$

The operators Q in E_{A+1}, being given in occupation number representation, can be transformed by

$$Q'=\tilde{\mathscr{A}}\,Q\,\mathscr{A}$$

into operators Q' in F. In the following we achieve a factorisation of Q' in the form

$$Q'=\Gamma\,\hat{Q}=\hat{Q}\,\Gamma \tag{6}$$

* For the sake of clarity in later developments we do not identify the subspace of antisymmetric states in F with E_{A+1}. Then one can extend the formalism almost without change to hole states and particle-hole states as well.

by explicit construction of $\hat{Q}$ for the case of one- and two-particle operators. $\hat{Q}$ is a convenient extension of Q' (which has only non-vanishing matrix elements between states of the subspace $\Gamma(F)$) on the whole tensor product space F.

For one-particle operators

$$X=\sum_{\mu\nu} X_{\mu\nu} a_\mu^+ a_\nu$$

we obtain

$$\begin{aligned}\langle N|\, a_k X a_{k'}^+ \,|N'\rangle &= \langle N|\, a_k [X, a_{k'}^+] \,|N'\rangle + \langle N|\, a_k a_{k'}^+ X \,|N'\rangle \\ &= \sum_\mu \langle N|\, a_k a_\mu^+ \,|N'\rangle X_{\mu k'} + \langle N|\, a_k a_{k'}^+ X \,|N'\rangle .\end{aligned} \tag{7}$$

By inserting the unit operator in E_A, this can be written in the form

$$\langle N|\, a_k X a_{k'}^+ \,|N'\rangle = \sum_{\mu M} \langle N|\, a_k a_\mu^+ \,|M\rangle \left(X_{\mu k'} \delta_{M N'} + \delta_{\mu k'} \langle M|\, X \,|N'\rangle\right).$$

Finally we arrive at

$$\begin{aligned}X' &= \frac{1}{A+1} \sum_{k N k' N' \mu M} |k \otimes N\rangle \langle N|\, a_k a_\mu^+ \,|M\rangle \times \\ &\quad \times \left(X_{\mu k'} \delta_{M N'} + \delta_{\mu k'} \langle M|\, X \,|N'\rangle\right) \langle k' \otimes N'| \\ &= \sum_{k N k' N' \mu M} |k \otimes N\rangle \Gamma_{k N, \mu M} \hat{X}_{\mu M, k' N'} \langle k' \otimes N'| \\ &= \Gamma \hat{X} ,\end{aligned}$$

where $\hat{X}$ is defined by

$$\langle k \otimes N|\, \hat{X} \,|k' \otimes N'\rangle = X_{k k'} \delta_{N N'} + \delta_{k k'} \langle N|\, X \,|N'\rangle . \tag{8}$$

This definition of $\hat{X}$ separates the single-particle and core contributions. Employing the sinistral analogue of (7)

$$\langle N|\, a_k X a_{k'}^+ \,|N'\rangle = \langle N|\, [a_k, X] a_{k'}^+ \,|N'\rangle + \langle N|\, X a_k a_{k'}^+ \,|N'\rangle \tag{7a}$$

one obtains

$$X' = \hat{X} \Gamma .$$

The construction of $\hat{Z}$ for symmetric two-particle operators

$$Z = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} Z_{\alpha\beta,\gamma\delta} a_\beta^+ a_\alpha^+ a_\gamma a_\delta$$

can be accomplished in a similar manner. The matrix elements of $\hat{Z}$ are then given by

$$\langle k \otimes N|\, \hat{Z} \,|k' \otimes N'\rangle = \tfrac{1}{2} \bar{Z}_{k N, k' N'} + \delta_{k k'} \langle N|\, Z \,|N'\rangle \tag{9}$$

where the following abbreviations have been introduced

$$\bar{Z}_{kN,k'N'}=\sum_{\alpha\gamma} Z^{a}_{\alpha k,\gamma k'}\rho_{\alpha N,\gamma N'}$$

$$Z^{a}_{\alpha\beta,\gamma\delta}=Z_{\alpha\beta,\gamma\delta}-Z_{\beta\alpha,\gamma\delta} \tag{10}$$

$$\rho_{kN,k'N'}=\langle N|\, a_k^+\, a_{k'}\,|N'\rangle\,.$$

The transition densities $\rho_{kN,k'N'}$ are related to the matrix elements of Γ by

$$\Gamma_{kN,k'N'}=\frac{1}{A+1}\,(\delta_{kk'}\delta_{NN'}-\rho_{k'N,kN'})\,.$$

3. Coupling of the Particle-Core-System

The Hamilton operator for a system of fermions, which move in a potential and interact through residual two-body forces, takes the form

$$H=\sum_{\alpha}\varepsilon_\alpha a_\alpha^+\, a_\alpha+\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\beta,\gamma\delta} V_{\alpha\beta,\gamma\delta}\, a_\beta^+\, a_\alpha^+\, a_\gamma\, a_\delta\,. \tag{11}$$

We apply to it the transformation, defined in the preceding equations

$$\tilde{\mathscr{A}}\,H\,\mathscr{A}=H'=\Gamma\,\hat{H}=\hat{H}\,\Gamma\,. \tag{12}$$

The expression for $\hat{H}$ is simplified considerably in the case that the basis elements $|N\rangle$ are eigenvectors of H

$$H\,|N\rangle=E_N\,|N\rangle\,.$$

The matrix elements of $\hat{H}$ are then given by

$$\langle k\otimes N|\,\hat{H}\,|k'\otimes N'\rangle=(\varepsilon_k+E_N)\,\delta_{kk'}\delta_{NN'}+\tfrac{1}{2}\,\bar{V}_{kN,k'N'}\,. \tag{13}$$

The second term

$$\bar{V}_{kN,k'N'}=\sum_{\alpha\gamma} V^{a}_{\alpha k,\gamma k'}\rho_{\alpha N,\gamma N'}$$

apparently describes the coupling of the single-particle and core motion. The one-particle potential employed for the description of nuclei is assumed to be derived from a self-consistent calculation. For definiteness we assume that the ε_k are Hartree-Fock one-particle energies and consequently we must exclude from $\bar{V}_{kN,k'N'}$ those parts which are absorbed in the "unperturbed" one-particle energies ε_k.

The usefulness of the introduction of $\hat{H}$ is based on the fact, that by application of $\tilde{\mathscr{A}}$ each eigenvector $|\psi\rangle$ of H goes over into an eigenvector $|u\rangle$ of $\hat{H}$ with the same eigenvalue. Thus we get from

$$H\,|\psi\rangle=E\,|\psi\rangle$$

$$|u\rangle=\tilde{\mathscr{A}}\,|\psi\rangle$$

the two equations

$$\hat{H}\,|u\rangle = E\,|u\rangle$$
$$\Gamma\,|u\rangle = |u\rangle\,. \tag{14}$$

This shows, that the eigenvalues of the Hamiltonian H are already included in the spectrum of $\hat{H}$. We remark, that the reverse is evidently not true; the operator $\hat{H}$ has more eigenvalues than H. This fact should not be surprising, because, considering the space E_{A+1} as a subspace of F, the eigenvectors of H must be elements of E_{A+1}, whereas the eigenvectors of $\hat{H}$ may be elements of the whole space F. Further, $\hat{H}$ is defined so as to commute with Γ. Consequently $\hat{H}$ does not mix the antisymmetric states with states of other symmetry. Those eigenvectors of $\hat{H}$ which, being not antisymmetric, do not correspond to eigenstates of H can be eliminated by the help of the second relation of (14). When E is an $\hat{n}_E$-fold degenerate eigenvalue of $\hat{H}$ with the eigenvectors $|u_1^{(E)}\rangle, \ldots, |u_{\hat{n}_E}^{(E)}\rangle$, then the degree of degeneracy of the same eigenvalue of H is given by

$$n_E = \sum_{i=1}^{\hat{n}_E} \langle u_i^{(E)}|\,\Gamma\,|u_i^{(E)}\rangle\,, \tag{15}$$

that is, n_E is the trace of Γ in the subspace of F belonging to the degenerate eigenvalue E.

When dealing with concrete problems one has to restrict the operator $\hat{H}$ on a subspace. Typically one would take into account only the low-lying collective core excitations. The restricted $\hat{H}$ does not commute in general with Γ and there does not exist a complete set of common eigenvectors of $\hat{H}$ and Γ. One can, however, examine the eigenstates of the approximated $\hat{H}$ by calculating the expression n_E according to (15). Those states belonging to eigenvalues, which give a small value of n_E compared with unity, are strongly contaminated with non-antisymmetric states and should be discarded.

We now summarize the equations of the approximation:

$$\langle k \otimes N|\,\hat{H}\,|k' \otimes N'\rangle = (\varepsilon_k + E_N)\,\delta_{kk'}\,\delta_{NN'} + \tfrac{1}{2}\,\bar{V}_{kN,k'N'}$$
$$\bar{V}_{kN,k'N'} = \sum_{\alpha\gamma} V^{a}_{\alpha k,\gamma k'}\,\rho_{\alpha N,\gamma N'} \tag{16}$$
$$\hat{H}\,|u\rangle = E\,|u\rangle\,.$$

After diagonalizing the Γ-matrix in the subspace of the degenerate (or almost degenerate) states $\langle u_i^{(E)}|\,\Gamma\,|u_j^{(E)}\rangle$ the resulting eigenvectors with small eigenvalues have to be eliminated. We like to emphasize that the only information about the core states which one needs in Eqs. (16) are their transition densities $\rho_{kN,k'N'}$ and experimental excitation energies.

4. Model-Calculation

We examine the approximation in a simple exactly soluble model which is essentially the quasi-spin model proposed by LIPKIN[10]. We consider a system of five fermions in two fourfold degenerate one-particle levels*. The Hamiltonian is given by

$$H=\tfrac{1}{2}\varepsilon\sum_{\pi m}\pi\, a^{+}_{\pi m}a_{\pi m}+\tfrac{1}{2}V\sum_{\pi m m'}a^{+}_{\pi m}a^{+}_{\pi m'}a_{-\pi m'}a_{-\pi m}.$$

π takes the values -1 and $+1$ for the two levels respectively, whereas m enumerates the states in each level. In order to emphasize the analogy with shell model calculations, we identify π with the parity quantum number and m with the quantum numbers of the 3-components of spin and isospin. H commutes with the corresponding operators J_3 and T_3 and the eigenstates of H can be accordingly classified. The relevant core states ($A=4$) have the energies and parities

$\pi=+1$

$$E=0,\quad \pm 2\varepsilon\left(1+3\left(\frac{V}{\varepsilon}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$\pi=-1$

$$E=\pm\varepsilon\left(1+9\left(\frac{V}{\varepsilon}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\pm\varepsilon\left(1+\left(\frac{V}{\varepsilon}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

The states of positive parity are mixtures of the Hartree-Fock ground-state, $2p-2h$ and $4p-4h$ excitations, the states of negative parity mixtures of $1p-1h$ and $3p-3h$ excitations. In Fig. 1 the dependence of E on V/ε is shown. The range of variation of V/ε is in agreement with the corresponding quantities (i.e. matrix elements divided by level distance) in typical shell model calculations.

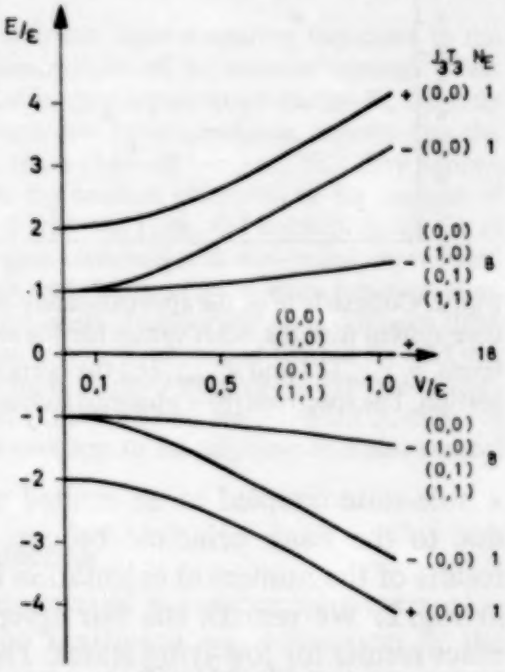


Fig. 1. Dependence of the core-state ($A=4$) energies E/ε on V/ε. J_3, T_3 are the quantum numbers of the 3-components of spin and isospin, N_E the degree of degeneracy of each level. The states included have been restricted to the ones needed for the $J_3=\frac{1}{2}$, $T_3=\frac{1}{2}$ states of the particle-core system

In order to test the approximation proposed in the preceding chapter for the calculation of low-lying states of the $A=5$ system the core states

* The model used here is a slight modification of the Lipkin model inasmuch as the degeneracies of levels are kept fixed when varying the number of particles.

[10] LIPKIN, H. J., N. MESHKOV, and A. J. GLICK: Nuclear Phys. **62**, 188 (1965).

taken into account have been restricted to those which have $E \leqq 0$. On the other hand the extra particle was allowed to be in all states, even in the unperturbed level of energy $-\varepsilon/2$, in order to examine states analogous to the low-lying non-normal parity states of doubly closed shell plus one-nucleon systems. (Those states can be interpreted as a single particle in

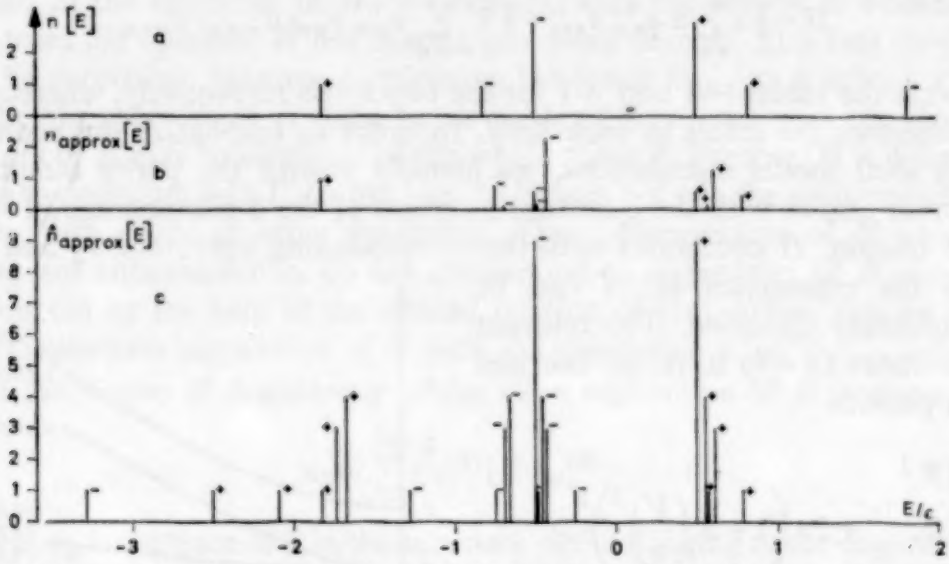


Fig. 2. Comparison of the approximately calculated $J_3=\frac{1}{2}$, $T_3=\frac{1}{2}$ states of the particle-core system with the exact values for $V/\varepsilon=0{,}5$. $n[E]$ is the degree of degeneracy of the levels, $n_{approx}[E]$ and $\hat{n}_{approx}[E]$ the corresponding values resulting from the approximation. The spectrum (b) is obtained from (c) by employing the subsidiary condition (15)

a hole-state coupled to an excited core state. Obviously the restrictions due to the Pauli principle become very important for this case.) The results of the numerical calculation for the $J_3=\frac{1}{2}$; $T_3=\frac{1}{2}$ levels are shown in Fig. 2. We remark the fair agreement of the approximation with the exact results for low-lying states. The effectiveness of the subsidiary condition (15) which corrects approximately for the Pauli principle violation can be seen by comparing the spectra (b) and (c) of Fig. 2.

Zeitschrift für Physik 202, 97—108 (1967)

Isospin Purity of the Isobaric Analogue Resonances for Several Open Channels

C. MAHAUX*
Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg
and
Physique Nucléaire Théorique, Université de Liège, Belgium

HANS A. WEIDENMÜLLER
Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg

Received February 25, 1967

The isospin purity of the full and of the doorway state scattering functions in the internal region is investigated, under the assumption of no internal mixing. When several channels are open, it is shown that the isospin is pure at an energy $E_>$ (slightly larger then the resonance energy) only under a restrictive condition, namely that the reduced widths of the analogue state vanish in all channels but one. This may happen either because of isospin selection rules (for the neutron channels) or for reasons of nuclear structure (for some of the proton channels). Then, the corresponding (p, n) and (p, p') cross sections vanish at $E_>$. If several channels with non-vanishing reduced widths are open, the isospin of both the full and doorway state wave function is no longer pure at $E_>$. If two proton channels are open, the doorway state contains three different types of admixtures in the internal region. Two, one of isospin $T_>$ and one of isospin $T_<$, are excited according to a simple Breit-Wigner probability law. They are both independent of the entrance channel. The third one has isospin $T_<$, depends upon the entrance channel and is excited according to an asymmetric enhancement factor identical to ROBSON's.

I. Introduction

Recent years have seen the appearance of a number of papers concerned with the isospin purity of the scattering wave function in the vicinity of the isobaric analogue resonances (IAR)[1-4]. This is important for the understanding of the role of these resonances as doorway states[5,6] and of the asymmetric resonance peaks observed in apparently isospin forbidden channels. In refs.[5,6], the influence of the energy behaviour of the isospin purity on both the gross and the fine structure of the IAR

* Chercheur agréé I.I.S.N., Belgium.

[1] ROBSON, D.: Proc. of the Conf. on Isobaric Spin in Nuclear Physics, p. 411. New York: Academic Press 1966.

[2] MACDONALD, W. M.: Proc. of the Conf. on Isobaric Spin in Nuclear Physics. p. 173. New York: Academic Press 1966.

[3] MAHAUX, C., and H. A. WEIDENMÜLLER: Nuclear Phys. **89**, 33 (1966).

[4] MAHAUX, C., and C. A. WIEDNER: Nuclear Phys. A **93**, 327 (1967).

[5] ROBSON, D.: Phys. Rev. **137**, B 535 (1965).

[6] MAHAUX, C., and H. A. WEIDENMÜLLER: Nuclear Phys. A **94**, 1 (1967).

was investigated. The treatment was, however, restricted to the case where only one proton channel is open at the resonance energy.

The IAR have also been observed in inelastic proton scattering experiments[7]. An analysis of these reactions should give information on the spectroscopic factors corresponding to a neutron stripping and pick-up experiment with the target nucleus in an *excited* state[8]. The extension of the theory to the case of several open proton channels is thus of great interest.

In a forthcoming paper[9], one of us shows how the result known for the one-open channel case from LANE's model[3] can be rederived and extended to the case of several proton channels, by using the shell model approach to nuclear reaction theory[10]. The derivation in ref.[9] is restricted to a subspace of the shell-model Hamiltonian H_0, namely to the states with one proton in the continuum and to some particle-hole states, so that only the "doorway state wave function" is studied. In the present paper, we want to give another derivation of the results of ref.[9], using techniques familiar from R-matrix theory. While the present approach is in some respects more restricted than that of ref.[9] and suffers from certain drawbacks to be discussed in section V, we nevertheless think the present treatment worthwhile, for the following reasons. Firstly, it leads in a very simple and direct way to the final expressions. Secondly, we hope that the connection and the difference between ROBSON's theory[5] and the shell-model approach will become clearer. Lastly, the present approach can easily be generalized. We derive, for instance, a few exact results, in the frame of the model, relating to the *full* scattering wave function.

In section II, we define the model, introduce the basic assumptions and derive the general formulae. The latter are applied to the case of a single open proton channel in section III, where we rederive the main results which have been obtained from the Lane model[3,5]. In section IV, we consider the case of two open proton channels. Finally, we discuss the validity of the various approximations and draw the conclusions in section V.

II. The Model

We divide the Hamiltonian H in a shell-model Hamiltonian H_0 and a residual interaction V, which we further write as $V=V_{\text{res}}^{N}+V_{\text{res}}^{C}$

[7] For a review, see BRENTANO, P. V.: Intern. Conf. on Nuclear Physics, Gatlinburg 1966.

[8] KAVALOSKI, C. D., J. S. LILLEY, P. RICHARD, and N. STEIN: Phys. Rev. Letters **16**, 807 (1966).

[9] WEIDENMÜLLER, H. A.: To be published.

[10] WEIDENMÜLLER, H. A.: Nuclear Phys. **85**, 241 (1966).

where V_{res}^{N} and V_{res}^{C} are the residual nuclear and Coulomb interaction, respectively. In the following, we neglect the role of V_{res}^{C}, which is only briefly discussed in section V. We use the same H_0 as in refs.[3,10], so that the single particle potential for the protons is the same as that for the neutrons, except for the average Coulomb potential acting on the former. Let us assume the target nucleus in its ground state has a hole in the last neutron shell; we assume that it has pure isospin

$$T_0 = \frac{N-Z}{2}.$$

We further assume that the various open channels correspond to a residual nucleus which has one neutron hole. Let us call $\varphi_{E,c}$ $(c=1,\ldots,N)$ the antisymmetrized wave function corresponding to a proton in channel c, in a stationary shell-model scattering state, and to a neutron hole in the corresponding state[10]. Let $\Phi_j^{(0)}$ $(j=1,\ldots,2T_0+1-N)$ be the antisymmetrized proton particle-neutron-hole wave functions containing a proton and a neutron in corresponding *bound* states, j[10]. We call "doorway state wave function $\psi_E^{(e)}$" the wave function which is obtained by diagonalizing H in the subspace of the shell-model states $\varphi_{E,c}$, $\Phi_j^{(0)}$ and which, asymptotically, has an incoming wave in channel e only. This is clearly the generalization of the terminology used in ref.[6].

Since our aim is the investigation of the isospin purity of $\psi_E^{(e)}$ in the internal region as a function of energy, we now make the assumption that, in the internal region, we may replace the wave function of the proton particle by that of the corresponding neutron hole, both in $\varphi_{E,c}$ and in $\Phi_j^{(0)}$. This is clearly a very good approximation for $\Phi_j^{(0)}$ and can also be justified for $\varphi_{E,c}$[11]. Both this approximation and the neglect of V_{res}^{C} correspond, in ROBSON's terminology[5], to the neglect of "internal mixing". Our model thus describes the mixing through external coupling only. It is important to realize that, because of the short range of the residual interaction, only the internal region will play an important role in the diagonalization of H. We call Φ_λ the $2T_0+1$ antisymmetrized and orthonormalized particle-hole functions, defined in the internal region only, and where the proton particle and the neutron hole have the same wave function.

We can now diagonalize H and construct $\psi_E^{(e)}$ with the techniques described in ref.[12], in the spirit of R-matrix theory[13]. Let us call X_λ $(\lambda=1,\ldots,2T_0+1)$ the states obtained by diagonalizing H in the internal

[11] MAHAUX, C., and H. A. WEIDENMÜLLER: Nuclear Phys. (in Press).
[12] MAHAUX, C.: Nuclear Phys. **79**, 481 (1966).
[13] LANE, A. M., and R. G. THOMAS: Revs. Modern Phys. **30**, 257 (1958).

region, using the set of functions Φ_j

$$X_\lambda=(2T_0+1)^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{2T_0+1}\Theta_{\lambda j}\Phi_j, \tag{1}$$

$$\langle X_\lambda|H|X_\mu\rangle=E_\lambda\delta_{\lambda\mu}; \quad \langle X_\lambda|X_\mu\rangle=\delta_{\lambda\mu}; \tag{2}$$

all integrals extend over the internal region only. The quantities $\Theta^2_{\lambda j}$ are the spectroscopic factors (dimensionless reduced widths). Because of our neglect of $V^C_{\rm res}$, the basic states X_λ have pure isospin. One of them, say $X_{2T_0+1}\equiv X_>$, has pure isospin $T_>=T_0+\frac{1}{2}$. The other $X_\lambda(\lambda=1,\ldots,2T_0)$ have isospin $T_<=T_>-1$[3,10]. Hence,

$$X_>=(2T_0+1)^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{2T_0+1}\Phi_j. \tag{3}$$

From Eq. (1), we have thus

$$\Theta_{>,j}\equiv\Theta_{2T_0+1,j}=1 \qquad (j=1,\ldots,2T_0+1). \tag{4}$$

The energy difference between $E_{2T_0+1}\equiv E_>$ and the quantities E_λ $(\lambda=1,\ldots,2T_0)$ is of the order of 10 MeV for heavy nuclei[10,14]. In the Lane potential $U_1\vec{t}\cdot\vec{T}$, is is essentially assumed that all the energies E_λ $(\lambda=1,\ldots,2T_0)$ are equal[3] to a common $E_<$,

$$E_j\approx E_< \tag{5}$$

with[5]

$$(T_0+\tfrac{1}{2})\,U_1\approx E_>-E_<. \tag{6}$$

Since $U_1\approx 100/A$ MeV, one has

$$E_>-E_<\approx 50\,\frac{2T_0+1}{A}\ \text{MeV}\ [15].$$

The following sum rule holds

$$\sum_{j=1}^{2T_0+1}\Theta^2_{\lambda j}=2T_0+1. \tag{7}$$

Eqs. (4) and (7) yield

$$\sum_{\lambda=1}^{2T_0}\Theta^2_{\lambda j}=2T_0. \tag{8}$$

In the internal region, we now write

$$\psi^{(e)}_E=\sum_{\lambda=1}^{2T_0+1}A^{(e)}_\lambda X_\lambda. \tag{9}$$

The coefficients $A^{(e)}_\lambda$ can be calculated as described in ref.[12]. At this point, however, we encounter a difficulty which always appears in

[14] PINKSTON, W. T.: Nuclear Phys. **53**, 643 (1964).
[15] LANE, A. M.: Nuclear Phys. **35**, 676 (1962).

practical calculations using R-matrix theory. Indeed, the left- and right-hand side of Eq. (9) fulfill different boundary conditions on the surface of the internal region. In R-matrix theory proper, this difficulty disappears if one includes in the set of eigenfunctions X_λ *all* the states which have the same boundary condition parameter[13] (logarithmic derivative) B_c as the $(2T_0+1)$ states X_λ that we consider. Then, the convergence of the series on the right-hand side of Eq. (3) is not uniform on the surface of the internal region, and the derivative cannot be calculated by term by term derivation. The difficulty reappears, however, as soon as a n-level approximation is made, no matter how large n is. In R-matrix theory, one then argues that the right-hand side of Eq. (3) only gives the correct *value* of the left-hand side on the surface, but not that of its derivative, which is taken from the boundary condition satisfied by $\psi_E^{(e)}$ itself[12,13]. This procedure usually gives good results[16]. Adopting this point of view, the coefficients $A_\lambda^{(e)}$ are given by the following set of linear equations[12]

$$A_\mu^{(e)}(E_\mu - E) + \sum_{\lambda=1}^{2T_0+1} A_\lambda^{(e)} \sum_c (B_c - \mathcal{S}_c - i\mathcal{P}_c)\gamma_{\lambda c}\gamma_{\mu c} = M_e \gamma_{\mu e} \qquad (10)$$

where

$$M_e = -i(2\hbar)^{\frac{1}{2}} v_e \Omega_e \mathcal{P}_e^{\frac{1}{2}} y_e^{(e)}. \qquad (11)$$

Here, Ω_c, $\mathcal{S}_c$ and $\mathcal{P}_c$ are the familiar Coulomb, shift and penetration functions for the protons; $\gamma_{\lambda c}$ is the reduced width amplitude of X_λ in channel c; $y_c^{(e)}$ is the amplitude of the incoming wave in channel e and v_e the velocity. The quantities B_c are of course equal to S_c, the shift function of the *neutron* (particle or hole) which is associated to channel c. The sum over c includes all channels, open and closed. Henceforth, we disregard the role of the closed channels, for which $B_c \simeq \mathcal{S}_c$ and $\mathcal{P}_c = 0$; their contribution can also be made arbitrarily small by taking the interaction radii in the closed channels sufficiently large.

Eq. (9) can be written in the form

$$\psi_E^{(e)} = A_>^{(e)} X_> + A_<^{(e)} \psi_<^{(e)} \qquad (12)$$

with

$$A_<^{(e)} = \left(\sum_{\lambda=1}^{2T_0} A_\lambda^{(e)\,2}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \psi_<^{(e)} = \left(\sum_{\lambda=1}^{2T_0} A_\lambda^{(e)\,2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mu=1}^{2T_0} A_\mu^{(e)} X_\mu. \qquad (13)$$

Eq. (12) gives the decomposition of $\psi_E^{(e)}$ into two normalized components with isospin $T_>$ and $T_<$ and with amplitudes $A_>^{(e)}$ and $A_<^{(e)}$, respectively. Eq. (13) shows that the admixture of the wave function with isospin $T_<$ to the doorway state wave function $\psi_E^{(e)}$ usually depends upon the entrance channel e.

[16] HAGLUND, M. E., and D. ROBSON: Phys. Letters **14**, 225 (1965).

We note that Eq. (9) gives the exact *full* scattering function $\tilde{\psi}_E^{(c)}$ (not only that of the doorway state $\psi_E^{(c)}$ which is confined to the set of $2T_0+1$ states X_λ in the internal region) if we include *all* states X_λ on the right-hand side. Let us denote all quantities pertaining to $\tilde{\psi}_E^{(c)}$ with a tilde sign. Eqs. (10) are still valid for the quantities $\tilde{A}_\lambda^{(c)}$; Eqs. (12) and (13) also hold for the full wave function $\tilde{\psi}_E^{(c)}$ if the sum over μ in the definition of $\tilde{\psi}_<^{(c)}$ extends over *all* states X_μ; the wave function $\tilde{\psi}_<^{(c)}$, however, then has pure isospin $T_<$ only if we make a one-level approximation for the states of isospin $T_<$, i.e. if we omit all eigenstates X_λ with isospin $T_>$ on the right-hand side of the Eq. (13). The coefficients $\tilde{A}_\mu^{(c)}$ are strongly energy dependent since there are many eigenstates with isospin $T_<$ in the immediate vicinity of $E_>$. The study of the functions $\tilde{\psi}_E^{(c)}$ would entail from the very beginning the investigation of the fine structure of the IAR. This is the procedure adopted by ROBSON[5] who, however, did not study the isospin purity of $\tilde{\psi}_E^{(c)}$ in the internal region but rather confined himself to the construction of the scattering matrix. Most of the results which are obtained below are also valid for $\tilde{\psi}_E^{(c)}$, except for those the derivation of which implies that the the quantities $E_>-E_j$ are large (and approximately equal to $E_>-E_<$).

We separate in Eqs. (10) the coefficient $A_>^{(c)}$ from $A_k^{(c)}$ $(k=1, \ldots, 2T_0)$:

$$A_>^{(c)}(E_>-E)+\sum_{\lambda=1}^{2T_0+1} A_\lambda^{(c)} \sum_c (B_c-\mathscr{S}_c-i\mathscr{P}_c)\gamma_{\lambda c}\gamma_{> c}-M_c\gamma_{> c}=0 \quad (14a)$$

$$A_k^{(c)}(E_k-E)+\sum_{\lambda=1}^{2T_0+1} A_\lambda^{(c)} \sum_c (B_c-\mathscr{S}_c-i\mathscr{P}_c)\gamma_{\lambda c}\gamma_{k c}-M_c\gamma_{k c}=0. \quad (14b)$$

III. One Open Proton Channel

Let us first suppose that only the channel c is open at the energy $E_>$ of the isobaric analogue state $X_>$. Eqs. (14) read

$$A_>^{(c)}(E_>-E)+\gamma_{>c} I_c(E)=0, \quad (15a)$$

$$A_k^{(c)}(E_k-E)+\gamma_{k c} I_c(E)=0 \qquad (k=1,\ldots,2T_0), \quad (15b)$$

where

$$I_c(E)=\sum_{\lambda=1}^{2T_0+1} A_\lambda^{(c)}(S_c-\mathscr{S}_c-i\mathscr{P}_c)\gamma_{j c}-M_c. \quad (16)$$

From Eq. (15a), we find that

$$I_c(E_>)=0, \quad (17)$$

so that

$$A_k^{(c)}(E_>)=0 \qquad (k=1,\ldots,2T_0). \quad (18)$$

At the energy $E=E_>$, the doorway state wave function $\psi_{E_>}^{(e)}$ thus has pure isospin $T_>$ in the internal region. This result also holds for the full scattering wave function $\tilde{\psi}_{E_>}^{(e)}$ (even without making any one-level approximation) since Eqs. (15)–(18) also hold for the tilde quantities, provided of course the sum over λ in Eq. (16) extends over *all* states X_λ of the complete set.

This result can be generalized. Let us suppose that several channels $c \neq e$ are kinematically open at $E_>$, but that

$$\gamma_{>c}=0, \tag{19}$$

as would for instance be the case for isospin forbidden channels. Then, Eqs. (14) give

$$A_>^{(e)}(E_>-E)+I_e\gamma_{>e}=0, \tag{20a}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{2T_0+1} A_\lambda^{(e)}[(E_\lambda-E)\delta_{\lambda k}+\sum_c (S_c-\mathscr{S}_c-i\mathscr{P}_c)\gamma_{\lambda c}\gamma_{kc}]+I_e\gamma_{ke}=0. \tag{20b}$$

These equations also hold for the tilde quantities associated to $\psi_E^{(e)}$; they are then exact and not based upon any single level approximation. From Eq. (20a) one again has $I_e\ (E_>)=0$ and Eqs. (20b) then give $A_k^{(e)}(E_>)=0\ (k=1, \ldots, 2T_0)$ since presumably this system of homogeneous equations has no non-trivial solution. This explains the vanishing of the (p, n) cross section at $E=E_>$; it is thus a direct and *exact* consequence of the assumption of pure external mixing[5]. Conversely, a non-vanishing (p, n) cross section at $E=E_>$, when no other proton channel is open, is a proof of the existence of internal mixing. It is hoped that this derivation sheds some new light on ROBSON's derivation[5,17]. We emphasize that our result is valid only if Eq. (19) holds for $c \neq e$. We thus expect our result to become invalid as soon as other isospin allowed channels are open, unless the reduced widths of the level $X_>$ in all open channels but one (e) vanish, for nuclear structure reasons. For instance the result is valid for a (p, p') reaction provided Eq. (19) holds for the p' channel. This is in keeping with the asymmetry of some (p, p') peaks observed in ref.[8].

The isospin impurity of the function $\psi_E^{(e)}$ in the internal region is given by the ratio

$$\rho=\left|\frac{A_<^{(e)}}{A_>^{(e)}}\right|. \tag{21}$$

According to Eqs. (12), (13) and (15), one has, in the one open channel case,

$$\rho=\frac{|E_>-E|}{|\gamma_{>e}|}\left[\sum_{\lambda=1}^{2T_0}\frac{\gamma_{\lambda e}^2}{(E_\lambda-E)^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

[17] ROBSON, D., J. D. FOX, P. RICHARD, and C. F. MOORE: Phys. Rev. Letters **18**, 86 (1965).

Using the approximation (5), we have

$$\rho \approx \frac{|E_> - E|}{E_> - E_<} (2T_0)^{\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

The formula (23), if related to Eq. (6), shows that the slope of ρ should be proportional to the coupling potential U_1 of LANE's generalized optical model. This is in reasonable agreement with the numerical results of ref.[4].

In order to calculate the scattering function S_{ee} corresponding to the function $\psi_E^{(e)}$, we define the level matrix

$$\boldsymbol{D} = (D_{\lambda\mu}); \quad D_{\lambda\mu} = (E_\lambda - E)\delta_{\lambda\mu} + \sum_c (S_c - \mathscr{S}_c - i\mathscr{P}_c)\gamma_{\lambda c}\gamma_{\mu c} \tag{24}$$

and its inverse

$$\boldsymbol{A} = (A_{\lambda\mu}) = \boldsymbol{D}^{-1}. \tag{25}$$

From Eqs. (10), we have

$$A_\lambda^{(e)} = M_e \sum A_{\lambda\mu}\gamma_{\mu e} \qquad (\lambda = 1, \ldots, 2T_0 + 1). \tag{26}$$

In the one open channel case we get the result

$$A_\lambda^{(e)} = M_e \frac{\gamma_{\lambda e}}{E_\lambda - E}\left[1 + (S_e - \mathscr{S}_e - i\mathscr{P}_e)\sum_{j=1}^{2T_0+1}\frac{\gamma_{je}^2}{E_j - E}\right] \tag{27}$$
$$(\lambda = 1, \ldots, 2T_0 + 1).$$

The scattering function of this problem reads

$$S_{ee} = \Omega_e^2 \frac{1 - (\mathscr{S}_e - S_e - i\mathscr{P}_e)\left[\frac{\gamma_{>e}^2}{E_> - E} + \sum_{j=1}^{2T_0}\frac{\gamma_{je}^2}{E_j - E}\right]}{1 - (\mathscr{S}_e - S_e + i\mathscr{P}_e)\left[\frac{\gamma_{>e}^2}{E_> - E} + \sum_{j=1}^{2T_0}\frac{\gamma_{je}^2}{E_j - E}\right]}. \tag{28}$$

One recognizes, of course, the $(2T_0+1)$-level approximation of R-matrix theory. Using the approximation (5), Eq. (28) reduces to

$$S_{ee} = \Omega_e^2 \frac{1 + (\mathscr{S}_e - S_e - i\mathscr{P}_e)\frac{\gamma_{>e}^2}{E_< - E_>}}{1 + (\mathscr{S}_e - S_e + i\mathscr{P}_e)\frac{\gamma_{>e}^2}{E_> - E_<}} \frac{E - \mathscr{E}_r^*}{E - \mathscr{E}_r}, \tag{29}$$

where the (complex) resonance energy $\mathscr{E}_r$ is given by

$$\mathscr{E}_r = E_> - (\mathscr{S}_e - S_e + i\mathscr{P}_e)\gamma_{>e}^2 \frac{E_> - E_<}{E_> - E_< + (\mathscr{S}_e - S_e + i\mathscr{P}_e)2T_0\gamma_{>e}^2}. \tag{30}$$

Assuming $E_> - E_> \gg 2T_0 \gamma^2_{>e}(\mathscr{S}_e - S_e + i\mathscr{P}_e)$, we find

$$S_{ee} \approx \Omega_e^2 \frac{E - \left(E_> + \Delta_{>e} + \frac{i}{2}\Gamma_{>e}\right)}{E - \left(E_> + \Delta_{>e} - \frac{i}{2}\Gamma_{>e}\right)}, \tag{31}$$

where

$$\begin{aligned}\Delta_{>e} &= (S_e - \mathscr{S}_e)\gamma^2_{>e} \\ &= (2T_0+1)^{-1}(S_e - \mathscr{S}_e)\varepsilon^2_{2T_0+1,e} = (2T_0+1)^{-1}\Delta_{\text{s.p.},e},\end{aligned} \tag{32a}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{>e} &= 2\mathscr{P}_e\gamma^2_{>e} \\ &= (2T_0+1)^{-1}2\mathscr{P}_e\varepsilon^2_{2T_0+1,e} = (2T_0+1)^{-1}\Gamma_{\text{s.p.},e}.\end{aligned} \tag{32b}$$

Here, $\varepsilon_{i,e}$ is the reduced width amplitude of Φ_i in channel e and $\Delta_{\text{s.p.},e}$, $\Gamma_{\text{s.p.},e}$ are the Thomas-Ehrmann level shift and width, respectively, of the single-particle resonance in channel e[13]. Eq. (31) shows one of the drawbacks of the present approach: the potential scattering phase shift is predicted to be equal to the hard sphere scattering phase shift. Since, however, the kinetic energy is usually smaller than the height of the Coulomb barrier, this causes no serious difficulty.

We have thus shown that the main results of the Lane model[3,5] concerning the isospin purity of the doorway state wave function $\psi_E^{(e)}$ can be derived by using the present approach. We have moreover pointed out that some exact results can also be obtained for the full scattering function $\tilde{\psi}_E^{(e)}$, even in the presence of isospin forbidden open channels. We now proceed to show how these results are modified in the case of several open proton channels.

IV. Two Open Proton Channels

In the case when two channels, say e and e', are open at the energy of the IAR, Eq. (14) gives, using Eqs. (24)–(26),

$$A_\lambda^{(e)} = M_e(E_\lambda - E)D^{-1}\left[\gamma_{\lambda e} + L_{e'}^{(0)}\sum_{\nu\neq\lambda}\frac{\gamma_{\lambda e}\gamma_{\nu e'} - \gamma_{\lambda e'}\gamma_{\nu e}}{E_\nu - E}\gamma_{\nu e'}\right], \tag{33}$$

with

$$\begin{aligned}L_e^{(0)} &= \mathscr{S}_e + i\mathscr{P}_e - S_e, \\ D &= 1 - \sum_c\sum_\mu \frac{\gamma^2_{\mu c}}{E_\mu - E}L_c^{(0)} + \\ &\quad + L_e^{(0)}L_{e'}^{(0)}\left[\sum_\mu\frac{\gamma^2_{\mu e}}{E_\mu - E}\sum_\rho\frac{\gamma^2_{\rho e'}}{E_\rho - E} - \left(\sum_\lambda\frac{\gamma_{\lambda e}\gamma_{\lambda e'}}{E_\lambda - E}\right)^2\right].\end{aligned} \tag{34}$$

Let us assume, for simplicity (this is *not* essential), that the quantities $E_\lambda - E_>$ ($\lambda = 1, \ldots, 2T_0$) are very large. One has then, in the vicinity of $E = E_>$,

$$D \approx -(E_> - E)^{-1}(E - \mathscr{E}_n), \tag{35}$$

with

$$\mathscr{E}_n = E_n - \frac{i}{2}\Gamma_n; \tag{36a}$$

$$E_n = E_> + \Delta_{> e} + \Delta_{> e'}; \quad \Gamma_n = \Gamma_{> e} + \Gamma_{> e'}; \tag{36b}$$

$$\Delta_{> e} = (S_e - \mathscr{S})\gamma^2_{> e} = (2T_0 + 1)^{-1}\Delta_{\text{s.p.}, e}, \tag{37a}$$

$$\Gamma_{> e} = 2\mathscr{P}_e\gamma^2_{> e} = (2T_0 + 1)^{-1}\Gamma_{\text{s.p.}, e}. \tag{37b}$$

By analogy with section III, we have called $\Delta_{\text{s.p.}, e}$ and $\Gamma_{\text{s.p.}, e}$ the single particle level shift and width, respectively, in channel e.

Substituting Eq. (35) in Eq. (33), we get

$$A^{(e)}_\lambda = -M_e \frac{E_> - E}{E_\lambda - E}(E - \mathscr{E}_r)^{-1} \times$$
$$\times \left[\gamma_{\lambda e} + L^{(0)}_{e'} \sum_{\nu \neq 2T_0+1} \frac{\gamma_{\nu e}\gamma_{\nu e'} - \gamma_{\lambda e'}\gamma_{\nu e}}{E_\nu - E}\gamma_{\nu e'} + \right. \tag{38}$$
$$\left. + L^{(0)}_{e'} \frac{\gamma_{\lambda e}\gamma_{> e'} - \gamma_{\lambda e'}\gamma_{> e}}{E_> - E}\gamma_{> e'}\right].$$

Hence, the wave function $\psi^{(e)}_<$ of isospin $T_<$ which is admixed in the doorway state wave function $\psi^{(e)}_E$ is made of two parts. One is proportional to (we again assume $E_\lambda - E_<$ large for $\lambda \neq 2T_0 + 1$, for simplicity),

$$\psi^{(e)}_{<,1} = \frac{E - E_>}{E - \mathscr{E}_r} \sum_{\lambda=1}^{2T_0} \frac{\gamma_{\lambda e}}{E_\lambda - E} X_\lambda; \tag{39}$$

its amplitude shows a resonance at $\mathscr{E}_r$ and vanishes at $E = E_>$, it depends upon the entrance channel e. The other function of isospin $T_<$ is proportional to

$$\psi_{<,2} = (E - \mathscr{E}_r)^{-1}\gamma_{> e'} \sum_{\lambda=1}^{2T_0} \frac{\gamma_{\lambda e}\gamma_{> e'} - \gamma_{\lambda e'}\gamma_{> e}}{E_\lambda - E} X_\lambda. \tag{40}$$

Its amplitude has a resonance at $\mathscr{E}_r$ but does *not* vanish at $E = E_>$; it is independent of the entrance channel e, except for an overall factor ($\gamma_{> e'}$). It vanishes for $\gamma_{> e'} = 0$, in agreement with the results of section III.

The analogue state $X_>$, on the other hand, is [see Eq. (33)] excited according to ($E_> - E_<$ large)

$$A^{(e)}_> = M_e\gamma_{> e}(E - \mathscr{E}_r)^{-1}; \tag{41}$$

the corresponding probability being given by a simple Breit-Wigner formula.

In the same limit $E_> - E_<$ large, the scattering matrix of the present model (i.e. the scattering matrix corresponding to the doorway state) is given by[12,13]

$$S_{ee'} = \Omega_e \Omega_{e'} \delta_{ee'} + i \Omega_e \Omega_{e'} \frac{\Gamma^{\frac{1}{2}}_{>e} \Gamma^{\frac{1}{2}}_{>e'}}{E - E_n + \frac{i}{2}\Gamma_n}. \tag{42}$$

Of course, Eqs. (33) and (34) are also valid for the tilde quantities associated to the full scattering wave function $\tilde{\psi}^{(e)}_E$ in the internal region. As mentioned in section II, the coefficients $\tilde{A}^{(e)}_\lambda$ now have a complicated energy dependence in the vicinity of $E_>$ due to the existence of many eigenvalues E_ν ($\nu > 2T_0 + 1$) close to $E_>$. The conclusion that the isospin is not pure at $E = E_>$ and that the $T_<$ admixture at $E_>$ is independent of the entrance channel is, however, still valid for $\tilde{\psi}^{(e)}_E$.

V. Discussion and Conclusion

The point of view adopted here is somewhat different from that of ROBSON[1,5]. Indeed, we studied the doorway state wave function $\psi^{(e)}_E$ in detail and treated only incidentally the full scattering wave function $\tilde{\psi}^{(e)}_E$. ROBSON rather deals with the latter and introduces statistical assumptions on the quantities $\gamma_{\nu e}$, $\gamma_{\nu e'}$ of the complete set. He then obtains a contribution to the total width of the resonance due to a spreading width. In the present model, this spreading width originates only from external mixing. We rather take the point of view that the statistical assumptions should be introduced at another stage, when one considers the coupling of the doorway state to the "complicated states"[6]. In other words, we believe that the statistical assumptions should not involve the $2T_0$ states X_λ ($\lambda = 1, \ldots, 2T_0$) which contribute to the doorway state. In the case of one open proton channel and of one open proton plus one isospin forbidden neutron channel, this leads to prescriptions different from ROBSON's for the extraction of the spectroscopic factors from the experimental data[6].

As mentioned in the introduction, the R-matrix treatment presented here suffers from a number of drawbacks, but also has some advantages. Among the drawbacks, we recall that we have completely neglected the contribution of internal mixing[1]. Clearly, this contribution will be of the same nature as that due to the opening of another isospin allowed channel, it will reduce further the isospin purity at $E = E_>$. Another drawback is connected with the dependence of our parameters upon the channel radii, which is a consequence of the use of R-matrix theory. This will,

however, never be completely avoidable since it is clear that the concept of the isospin purity of the scattering wave function is meaningful only in an "internal region" the dimension of which is of the order of the volume of the target nucleus. This fact was first emphasized by ROBSON[5] who also introduced the concept of external mixing.

We summarize the main results obtained in the present paper. In the case of pure external mixing, the full scattering wave function $\tilde{\psi}_E^{(e)}$ and the doorway state wave function $\psi_E^{(e)}$, corresponding to an isospin allowed entrance channel e, have pure isospin $T_>$, in the internal region, at an energy $E_>$, somewhat larger than the resonance energy E_n, *only* if no other isospin allowed channel is open, or if the reduced widths of the analogue state $X_>$, in all channels but e are equal to zero. In another isospin allowed channel e' is open, the doorway state scattering function $\psi_E^{(e)}$, in the internal region, consists of three components. One, $X_>$ with isospin $T_>$, is excited with a probability described by a simple Breit-Wigner formula. The second, $\psi_{<,1}^{(e)}$ has isospin $T_<$; it is excited with a probability given by ROBSON's asymmetric enhancement factor g:

$$g=\frac{(E-E_>)^2}{(E-E_n)^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2}. \tag{43}$$

It depends upon the entrance channel e. Finally, the third admixture, $\psi_{<,2}$, has isospin $T_<$ and is independent of the entrance channel e. It is excited according to a simple Breit-Wigner probability law. As mentioned in section I, these results can also be derived in the frame of the shell-model approach to nuclear reactions[9,10].

One of us (C. M.) would like to thank Professor J. H. D. JENSEN for giving him the possibility to visit Heidelberg, and all the members of the Institut für Theoretische Physik for their kind hospitality.

Zeitschrift für Physik 202, 109—117 (1967)

Untersuchung der Niveaustruktur von ^{53}Cr und ^{52}Cr mit (d, d') und (d, t)-Reaktionen

W. FITZ, J. HEGER, R. JAHR und R. SANTO
Max-Planck-Institut für Kernphysik, Heidelberg

Eingegangen am 27. Februar 1967

Angular distributions of deuterons and tritons from the reactions ^{52,53}Cr(d, d), ^{52,53}Cr(d, d'), ^{53,54}Cr$(d, t)^{52,53}$Cr have been measured at $E_d = 11.8$ to 11.9 MeV. The elastic scattering data have been analyzed in terms of the optical model. The (d, d') and (d, t) data have been compared with DWBA calculations. Deformation parameters and spectroscopic factors have been extracted. The results are qualitatively discussed in terms of different nuclear models.

1. Einleitung

Die niedrig liegenden Niveaus von ^{53}Cr sind in einer Reihe von Arbeiten experimentell und theoretisch untersucht worden[1-5] *. Da in ^{52}Cr die $f_{7/2}$-Neutronenschale abgeschlossen ist, liegt eine Interpretation der ^{53}Cr-Zustände im Rahmen des Schalenmodells[6] nahe. Die experimentell gefundene Spinfolge $3/2^-$, $1/2^-$ und $5/2^-$ würde danach der Besetzung der folgenden Schalen $2p_{3/2}$, $2p_{1/2}$ und $1f_{5/2}$ entsprechen. Andererseits ist auch eine Deutung der niedrigliegenden Zustände nach dem Excited-core-model möglich[7], in welchen das einzelne Neutron außerhalb des ^{52}Cr-Rumpfes mit dem 2^+-Zustand bei 1,43 MeV in ^{52}Cr koppelt und ein Quadruplett von Zuständen mit Spins $1/2^-$, $3/2^-$, $5/2^-$ und $7/2^-$ bildet. Die vorliegende Untersuchung der ^{53,52}Cr(d, d')- und ^{54,53}Cr(d, t)-Reaktionen wurde unternommen, um diese verschiedenartigen Aspekte der niedrigliegenden Niveaus in den betrachteten Chrom-Isotopen zu studieren.

2. Experimentelle Methode

Die differentiellen Wirkungsquerschnitte wurden unter Verwendung der 50 cm-Drehdeckelstreukammer und des abgelenkten Deuteronen-

* Weitere Referenzen über Kernreaktionen an Cr-Isotopen siehe[1,2,16].

[1] ANDREWS, P. T., R. W. CLIFT, L. L. GREEN, J. F. SHARPEY-SCHAFER, and R. N. MADDISON: Nuclear Phys. **56**, 422 (1964).

[2] BOCK, R., H. H. DUHM, S. MARTIN, R. RÜDEL, and R. STOCK: Nuclear Phys. **72**, 273 (1965).

[3] ROLLEFSON, A. A., R. C. BEARSE, J. C. LEGG, G. C. PHILIPS, and G. ROY: Nuclear Phys. **63**, 561 (1965).

[4] RAMAVATARAM, K.: Phys. Rev. **132**, 2255 (1963).

[5] VERVIER, J.: Nuclear Phys. **78**, 497 (1966).

[6] MAYER, M. G., and J. H. D. JENSEN: Elementary theory of nuclear shell structure. New York: John Wiley and Sons 1955.

[7] DE-SHALIT, A.: Phys. Rev. **122**, 1530 (1961).

strahles am Heidelberger Zyklotron gemessen. Die Targets bestanden aus zu >90% Isotopen-angereichertem Material, das auf Kohlenstoff-Trägerfolien aufgedampft war. Die Cr-Schicht hatte eine Dicke von 50 bis 100 µg/cm². Als Detektoren dienten vier dE/dx-E-Grenzschichtzählerteleskope, die in einem Winkelabstand von je 10° auf dem Drehdeckel angebracht waren. Die Spektroskopiersignale wurden in 4×512 Kanälen eines 4096-Kanal-Impulshöhen-Analysators registriert.

3. Elastische und unelastische Streuung

Die Winkelverteilungen der elastischen Streuung an ^{52,53}Cr sind in Fig. 1 gezeigt. Die durchgezogene Kurve ist das Ergebnis einer Analyse

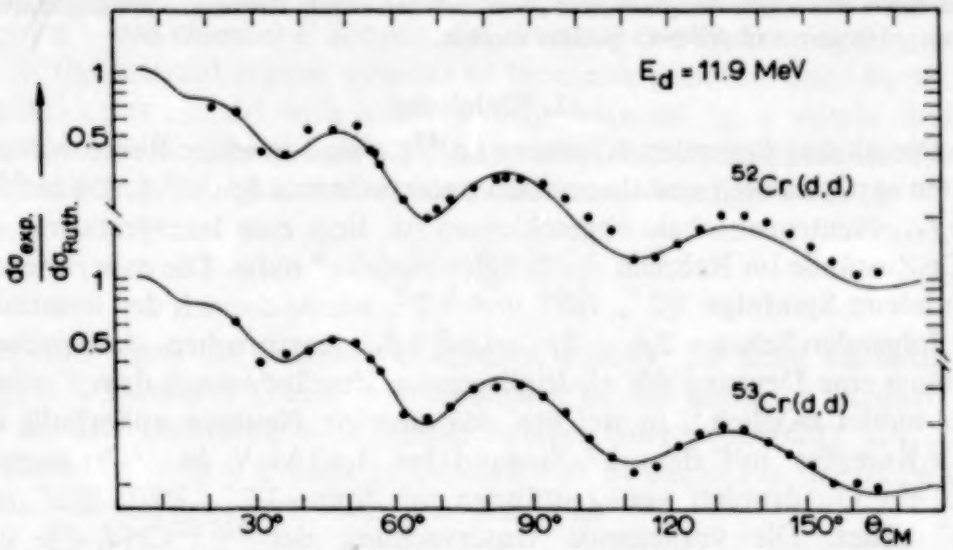


Fig. 1. Gemessene Winkelverteilungen der elastisch an ^{52,53}Cr gestreuten Deuteronen in Einheiten des Rutherford-Wirkungsquerschnittes. Die durchgezogenen Kurven entsprechen Optischen Modell-Rechnungen mit den Parametern von Tabelle 1

nach dem Optischen Modell*, welche die in Tabelle 1 aufgeführten Parameter lieferte. Die Winkelverteilung der ^{52}Cr(d, d')-Reaktion zum 2^+-Zustand bei 1,43 MeV (Fig. 2, oberste Kurve) zeigt eine typische Interferenzstruktur, die zu größeren Winkeln hin etwas verwaschen ist. Die eingezeichnete durchgezogene Kurve ist das Ergebnis einer DWBA-Rechnung mit $L=2$, wobei ein kollektiver Formfaktor[8] in komplexer Kopplung[9] benutzt wurde**. Der damit extrahierte Wert des Deformations-

* Die Analysen wurden mit dem Programm ABACUS von E. H. Auerbach durchgeführt.

** Die DWBA-Rechnungen wurden mit dem Programm JULIE durchgeführt, das uns von R. M. Drisko überlassen wurde.

[8] Bassel, R. H., R. M. Drisko, and G. R. Satchler: ORNL-Report 3240.

[9] Broek, H. W., J. L. Yntema, B. Buck, and G. R. Satchler: Nuclear Phys. **64**, 259 (1965).

parameters von $\beta = 0{,}14$ steht in befriedigender Übereinstimmung mit (p, p') und (α, α')-Daten[10, 11]. Das Excited-core-model sagt für die unelastische Streuung an den oben genannten Zuständen von ^{53}Cr voraus,

Tabelle 1. *Optische Potentiale, die in den DWBA-Analysen der vorliegenden (d, d')- und (d, t)-Messungen verwendet wurden. Die Deuteronenpotentiale wurden aus einer Analyse der elastischen Deuteronenstreuung (s. Fig. 1) gewonnen. (Potentialtiefen in MeV, Radien in Fermi)*

	V	r_0	r_c	a	W	r_w	a_w	V_s	$4W'$
d	98,43	1,116	1,3	0,723	—	1,264	0,662	6,0	70
t	133,0	1,08	1,3	0,8	11,0	1,63	0,754	6,0	—

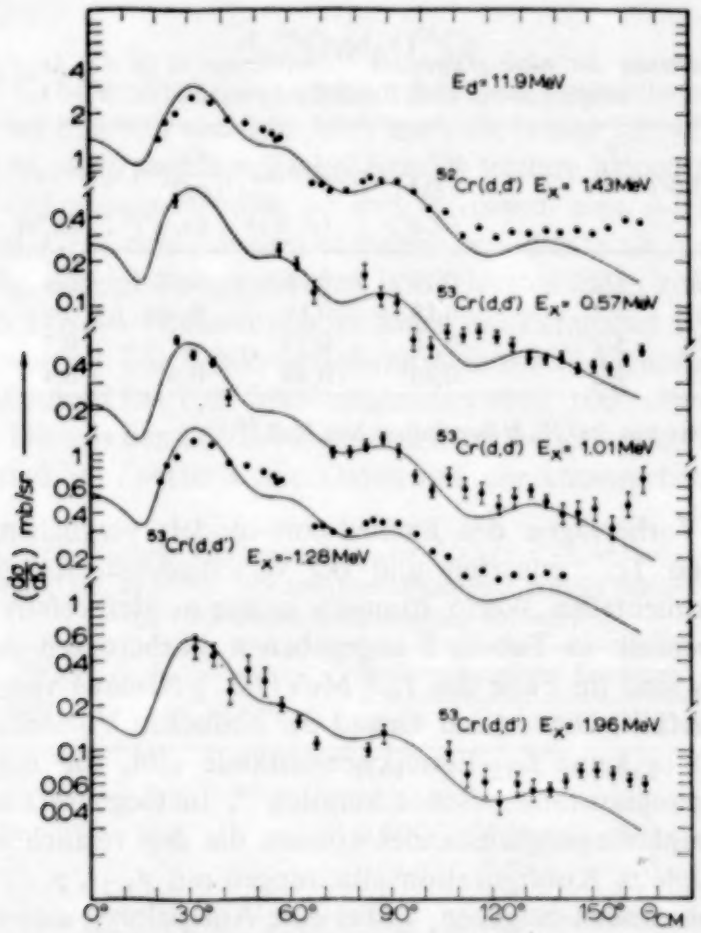


Fig. 2. Gemessene Winkelverteilungen der unelastisch an $^{52, 53}$Cr gestreuten Deuteronen. Die durchgezogenen Kurven entsprechen DWBA-Rechnungen für $L = 2$

[10] Funsten, H., N. R. Roberson, and E. Rost: Phys. Rev. **134**, B 117 (1964).

[11] Meriwether, J. R., I. Gabrielli, D. L. Hendrie, J. Mahoney, and B. G. Harvey: Phys. Rev. **146**, 804 (1966).

daß die Winkelverteilungen die gleiche Form haben sollten wie die ^{52}Cr(d, d') ^{52}Cr$^*(2^+)$-Winkelverteilung, also auch $L=2$, und daß folgende Beziehung gilt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}[^{53}\mathrm{Cr}, 3/2^- \to I_f] = \frac{2I_f+1}{(2L+1)(2j+1)} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega}[^{52}\mathrm{Cr}, 0^+ \to 2^+].$$

(I_f=Spin des Endniveaus in ^{53}Cr, L=Spin des Rumpfzustandes in ^{52}Cr, j=Spin des an den Rumpfzustand gekoppelten Neutrons.) Die ^{53}Cr-Winkelverteilungen von Fig. 2 zeigen tatsächlich eine der ^{52}Cr 2^+-Winkelverteilung ähnliche Struktur, die auf den gleichen L-Wert der Übergänge schließen läßt. Die durchgezogenen Kurven entsprechen wieder DWBA-Rechnungen mit $L=2$. In Tabelle 2 sind die Ergebnisse der (d, d')-Messungen mit (p, p')- und (α, α')-Daten von Ref.[10, 11]

Tabelle 2. *Anregung der niedrigliegenden ^{53}Cr-Niveaus in (d, d'), (p, p') und (α, α'), verglichen mit dem Excited-core-model (ECM)*

E_x [MeV]	J_f	$\frac{d\sigma}{d\Omega}[^{53}\mathrm{Cr}, 3/2^- \to J_f] / \frac{d\sigma}{d\Omega}[^{52}\mathrm{Cr}, 0^+ \to 2^+]$			
		(d, d')	(p, p')[a]	(α, α')[b]	ECM
0,57	$1/2^-$	0,19	0,26	0,33	0,1
1,01	$5/2^-$	0,18	0,19	0,20	
1,96	$5/2^-$	0,18	0,13	—	0,3
1,28	$7/2^-$	0,48	0,48	0,51	0,4

a Ergebnisse aus Ref.[16], b Ergebnisse aus Ref. [11].

sowie den Vorhersagen des Excited-core-models verglichen. Die mit verschiedenen Teilchensorten und bei verschiedenen Energien erhaltenen experimentellen Werte stimmen untereinander relativ gut überein. Die ebenfalls in Tabelle 2 angegebenen Vorhersagen des Excited-core-models sind im Falle des 1,28 MeV$(7/2^-)$-Niveaus von ^{53}Cr noch am besten erfüllt. Dies ist auf Grund der einfachen Vorstellung zu verstehen, daß es keine $f_{7/2}$-Einteilchenzustände gibt, die mit dem 7/2-Rumpfanregungszustand mischen könnten[12]. Im Gegensatz zu dem Fall des 7/2-Rumpfanregungszustandes können die drei restlichen Zustände des Quadrupletts Konfigurationsmischungen mit $p_{3/2}$-, $p_{1/2}$- oder $f_{5/2}$-Neutronenzuständen eingehen, wobei eine Aufspaltung dieser Zustände auftreten kann. So entspricht die Summe der beiden $5/2^-$-Zustände bei 1,01 und 1,96 MeV etwa dem aus dem Excited-core-model erwarteten Wert (vgl. Tabelle 2). Der $1/2^-$-Zustand bei 0,57 MeV wird, verglichen

[12] Bock, R., H. H. Duhm, R. Jahr, R. Santo, and R. Stock: Phys. Letters **19**, 417 (1965).

mit dem Excited-core-model, viel zu stark angeregt. Dies kann natürlich nicht durch eine Aufspaltung des Niveaus erklärt werden, die durch die Wechselwirkung mit $2\,p_{1/2}$-Neutronen durchaus möglich wäre. PHILPOTT und TRUE[13] haben Energieniveaus und Wellenfunktionen für ^{53}Cr nach einem Modell berechnet, in welchem die Wechselwirkung der Rumpfzustände mit den $2p_{3/2}$, $2p_{1/2}$ und $1\,f_{5/2}$-Einteilchenzuständen berücksichtigt wird (ähnliche Rechnungen vgl.[14]). Diese Rechnungen liefern die beobachtete Aufspaltung der Rumpfzustände sowie $B(E2)$-Werte, die von den nach dem einfachen Excited-core-model berechneten Werten abweichen. Insbesondere erhält man für den $1/2^-$-Zustand einen wesentlich höheren Wert als nach dem einfachen Excited-core-model, was in Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund steht. Eine Anregung des Niveaus bei 1,54 MeV wurde in der vorliegenden (d, d')-Messung nicht beobachtet.

4. ^{54}Cr $(d, t)^{53}$Cr

In der ^{54}Cr(d, t)-Reaktion werden neben dem Grundzustand und den Zuständen bei $E_x = 0{,}57$ und 1,01 MeV auch die beiden $7/2^-$-Zustände bei 1,28 und 1,54 MeV angeregt. Dabei hat der letztere jedoch den weitaus größeren Wirkungsquerschnitt, so daß in diesem eine stärkere Beimischung eines $f_{7/2}$-Lochzustandes enthalten sein dürfte als im 1,28 MeV-Zustand. Fig. 3 zeigt die gemessenen Winkelverteilungen zusammen mit Kurven aus DWBA-Rechnungen, in denen die Parameter von Tabelle 1 verwendet wurden. Die Winkelverteilungen zum $3/2^-$-Grundzustand und dem $1/2^-$-Zustand bei 0,57 MeV zeigen bei etwa 100° einen typischen J-Effekt[15]. Die aus den DWBA-Analysen extrahierten spektroskopischen Faktoren sind in Tabelle 3 mit Daten aus der entsprechenden (p, d)-

Tabelle 3. *Spektroskopische Faktoren aus der ^{54}Cr(d, t)-Reaktion, verglichen mit (p, d) und $(^3$He, $\alpha)$-Daten. Die spektroskopischen Faktoren wurden auf den (d, t)-Grundzustandsübergang normiert*

$E_x(^{53}\mathrm{Cr})$ [MeV]	J_f	Spektroskopische Faktoren		
		(d, t)	(p, d)[a]	$(^3\mathrm{He}, \alpha)$[b]
0,00	$3/2^-$	0,61	0,61	0,61
0,57	$1/2^-$	0,22	0,23	0,12
1,01	$5/2^-$	0,31	0,38	0,42
1,28	$7/2^-$	0,61	0,52	0,33
1,54	$7/2^-$	1,8	2,3	2,1

a Ergebnisse aus Ref.[16], b Ergebnisse aus Ref.[17].

[13] PHILPOTT, J., and W. W. TRUE: Private Mitteilung.
[14] THANKAPPAN, V. K., and W. W. TRUE: Phys. Rev. **137**, B 793 (1965).
[15] FULMER, R. H., and W. W. DAEHNICK: Phys. Rev. Letters **12**, 455 (1964).
[16] WHITTEN, C. A.: PUC-937-230 Report, Princeton 1966.
[17] BOCK, R., P. DAVID, H. H. DUHM u. R. STOCK: Wird veröffentlicht.

Reaktion[16] bzw. der (^{3}He, α)-Reaktion[17] verglichen, wobei auf den (d, t)-Grundzustandsübergang normiert wurde. Bei diesem Vergleich fällt auf, daß die (p, d)- und (d, t)-Daten für alle betrachteten Zustände recht gut

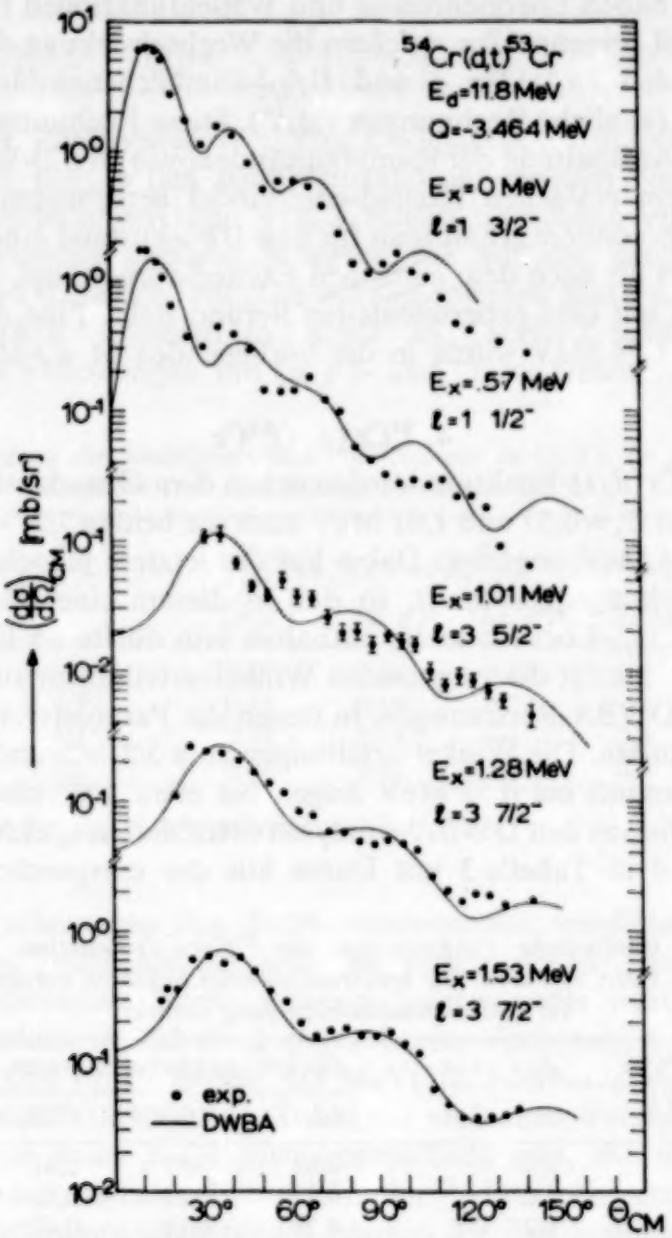


Fig. 3. Gemessene Winkelverteilungen der Tritonen aus der Reaktion ^{54}Cr(d, t)^{53}Cr. Die durchgezogenen Kurven entsprechen DWBA-Rechnungen

übereinstimmen und im Falle des 7/2$^-$-Zustandes bei 1,28 MeV und des 1/2$^-$-Zustandes bei 0,57 MeV beträchtlich höhere spektroskopische Faktoren liefern als die (^{3}He, α)-Reaktion. Da gerade diese beiden Zustände in der unelastischen Streuung besonders stark angeregt wurden, liegt es

nahe, einen Pickup-Prozeß mit Rumpf-Anregung zusätzlich zum gewöhnlichen Pickup-Prozeß anzunehmen[18], der dementsprechend in der (^{3}He, α)-Reaktion von geringerer Bedeutung zu sein scheint als in der (d, t)- und (p, d)-Reaktion.

5. ^{53}Cr (d, t) ^{52}Cr

Die ^{53}Cr(d, t)-Reaktion liefert Aussagen über die Rumpfanregungs-Komponenten z. B. $|2^+ p_{3/2}\rangle_{3/2}$ im Grundzustand von ^{53}Cr und über die Lochzustände im ^{52}Cr. Die niedrigliegenden Zustände im ^{52}Cr können nach dem Schalenmodell als die verschiedenen durch Umkopplung entstandenen Zustände der vier $f_{7/2}$-Protonen verstanden werden[19]. Von diesen Zuständen wird besonders der 2^+-Zustand von ^{52}Cr bei 1,43 MeV in der ^{53}Cr(d, t)-Reaktion stark angeregt, was auf eine beträchtliche Rumpfanregungs-Komponente im Grundzustand von ^{53}Cr schließen läßt. Daneben gibt es auch noch schwache Übergänge zu den beiden 4^+-Zuständen bei 2,37 und 2,77 MeV, die demnach ebenfalls schwache Komponenten im Grundzustand besitzen. Fig. 4 zeigt die gemessenen ^{53}Cr (d, t)-Winkelverteilungen zusammen mit DWBA-Analysen. Der Grundzustandsübergang ist ein reiner $L=1$-Übergang, während aus Drehimpuls- und Paritätsgründen für den Übergang zum 2^+-Zustand $L=1$ und $L=3$ erlaubt sind. Wie man schon aus der Ähnlichkeit mit dem Grundzustandsübergang erkennt, dominiert die $L=1$-Komponente. Eine Abschätzung der beiden Anteile läßt sich aus der Anpassung der gemessenen Kurve durch $L=1$- und $L=3$-Verteilungen gewinnen. Die Übergänge zu den beiden 4^+-Zuständen können in der normalen Pickup-Reaktion nur mit $L=3$ erfolgen. Die gemessene Winkelverteilung zum 2,77 MeV-Zustand weicht jedoch von der berechneten $L=3$-Form im Vorwärtswinkeln stark ab. Dieses Verhalten deutet auf einen anderen Reaktionsmechanismus, z. B. einen kollektiven Beitrag zum Pickup-Prozeß hin. Die Winkelverteilungen der Niveaus bei 3,46, 3,80 und 4,09 MeV lassen sich durch $L=3$ DWBA-Kurven wiedergeben, entsprechend dem Pickup eines Neutrons aus der vollen $f_{7/2}$-Schale.

Außer den schon erwähnten Zuständen wird auch der 0^+-Zustand bei 2,64 MeV, allerdings ziemlich schwach, angeregt. Die Existenz dieses Zustandes in ^{52}Cr kann nicht durch Umkopplung der vier $f_{7/2}$-Protonen verstanden werden. Eventuell liegt eine Konfiguration der Form $(f_{7/2})^6 (p_{3/2})^2$ für die Neutronen vor, was durch Ergebnisse der ^{54}Cr(p, t)-Reaktion (Ref.[16]) gestützt wird. Der beobachtete (d, t)-Übergang läßt dann auf eine $(f_{7/2})^6 (p_{3/2})^3$-Komponente im Grundzustand von ^{53}Cr schließen. Die spektroskopischen Faktoren aus den DWBA-

[18] Austern, N., in: Brookhaven Conf. 1965, vol. II, BNL-948.
[19] Talmi, I.: Phys. Rev. **126**, 1096 (1962).

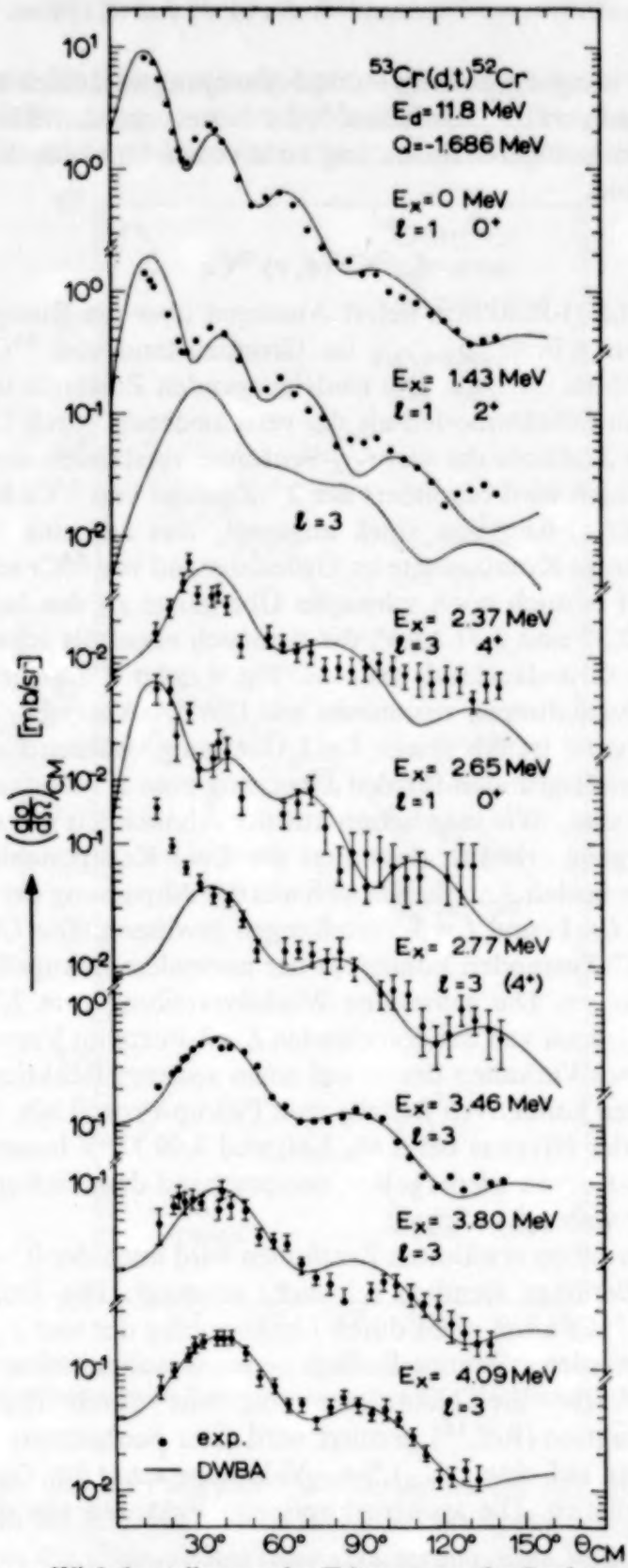


Fig. 4. Gemessene Winkelverteilungen der Tritonen aus der Reaktion $^{53}Cr(d, t)^{52}Cr$. Die durchgezogenen Kurven entsprechen DWBA-Rechnungen

Analysen der gemessenen Übergänge sind in Tabelle 4 zusammen mit den Ergebnissen der (p, d)-Messung[16] aufgeführt. Während die Absolutwerte sich um ca. 20% unterscheiden, stimmen die relativen spektroskopischen Faktoren gut miteinander überein. Das Verhältnis der spektro-

Tabelle 4. *Spektroskopische Faktoren aus der $^{53}Cr(d, t)$-Reaktion, verglichen mit Ergebnissen der (p, d)-Messung von Ref.* [16]

$E_x(^{52}Cr)$ [MeV]	J_f	Spektroskopische Faktoren			
		(d, t)		$(p, d)^b$	
		$L=1$	$L=3$	$L=1$	$L=3$
0,00	0^+	0,39		0,51	
1,43	2^+	0,15	~0,13	0,18	~0,20
2,37	4^+		0,1[a]		0,07
2,64	0^+	0,01		0,018	
2,77	4^+		0,12		0,10
3,46	$(3^+, 4^+, 5^+)$		1,45		2,3
3,80	$(2^+, 5^+)$		0,31		0,36
4,09	$(3^+, 4^+, 5^+)$		0,79		1,14

a Diese Abschätzung stützt sich hauptsächlich auf Daten aus der $^{53}Cr(^3He, \alpha)$-Reaktion, bei der $L=3$-Übergänge gegenüber $L=1$-Übergängen begünstigt sind.
b Ergebnisse von Ref.[16].

skopischen Faktoren für den Grundzustandsübergang und den Übergang zum 2^+-Zustand bei 1,43 MeV steht in guter Übereinstimmung mit den Rechnungen von PHILPOTT und TRUE[13].

6. Schluß

Die aus den (d, d')-Messungen erhaltenen Deformationsparameter stimmen relativ gut überein mit den aus (p, p') oder (α, α') gewonnenen Daten. Das einfache Excited-core-model für ^{53}Cr vermag bereits wesentliche Züge in den experimentellen Daten zu erklären. Eine verbesserte Beschreibung muß jedoch die Wechselwirkung der Rumpfzustände mit Schalenmodellzuständen berücksichtigen, wie es z. B. in den Rechnungen von PHILPOTT und TRUE[13] geschehen ist. Beim Vergleich der spektroskopischen Faktoren aus den (d, t)-Experimenten mit (p, d)- und $(^3He, \alpha)$-Daten findet man gute Übereinstimmung bei Zuständen mit überwiegendem Einteilchencharakter. Dagegen treten für Zustände mit starken kollektiven Komponenten Unterschiede zwischen den spektroskopischen Faktoren der $(^3He, \alpha)$-Reaition einerseits und der (p, d)- und (d, t)-Reaktion andererseits auf, die auf kollektive Beiträge zum normalen Pickupprozeß hindeuten.

Wir danken Herrn Prof. W. GENTNER für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit Herrn J. PHILPOTT für die Überlassung von Ergebnissen seiner Rechnungen an ^{53}Cr vor der Veröffentlichung und Herrn B. PÖPEL für die Hilfe bei den Experimenten.

Zeitschrift für Physik 202, 118–124 (1967)

Bemerkung zu den Punkttransformationen in der Quantentheorie

MANFRED LANGENBERG und HELMUT STEINWEDEL
Physikalisches Institut der Universität Würzburg

Eingegangen am 7. März 1967

It is shown that point transformations in quantum mechanics are generally achieved by isometric transformations in Hilbert space.

1. Einleitung

Wie man den Lehrbüchern der Quantenmechanik entnimmt, bilden das Pendant zu den kanonischen Transformationen der klassischen Mechanik die unitären Transformationen. Sie haben u.a. folgende Eigenschaften: A. Sie transformieren hermitesche Operatoren wieder in hermitesche; B. sie transformieren ein vollständiges Orthogonalsystem von Zuständen in ein ebensolches, C. sie lassen das Eigenwertspektrum hermitescher Operatoren invariant, d.h. ein Eigenzustand eines hermiteschen Operators wird in einen Eigenzustand des transformierten Operators zum gleichen Eigenwert transformiert.

Die Eigenschaften A. und B. sind, sofern man ein Analogon zu den kanonischen Transformationen wünscht, zweifellos notwendig. Die Eigenschaft C. hingegen führt sofort zu unüberwindlichen Schwierigkeiten, falls man z.B. eine unitäre Transformation sucht, die die kartesischen Koordinatenoperatoren X, Y, Z eines Massenpunkts in Polarkoordinatenoperatoren R, Θ, Φ verwandelt: Eine solche Transformation kann offenbar nicht unitär sein, denn das Spektrum von X, Y, Z läuft jeweils von $-\infty$ bis $+\infty$, das Spektrum von Θ hingegen nur von 0 bis π.

Man benötigt also eine allgemeinere Klasse von Transformationen als die der unitären, wenn man diese (und ähnliche) Punkttransformationen auch in der Quantenmechanik explizit formulieren will.

2. Punkttransformationen in der klassischen Mechanik

Die kanonischen Transformationen gewinnt man üblicherweise aus einer Erzeugenden w. Für Punkttransformationen*

$$q_i = f_i(\tilde{q}_1 \dots \tilde{q}_n), \qquad i = 1 \dots n$$

* Die (generalisierten) Koordinaten werden mit q_i bzw. $\tilde{q}_i$, die zugehörigen Impulse mit p_i bzw. $\tilde{p}_i$ bezeichnet.

kann man z. B.

$$w=-\sum_k p_k f_k(\tilde{q}_1 \dots \tilde{q}_n)$$

wählen und erhält wie gewünscht

$$q_i=-\frac{\partial w}{\partial p_i}=f_i(\tilde{q}_1 \dots \tilde{q}_n)$$

sowie

$$\tilde{p}_i=-\frac{\partial w}{\partial \tilde{q}_i}=\sum_k p_k \frac{\partial f_k}{\partial \tilde{q}_i}.$$

Speziell für das obengenannte Beispiel hätte man

$$w=-p_x r \sin\vartheta \cos\varphi - p_y r \sin\vartheta \sin\varphi - p_z r \cos\vartheta,$$

$$x=r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y=r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z=r\cos\vartheta$$

und damit*

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \vartheta=\operatorname{Arc\,cos}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \varphi=\operatorname{Arc\,tg}\frac{y}{x}, \tag{1a}$$

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x p_x + y p_y + z p_z) \\ p_\vartheta &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(z x p_x + z y p_y - (x^2+y^2) p_z) \\ p_\varphi &= -y p_x + x p_y . \end{aligned} \tag{1b}$$

3. Punkttransformationen in der Quantenmechanik

Für die analoge Transformation in der Quantenmechanik benötigen wir offenbar einen Operator S mit den Eigenschaften**, ***:

$$R=S^{-1}XS, \quad \Theta=S^{-1}YS, \quad \Phi=S^{-1}ZS, \tag{2a}$$

$$P_r=S^{-1}P_xS, \quad P_\vartheta=S^{-1}P_yS, \quad P_\varphi=S^{-1}P_zS. \tag{2b}$$

---

* Arc cos x bzw. Arc tg x sollen diejenigen Zweige der zyklometrischen Funktionen kennzeichnen, die $0\leqq\vartheta\leqq\pi$ und $0\leqq\varphi<2\pi$ je nach den Vorzeichen von x, y, z definieren. Dabei ist zu beachten, daß sich damit natürlich Unstetigkeiten der Funktionen bzw. ihrer Ableitungen an den Rändern der Definitionsbereiche ergeben.

** Quantenmechanische Operatoren werden durch große, ihre Eigenwerte durch kleine Buchstaben gekennzeichnet; ferner wird überall $\hbar=1$ gesetzt.

*** Die Zuordnung $R\leftrightarrow X$, $\Theta\leftrightarrow Y$, $\Phi\leftrightarrow Z$ ist selbstverständlich willkürlich und könnte beliebig permutiert werden. Im übrigen sieht man, daß die Transformationen (2a, b) hinsichtlich der physikalischen Dimension der Operatoren nicht korrekt sind, so daß noch mit geeigneten dimensionsbehafteten Konstanten multipliziert werden müßte.

Legen wir das durch

$$X\,|x,y,z\rangle = x\,|x,y,z\rangle \quad \text{usw.},$$

$$\langle x',y',z'|x,y,z\rangle = \delta(x'-x)\,\delta(y'-y)\,\delta(z'-z) \equiv \delta(\vec{r}\,'-\vec{r})$$

definierte (uneigentliche) Basissystem von Zustandsvektoren zu Grunde, so soll (Definition der Operatoren R, Θ, Φ!)

$$\begin{aligned} R\,|x,y,z\rangle &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,|x,y,z\rangle \\ \Theta\,|x,y,z\rangle &= \operatorname{Arc\,cos}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,|x,y,z\rangle \\ \Phi\,|x,y,z\rangle &= \operatorname{Arc\,tg}\frac{y}{x}\,|x,y,z\rangle \end{aligned} \tag{3}$$

gelten.

Daraus folgt mit (2a) nach Multiplikation mit S von links

$$S\,R\,|x,y,z\rangle = X\,S\,|x,y,z\rangle = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,S\,|x,y,z\rangle \quad \text{usw.},$$

also

$$S\,|x,y,z\rangle = \alpha\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \operatorname{Arc\,cos}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \operatorname{Arc\,tg}\frac{y}{x}\right\rangle \tag{4}$$

$$\equiv \|r,\vartheta,\varphi\rangle .$$

Wählt man zweckmäßigerweise die Normierung

$$\langle r',\vartheta',\varphi'\|r,\vartheta,\varphi\rangle = \frac{\delta(r'-r)\,\delta(\vartheta'-\vartheta)\,\delta(\varphi'-\varphi)}{r'\,r\sqrt{\sin\vartheta'\,\sin\vartheta}} \equiv \delta(\vec{r}\,'-\vec{r}),$$

so ergibt sich für den Normierungsfaktor α, falls wir ihn reell wählen*,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r\sqrt{\sin\vartheta}}.$$

Für den inversen Operator S^{-1} erhält man entsprechend

$$S^{-1}\,\|r,\vartheta,\varphi\rangle = |x,y,z\rangle$$

oder, in anderer Schreibweise**,

$$S^{-1}\,|x,y,z\rangle = x\sqrt{\sin y}\,|x\sin y\cos z, x\sin y\sin z, x\cos y\rangle \tag{5}$$

mit

$$0 \leqq x < \infty, \quad 0 \leqq y \leqq \pi, \quad 0 \leqq z < 2\pi .$$

An der Transformation (4) für die Zustandsvektoren erkennt man, daß das neue System der $\|r,\vartheta,\varphi\rangle$ zwar vollständig im physikalischen Sinne

* Damit haben wir über den noch freien Phasenfaktor verfügt.

** Es ist zweckmäßig, alle Operatoren im System der $|x,y,z\rangle$ zu definieren.

ist, daß jedoch mathematisch eine isomorphe Abbildung des durch die Vektoren $|x, y, z\rangle$ aufgespannten Hilbertraums in sich vorliegt, wobei der gesamte Raum auf einen echten Unterraum abgebildet wird. Es gilt somit zwar $S^{-1}S=1$, aber $SS^{-1}\subset 1$, da der Definitionsbereich von S^{-1} nur Vektoren $|x, y, z\rangle$ mit $0\leqq x<\infty$, $0\leqq y\leqq\pi$, $0\leqq z<2\pi$ umfaßt. Der Operator S ist also im mathematischen Sinne nur isometrisch, nicht unitär*. Unter Beachtung der Relation

$$e^{iP_x a}|x, y, z\rangle=|x+a, y, z\rangle \quad \text{usw.}$$

lassen sich die Operatoren S bzw. S^{-1} leicht explizit angeben**:

$$\begin{aligned} S=\operatorname{Exp} i\Big\{&P_x\Big(\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}-X\Big)+\\ &+P_y\left(\operatorname{Arc\,cos}\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}-Y\right)+P_z\left(\operatorname{Arc\,tg}\frac{Y}{X}-Z\right)\Big\}\times\\ &\times\frac{1}{\sqrt[4]{X^2+Y^2+Z^2}\sqrt[4]{X^2+Y^2}}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} S^{-1}=\operatorname{Exp} i\{&P_x(X\sin Y\cos Z-X)+P_y(X\sin Y\sin Z-Y)+\\ &+P_z(X\cos Y-Z)\}\cdot X\sqrt{\sin Y}. \end{aligned} \tag{7}$$

Damit verifiziert man unmittelbar die Relationen (4) und (5).

Mit diesen Operatoren ergibt sich aus (2a, b) nach einigen elementaren Rechnungen***:

$$\begin{aligned} R&=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\\ \Theta&=\operatorname{Arc\,cos}\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\\ \Phi&=\operatorname{Arc\,tg}\frac{Y}{X} \end{aligned} \tag{8}$$

---

* Auf isometrische Transformationen wurde in ähnlichem Zusammenhang auch von PAULI[1] hingewiesen.

** Die Operatorfunktion $\operatorname{Exp} i\{\ldots\}$ ist dabei wie folgt definiert: Man bilde die Exponentialreihe und setze in jedem Reihenglied die Ortsoperatoren X, Y, Z rechts vor die Impulsoperatoren; vgl. auch JORDAN[2], wo allgemeine Punkttransformationen bereits ausführlich untersucht wurden.

*** Dabei wurden u.a. die Beziehungen

$$[X,S]=i\frac{\partial S}{\partial P_x} \quad \text{und} \quad [S^{-1},P_x]=i\frac{\partial S^{-1}}{\partial X} \quad \text{usw.}$$

benutzt.

[1] PAULI, W.: Handbuch der Physik, Bd. V/1, S. 63/64. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958.

[2] JORDAN, P.: Z. Physik **37**, 383 (1926); **38**, 513 (1926).

und

$$P_r=(P_x X+P_y Y+P_z Z+i)\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$$

$$P_\vartheta=\left(P_x X+P_y Y+\frac{i}{2}\right)\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}-P_z\sqrt{X^2+Y^2} \tag{9}$$

$$P_\varphi=-P_x Y+P_y X\,.$$

Bis auf die Transformation der Impulse P_r und P_ϑ, in der noch die Hermitezität sichernde Zusatzterme auftreten, ergeben sich also die klassischen Beziehungen (1a, b).

4. Die Operatoren in der Schrödinger-Darstellung*

In der Schrödinger-Darstellung erhält man aus (9) nach kurzer Rechnung

$$P_r=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r$$

$$P_\vartheta=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sqrt{\sin\vartheta} \tag{10}$$

$$P_\varphi=\frac{1}{i}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

im Einklang mit der allgemeinen Definition

$$P_q=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q}\sqrt{g}\,,$$

wobei g die Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation ist.

Hinsichtlich der Variablen r, ϑ, φ (=Eigenwerte der Operatoren R, Θ, Φ) gilt jedoch die klassische Transformation (1a), so daß man z.B. bei φ die oben erwähnten Unstetigkeiten bei $\varphi=0$ und $\varphi=2\pi$ beachten muß. Daraus folgt, daß sich für den Kommutator $[P_\varphi, \varphi]$ Zusatzterme ergeben und die zugehörige Unbestimmtheitsrelation geändert wird**.

Aus physikalischen Gründen ist zu fordern, daß die Operatoren selbstadjugiert sind, m.a.W. die Beziehung

$$\int u^*(P_i v)\,d\tau=\int (P_i u)^* v\,d\tau$$

---

* Einige Resultate dieses Abschnitts wurden uns vor längerer Zeit von Herrn JENSEN mitgeteilt und gaben die Anregung zu den hier mitgeteilten Überlegungen.

** Die Nichtunitarität des Operators S hat zur Folge, daß Produkte von Operatoren im allgemeinen nicht in Produkte der transformierten Operatoren transformiert werden: Wegen $SS^{-1}\subset 1$ ist $S^{-1}(A\cdot B)S\neq S^{-1}AS\cdot S^{-1}BS$; vgl. Abschnitt 5.

erfüllen. Gl. (11) ist eine Bedingung an die Klasse der zulässigen Wellenfunktionen u, v und legt damit den Definitionsbereich des jeweiligen Operators P_i fest. Man rechnet leicht nach, daß für P_φ und P_ϑ die Definitionsbereiche durch die Randbedingungen*

$$u(r,\vartheta,\varphi)|_{\varphi=0} = u(r,\vartheta,\varphi)|_{\varphi=2\pi}$$
$$\sqrt{\sin\vartheta}\, u(r,\vartheta,\varphi)|_{\vartheta=0} = \sqrt{\sin\vartheta}\, u(r,\vartheta,\varphi)|_{\vartheta=\pi}$$

gegeben sind. Zum Definitionsbereich beider Operatoren gehören also insbesondere die auf der Oberfläche der Einheitskugel eindeutigen und nichtsingulären Funktionen, darüber hinaus aber auch die Eigenfunktionen ψ_λ von P_ϑ:

$$P_\vartheta \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda$$

mit

$$\psi_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{i\lambda\vartheta}}{\sqrt{\sin\vartheta}}; \qquad \lambda = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots .$$

Diese Eigenfunktionen werden bei $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ jedoch singulär und gehören nicht zum Definitionsbereich des Quadrates des Drehimpulses, so daß sie kaum eine praktische Bedeutung haben**.

5. Vertauschungsrelationen

Nach dem in Abschnitt 4 gesagten muß man auch in der Schrödinger-Darstellung z. B. zwischen dem Operator Φ und dem Winkel φ unterscheiden: Die Eigenwerte des ersteren liegen zwischen 0 und 2π, während üblicherweise der Azimutwinkel φ nicht auf dieses Intervall beschränkt wird. Unter Beachtung dieser Tatsache ergibt sich nach kurzer Rechnung (vgl. JUDGE und LEWIS [5], ***)

$$P_\varphi \Phi - \Phi P_\varphi = -i + 2\pi i \{\delta(\varphi) + \delta(2\pi - \varphi)\}.$$

* Hinsichtlich P_r ist die Situation komplizierter, da sich dieser Operator nur durch eine Erweiterung 2. Art zu einem selbstadjugierten Operator fortsetzen läßt [3, 4].

** Für das Quadrat des Drehimpulses erhält man

$$L^2 = P_\vartheta^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta} P_\varphi^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{cotg}^2\vartheta,$$

womit sich sofort ein Widerspruch ergäbe, falls die Operatoren L^2 und P_ϑ^2 einen gemeinsamen Definitionsbereich hätten.

*** Daß die üblichen Vertauschungsrelationen ohne Zusatzterme nur für stetige Variable gelten, wurde bereits von JORDAN [6] gezeigt.

[3] ACHIESER, R. I., u. I. M. GLASMANN: Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum, S. 75–88. Berlin: Akademie-Verlag 1960.

[4] DUNFORD, R., and J. T. SCHWARTZ: Linear operators II, p. 1222–1239. New York and London: Interscience Publ. 1963.

[5] JUDGE, D., and J. T. LEWIS: Phys. Letters **5**, 190 (1963).

[6] JORDAN, P.: Z. Physik **44**, 1 (1927).

Als Konsequenz des geänderten Kommutators resultiert jedoch automatisch die richtige Unbestimmtheitsrelation für die z-Komponente des Drehimpulses und den Azimutwinkel φ:

$$\Delta P_\varphi \frac{\Delta\varphi}{1-3\left(\frac{\Delta\varphi}{\pi}\right)^2} \geqq \frac{1}{2}$$

wie kürzlich von JUDGE[7] bzw. EVETT und MAHMOUD[8] gezeigt wurde*.

* Ein anderer Weg wurde von ROBINSON und HIRSCHFELDER[9] beschritten, indem sie statt des Ortsoperators jeweils den zugehörigen Impulsoperator modifizieren.

[7] JUDGE, D.: Phys. Letters **5**, 189 (1963); — Nuovo cimento **31**, 332 (1964).

[8] EVETT, A. A., and H. H. MAHMOUD: Nuovo cimento **38**, 295 (1965).

[9] ROBINSON, P. D., and J. O. HIRSCHFELDER: J. Math. Phys. **4**, 348 (1963). — ROBINSON, P. D.: J. Math. Phys. **7**, 2060 (1966).

Zeitschrift für Physik 202, 125–149 (1967)

Treatment of Nuclear Reactions Above the Two-Particle Threshold*

MICHAEL DANOS and WALTER GREINER**
National Bureau of Standards, Washington, D. C.

Received January 21, 1967

A formalism, exact in principle, is developed for describing nuclear reactions above the two-particle emission threshold. The eigenchannels, i.e. the eigenstates of the S-matrix, are computed directly from the shell model. No artificial assumptions have to be made about the properties of the rescattering of the two final state particles; the final state interactions are completely taken into account. Detailed prescriptions are given on how to reduce the exact description to a form amenable to numerical computations. Finally, long-lived intermediate states leading to the so-called sequential decays can, if so desired, be singled out and treated separately. This again involves no specific assumptions. The treatment is applicable also above the three-or more-particle threshold.

I. Introduction

Below the particle emission threshold the nuclear eigenstates are in general non-degenerate, except for the trivial orientation degeneracy of a nucleus with finite spin in a field-free space. In contrast, above the particle threshold the system is at each energy N-fold degenerate if at that energy N channels are open: evidently, for example, the N different wave functions which describe incoming waves in one of the channels and outgoing waves in all channels are mutually orthogonal. Above the two-particle threshold the degeneracy becomes even more complicated in that the available energy can distribute itself in an arbitrary partition between the two outgoing particles. In addition to the N-fold discrete degeneracy, the system now has also a continuous degeneracy.

Two problems thus may be singled out as central in the treatment of reactions where two particles can be emitted simultaneously. They are, first, the classification of the states, and, second, the casting of the nuclear problem into such a form that the amplitudes of the above defined states can be determined. In this paper we use the eigenchannels, i.e. the eigenstates of the S-matrix, as the set of states in which we describe the continuum state of the nuclear system. In other words, we use the S-matrix itself to provide us with the needed classification scheme. For the second problem, for the treatment of the nuclear system and the

* Supported in part by Deutsches Ministerium für Wissenschaft und Forschung and Deutsche Forschungsgemeinschaft.

** Permanent address: Institut für Theoretische Physik, Universität Frankfurt, Frankfurt/Main, Germany.

actual calculation of the S-matrix we find that, again, it is possible to define an inside region to which all nuclear interactions are confined, and on the outside of which the wave function has the asymptotic form of a product of a free one- or two-particle wave function with the wave function of the residual nucleus. The nuclear problem then can be solved by considering only the inside region, e.g. by shell model methods. In complete analogy to the previously treated one-particle channels below the two-particle threshold[1] it is also here possible to obtain directly the eigenchannel solutions of the nuclear problem-by an appropriate choice of the boundary conditions. The inside region must here, however, be chosen larger than in the case of one-particle channels and, in contrast to that case, its size must be increased if the accuracy of the solution is to be improved. This is an important point since we are interested in providing a method by which actual computations can be performed, rather than in giving a formal theory where the size of the internal region would be of minor importance. In any way, as we shall see, the required magnitude of the matching radius, b, between the inside and the outside regions is still sufficiently small to permit the use of present-day computers, albeit not the small ones, to solve the nuclear problem. Thus the nuclear problem again can be treated by shell model methods including configuration interactions. The antisymmetrization of the wave function then also does not introduce any difficulties.

The required size of the inside region is determined by two conditions. First, the "final state interactions" should be included in the solution of the inside problem. For short range potentials, the contribution of the outside region to the two-body matrix elements of correlated free particle wave functions is proportional to $1/b^2$. The "rescattering" of the two emitted particles thus can be restricted to the inside region. This is not so for long range forces. Therefore, the treatment of the outside problem naturally has to include the Coulomb forces. An extensive literature exists which is concerned with this problem[2]. We are not going to deal with this complication in the present paper. Formally, it would only require the replacement of the asymptotic two-particle wave functions, e.g. (10) or (19) below, by appropriate solutions of the Coulomb problem. Second, the orthogonality of the two-particle channels also depends on the size of the internal region. It is expected that this will be the more demanding of the two conditions.

---

[1] DANOS, M., and W. GREINER: Phys. Rev. **146**, 708 (1966).

[2] The behaviour of the wave function at large distance, i.e. the effects of mutual shielding by the particles, has been discussed by TEMKIN, A.: Preprint X-641-66-46, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, February 1966 (unpublished); an extensive bibliography is contained in the paper by RUDGE, M. R. H., and M. J. SEATON: Proc. Roy. Soc. (London) A **283**, 262 (1965).

The method of this paper is useful in the energy region not too far above the two-particle threshold. It could thus, e.g., be applied to the description of a (p, pn) reaction at moderate proton energies. At high proton energies the reaction can be described by a knock-on process in which the most important aspects, besides the shell model character of the wave function, i.e. the one-body distribution function, are the short-range two-body correlations in the nuclear wave function. The long-range correlations described by the shell model with configuration interaction are here of lesser importance. They are, however, the dominant feature at relatively lower energies, i.e. close to threshold.

Finally, no new problems are expected to arise for three- or many-particle decays, except for an at present unmanageable increase in the magnitude of the needed numerical computations. Also, it is doubtful whether at such high energies a complete shell model treatment of the nuclear problem is even desirable. More likely than not a description of the individual processes like, for example, knock-on processes alluded to above, will there be more useful and more transparent. Therefore, we shall restrict ourselves to the two-particle channels, i.e. to the energy region below the three-particle threshold.

We do not consider the center-of-mass motion. The treatment thus is restricted to the heavy nuclei. This restriction would be removed by using such wave functions in solving the nuclear problem in the inside region in which the spurious components already have been eliminated.

In Sections II and III we define the two-particle channels in terms of uncorrelated product wave functions and describe some of the characteristics of the two-particle eigenchannels. We also write down the expansion of the S-matrix in terms of the one-particle and two-particle eigenchannels. The need for, and the physical characteristics of, correlated two-particle wave functions are discussed in Section IV, and the expansion of the S-matrix in terms of these wave functions is given in Section V. The method and the details of the actual computation of the S-matrix from the nuclear shell model are described in Sections VI and VII. Finally, in Section VIII the explicit treatment of sequential decays involving a long-lived intermediate state is discussed.

II. The Eigenchannel Quantum Numbers

Above the two-particle threshold a nucleus can decay by the emission of a single high energy particle or by emitting two lower energy particles (see Fig. 1). At the energy E of the compound state the energies E_c of the one-particle channels are discrete while the energies of the particles 1 and 2 in the two-particle channels, ε_1 and ε_2, have a continuous distribution within the range

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2=E-E_f\equiv E_\kappa \tag{1}$$

where E_f is the energy of the final state in the $(A-2)$-system. The indices c and κ denote all quantum numbers needed to specify the one-particle and the two-particle channels, respectively. Below the three-particle threshold the eigenenergy E_f belongs to the discrete spectrum

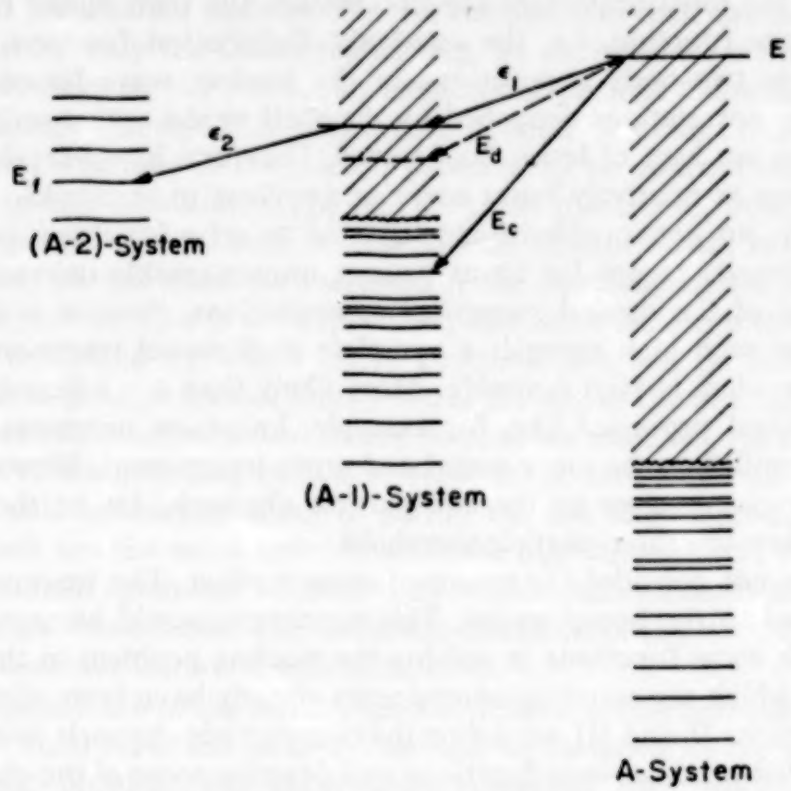


Fig. 1. Schematic level diagram. The discrete spectrum extends up to the particle emission threshold. At an energy E of the A-system, the compound system, a single-particle emission is possible leading to a discrete state of the $(A-1)$-system. One such decay is shown; the particle energy is denoted by E_c. In the shown two-particle decay leading to the final state E_f of the $(A-2)$-system the energies of the first and the second particle are denoted by ε_1 and ε_2 respectively. In general, nothing distinguishes the intermediate state of the $(A-1)$-system. Also, in general the question of which of the particles has been emitted first, is meaningless. Only in the special case where a long-lived "discrete" intermediate state is involved, such a question has a definable meaning. Then the "first" particle is emitted with a more or less sharp energy, indicated by E_d. Such decays are called "sequential"

of the $(A-2)$-system. The different two-particle channels of the S-matrix thus need essentially two indices for a complete classification of the state, one of them being continuous. So the S-matrix will have a structure shown in Fig. 2. In the asymptotic region a channel wave function thus has the form

$$\Psi = \Sigma_c (A_c I_c^{(1)} + B_c O_c^{(1)}) \tilde{\psi}_c + \Sigma_\kappa \int_0^{E_\kappa} d\varepsilon [A_\kappa(\varepsilon) I_\kappa(\varepsilon) + B_\kappa(\varepsilon) O_\kappa(\varepsilon)] \tilde{\psi}_\kappa . \quad (2)$$

In this expression the incoming and outgoing waves I_c, O_c, in the one-particle channels have the usual meaning, i.e. for uncharged particles they are given by

$$I_{El} = -i(\pi k r/2)^{\frac{1}{2}} H^{(2)}_{l+\frac{1}{2}}(k r) \sim e^{-i(k r - l\pi/2)}$$
$$O_{El} = i(\pi k r/2)^{\frac{1}{2}} H^{(1)}_{l+\frac{1}{2}}(k r) \sim e^{i(k r - l\pi/2)}. \tag{3}$$

The $\tilde{\psi}_c$ contains all angular momentum parts in addition to the coordinates of the nucleus $(A-1)$ in its final state. The two-particle wave

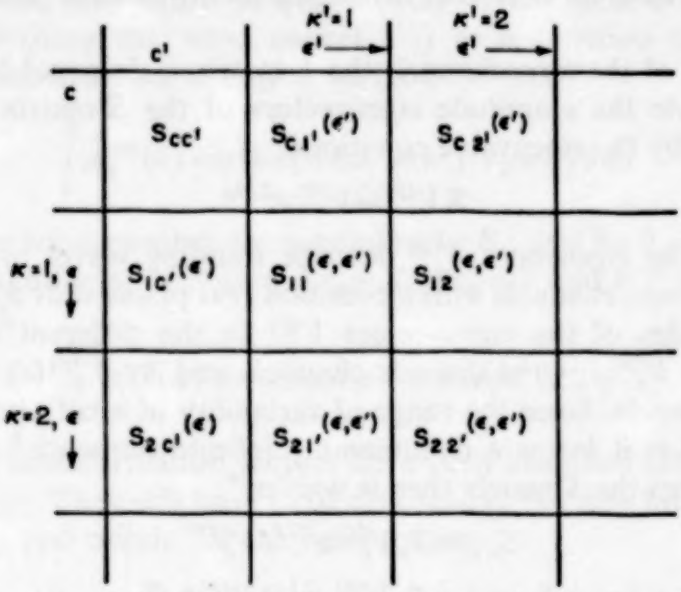


Fig. 2. Structure of the S-matrix in the experimental channel representation

functions $I_\kappa(\varepsilon)$ and $O_\kappa(\varepsilon)$ are constructed in an analogous fashion. They are products of one-particle wave functions and are given by

$$I_{(l_1 l_2)L}(\varepsilon) = -(\pi k_1 r_1/2)^{\frac{1}{2}} (\pi k_2 r_2/2)^{\frac{1}{2}} H^{(2)}_{l_1+\frac{1}{2}}(k_1 r_1) H^{(2)}_{l_2+\frac{1}{2}}(k_2 r_2)$$
$$\sim e^{-i[k_1 r_1 + k_2 r_2 - (l_1+l_2)\pi/2]}$$
$$O_{(l_1 l_2)L}(\varepsilon) = (\pi k_1 r_1/2)^{\frac{1}{2}} (\pi k_2 r_2/2)^{\frac{1}{2}} H^{(1)}_{l_1+\frac{1}{2}}(k_1 r_1) H^{(1)}_{l_2+\frac{1}{2}}(k_2 r_2) \tag{4}$$
$$\sim e^{+i[k_1 r_1 + k_2 r_2 - (l_1+l_2)\pi/2]}.$$

Here

$$(\hbar^2 k_1^2/2m) = \varepsilon, \quad (\hbar^2 k_2^2/2m) = E_\kappa - \varepsilon. \tag{5}$$

Evidently these functions are not antisymmetrized. In the end we will, however, use antisymmetrized functions. Again, the function $\tilde{\psi}_\kappa$ contains all angular momentum parts in addition to the final state wave function of the $(A-2)$-system $\psi^{[I_f]}_{A-2}$

$$\tilde{\psi}_\kappa = (1/r_1 r_2)\,[\Psi^{[I_f]}_{A-2} \times [Y^{[l_1]} \times Y^{[l_2]}]^{[L]}]^{[I]} \tag{6}$$

where we have, for simplicity, suppressed the spin.

Thus we obtain for a general scattering state the defining equations of the S-matrix

$$\begin{aligned} B_c &= -\Sigma_{c'} S_{c\,c'} A_{c'} - \Sigma_{\kappa'} \int_0^{E_{\kappa'}} d\varepsilon' \, S_{c\,\kappa'}(\varepsilon') A_{\kappa'}(\varepsilon') \\ B_\kappa(\varepsilon) &= -\Sigma_{c'} S_{\kappa\,c'}(\varepsilon) A_{c'} - \Sigma_{\kappa'} \int_0^{E_{\kappa'}} d\varepsilon' \, S_{\kappa\,\kappa'}(\varepsilon, \varepsilon') A_{\kappa'}(\varepsilon') . \end{aligned} \tag{7}$$

These equations are explicit, but formally nonsymmetric between continuous and discrete channels, i.e. between two-particle and one-particle channels.

In terms of the eigenchannels the S-matrix is diagonal by definition. Let us denote the amplitude eigenvectors of the S-matrix by V. They are defined by the eigenvalue equations

$$S V^{(\beta)} = V^{(\beta)} e^{2i\delta_\beta} . \tag{8}$$

Physically, the eigenstates $V^{(\beta)}$ describe standing waves in all, discrete and continuous, channels with a common real phase shift δ_β. We denote the amplitudes of the eigenvectors $V^{(\beta)}$ in the different experimental channels by $V_c^{(\beta)}$ for the discrete channels and by $V_\kappa^{(\beta)}(\varepsilon)$ for the continuous channels. Since the range of variability of ε is finite the index β is discrete, i.e. it forms a denumerably infinite sequence[3]. In terms of the eigenstates the S-matrix then is written[4]

$$\begin{aligned} S_{c\,c'} &= \Sigma_\beta V_c^{(\beta)} e^{2i\delta_\beta} V_{c'}^{(\beta)*} \\ S_{c\,\kappa'}(\varepsilon) &= \Sigma_\beta V_c^{(\beta)} e^{2i\delta_\beta} V_{\kappa'}^{(\beta)}(\varepsilon)^* \\ S_{\kappa\,\kappa'}(\varepsilon, \varepsilon') &= \Sigma_\beta V_\kappa^{(\beta)}(\varepsilon) e^{2i\delta_\beta} V_{\kappa'}^{(\beta)}(\varepsilon')^* \end{aligned} \tag{9}$$

We reiterate that no integrations occur in (9) because the index β is a member of a discrete set.

III. The Form of the Asymptotic Wave Function of the Eigenchannels

Consider the wave function of a two-particle channel in the asymptotic region

$$\varphi_\kappa^{(\beta)}(\varepsilon) = e^{-i\delta_\beta} I_\kappa(\varepsilon) - e^{i\delta_\beta} O_\kappa(\varepsilon) , \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \Psi^{(\beta)} &= \Sigma_\kappa \int_0^{E_\kappa} d\varepsilon \, V_\kappa^{(\beta)}(\varepsilon) \varphi_\kappa^{(\beta)}(\varepsilon) \tilde{\psi}_\kappa \\ &\sim \Sigma_\kappa \int_0^{E_\kappa} d\varepsilon \, V_\kappa^{(\beta)}(\varepsilon) \left[-2i \sin(k_1 r_1 + \delta_\beta - (l_1 + l_2)\pi/2) \right] \tilde{\psi}_\kappa . \end{aligned} \tag{11}$$

[3] COURANT, R., and D. HILBERT: Methoden der Mathematischen Physik, Bd. 1, S. 104, Berlin: Springer 1931.

[4] FRANK, P. H., and R. v. MISES: Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, vol. 1. p. 113. New York: Dover Publications 1961.

The radial dependence of $\Psi^{(\beta)}$ is evidently qualitatively determined by the fact that it is a superposition of waves of different wave length, i.e. they are wave packets in r_1 and r_2. Focussing now our attention on some particular κ and some β, say $\beta=n$, we note that the shape of the wave packet is determined by two factors, first by the maximum energy E_κ of that channel, and second by the amplitude distribution $V_\kappa^{(n)}(\varepsilon)$. The latter form some kind of a Fourier expansion. The details depend on the dynamics of the system. However, since the functions $V^{(n)}(\varepsilon)$ form an orthogonal set, they must be qualitatively of the form of sin- or cos-functions. Writing the wave packet (11) as a function of the wave-number k instead of the energy ε, we have

$$\int_0^K \tilde{A}_\kappa^{(n)}(k) \sin\left(k r_1+(K^2-k^2)^{\frac{1}{2}} r_2+\vartheta\right) dk . \tag{12}$$

Here K is the wave-number corresponding to E_κ, and $\vartheta=\delta_n-(l_1+l_2)\,\pi/2$. We now make the substitution $Kr_1=X$, $Kr_2=Y$ and $k/K=\sin\varphi$. Then (12) becomes

$$\int_0^{\pi/2} A^{(n)}(\varphi) \sin\left(X \sin\varphi+Y\cos\varphi+\vartheta\right) d\varphi .$$

The diverse transformation factors have been absorbed into the definition of $A^{(n)}(\varphi)$. They still have to be orthogonal. We now take the $A^{(n)}(\varphi)$ to be $\cos n\varphi$ and obtain for the wave packet

$$\Psi_\kappa^{(n)}(X, Y) \propto \int_0^{\pi/2} \cos n\varphi \sin\left(X \sin\varphi+Y\cos\varphi+\vartheta\right) d\varphi . \tag{13}$$

These integrals are very closely related to the integral representations of the Bessel functions

$$J_{2n}(z)=2/\pi \int^{\pi/2} \cos(2n\varphi)\cos(z\sin\varphi)\, d\varphi . \tag{14}$$

We thus can expect the behavior of (13) to be like the Bessel functions

$$\Psi_\kappa^{(n)}(X, Y) \approx J_n(a X+b Y) \tag{15}$$

where a and b are some coefficients. The fine structure in $A_\kappa(\varepsilon)$ evidently determines which Fourier-components are important. So, for example, if $E_\kappa \approx 10$ MeV and there exists a bump of about $\Delta\varepsilon \approx 1$ MeV (see Fig. 3), then evidently $n \approx 10$ will be needed in the description of such a distribution. The superposition of the wave functions, Eq. (11), induces a certain correlation between r_1 and r_2. It is thus useful to use such functions as a basis set which already contain correlations between r_1 and r_2, i.e. we expand $\Psi^{(\beta)}$ in terms of a set of standard superpositions of the form

(11). Such an expansion can be expected to converge rapidly, allowing a representation of $V^{(\alpha)}(\varepsilon)$ by a small number of terms. We now turn to a discussion of such wave functions.

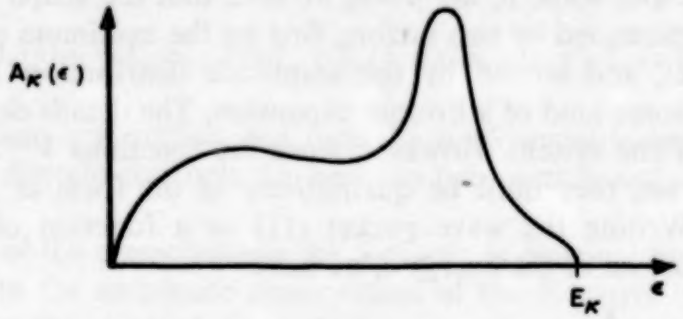


Fig. 3. Example of a two-particle channel; the peak could be interpreted as a sequential decay

IV. Characteristics of the Correlated Two-Particle Wave Functions

The qualitative reason why the product wave functions, Eq. (4), are not well suited as representations of actual two-particle channels is the fact that in (4) the particle momenta k_1 and k_2 have sharp values while only the total energy is given in a two-particle channel. The wave functions (4) are solutions of the equation

$$(\nabla_1^2+\nabla_2^2+k_1^2+k_2^2)\,\varphi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=0 \tag{16}$$

while the correct Schrodinger equation is

$$(\nabla_1^2+\nabla_2^2+k^2)\,\Phi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=0\,. \tag{17}$$

Naturally, (16) is a special case of (17), and also the functions Φ can be expanded in terms of the functions φ. The main difference between these functions is precisely the point that the energy partition between particles 1 and 2 is not specified in the function Φ. Solutions to (17) are given by MORSE and FESHBACH[5]. Introducing new variables r, α for the radii by the substitution (see Fig. 4)

$$\begin{aligned} r_1 &= r\cos\alpha \\ r_2 &= r\sin\alpha\,, \end{aligned} \tag{18}$$

Eq. (17) separates into total differential equations for α and r in addition to the well known angular momentum separations. As will be shown below, the angular variable α describes the energy partition between the two particles. A factorizable dependence of the amplitude on α has therefore an immediate physical significance.

[5] MORSE, P. M., and H. FESHBACH: Methods of theoretical physics, Cambridge, Mass.: MIT Press 1946; Chap. 12.3 New York: McGraw-Hill Book Co. 1953.

A general solution of (17) is

$$\Phi_\nu = N(\cos\alpha \sin\alpha)^{-\frac{1}{2}} d_{\mu,\lambda}^{(\mu+n)}(2\alpha) \times$$
$$\times r^{-2}[\cos\delta\, J_{2\mu+2n}(kr) - \sin\delta\, N_{2\mu+2n}(kr)] \times$$
$$\times [\mathbf{Y}^{[l_1]}(\hat{r}_1) \times \mathbf{Y}^{[l_2]}(\hat{r}_2)]_m^{[l]}, \qquad (19)$$
$$\mu = \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2 + 1), \quad \lambda = \tfrac{1}{2}(l_1 - l_2),$$
$$\nu = \{l_1, l_2, l, m; n\}$$

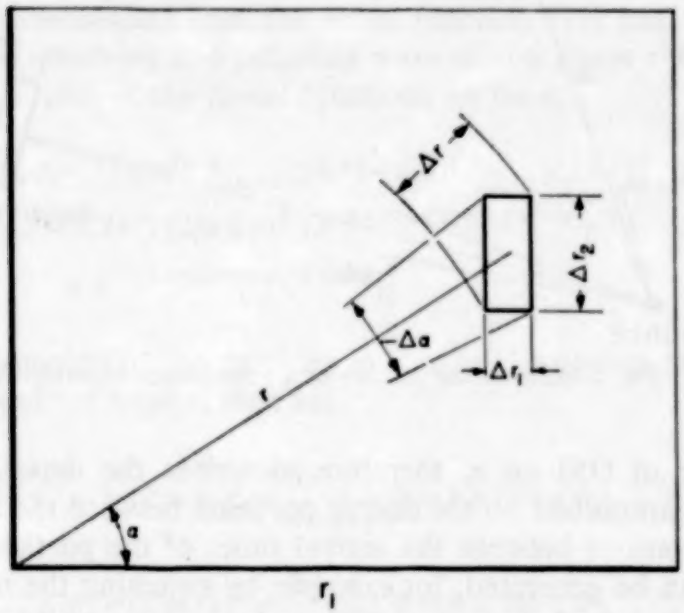


Fig. 4. Hyper-spherical coordinates for the two-particle system

and the volume element is

$$d\tau = d(\cos\vartheta_1)\, d\varphi_1\, d(\cos\vartheta_2)\, d\varphi_2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha\, d\alpha\, r^5\, dr. \qquad (20)$$

In (19), the function $d_{b,c}^{(a)}(\alpha) = \mathscr{D}_{b,c}^{(a)}(0, \alpha, 0)$ is the matrix element of the rotation operator as defined, e.g., in Ref. [6]. The quantum numbers l_1, l_2, l, m characterize the angular momenta of the particles 1 and 2 and the total angular momentum in the usual way. The quantum number $n = 0, 1, 2\ldots$ has the same physical significance as the quantum number n introduced in Section III. We now turn to the discussion of the correlations contained in the wave function (19). They must be reflected in the probabilities of coincidence experiments since the physical system here contains two particles. In fact, α can be determined by placing counter 1 at r_1, and counter 2 at r_2 (see Fig. 5) and recording a coincidence count.

[6] Edmonds, A. R.: Angular momentum in quantum mechanics. Princeton (N.J.): Princeton University Press 1957.

Since the particles have been emitted as a result of a nuclear reaction, the knowledge of r_1/r_2 implies a knowledge of $v_1/v_2=(\varepsilon_1/\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}=r_1/r_2$ because r_1 and r_2 can be chosen sufficiently large to render the lifetime of the excited state negligibly small compared to the time of flight. The

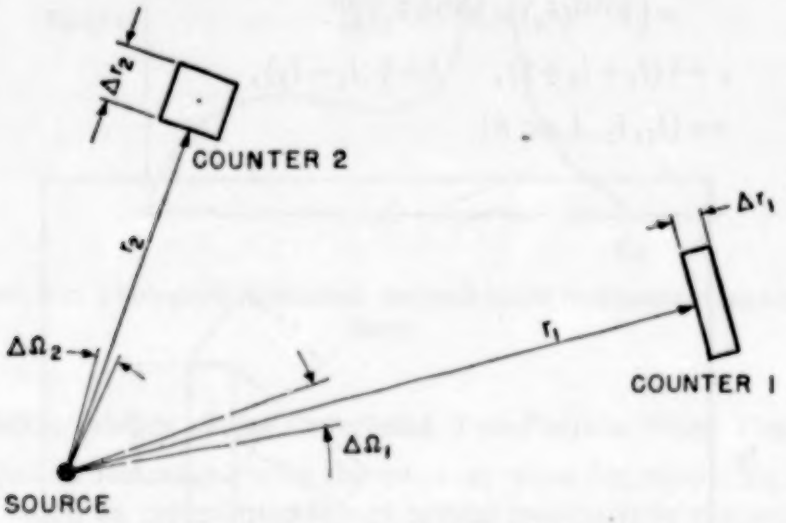


Fig. 5. Schematical picture of a coincidence experiment

dependence of (19) on α, therefore, describes the dependence of the probability amplitude on the energy partition between the two particles. Also, correlations between the arrival times of the particles at the two counters can be generated, for example, by switching the neutron beam on and off in a $(n, 2n)$ reaction. This induces in the well-known manner a large amplitude around $r=(2E/m)^{\frac{1}{2}}t$. This implies definite arrival times at r_1 and r_2 as a function of α; these can be observed by delayed coincidences. In short, the wave function (19) contains all correlations between the particles which have to be present in order to account for the conservation of the total energy: if by some measurement the energy ε_1 is determined, then a coincidence will occur only if the energy of particle 2 is $\varepsilon_2=E-\varepsilon_1$ within the accuracy of the experimental setup.

When expanding the wave function in terms of the set (19) the continuous variable ε of (2) is replaced by the discrete quantum number n. This is a decisive advantage of the correlated wave function (19) over the uncorrelated wave function (4). It allows a systematic approximation procedure: the expansion in n can be terminated at some value determined by the resolution desired in the description of the energy partition, Fig. 3.

Long lifetimes of the intermediate $(A-1)$ system generate a fine structure in the energy distributions of the two-particle channels. So, for example, a sequential decay is characterized by a narrow peak. It could be much narrower than that of Fig. 3. A description of such a

situation would required rather high values of the quantum number n. As can be seen from (19) the corresponding wave function is small for $kr<(\mu+n)\,\pi$. Therefore, if $r_2\approx a$ then r_1 must be large in order to allow for a sufficient time lapse between the emission of the particles. Evidently the description of such long-lived intermediate states would be impractical since it would require a very large number of functions (19). However, we shall see that such cases can be treated separately so that it is to be expected that a rather small number of wave functions (19), perhaps $n\leqq 5$, will suffice in a description of the two-particle decays.

We now demonstrate that the wave function (19) has the proper meaning of an incoming and outgoing wave with a phase shift δ. Using the asymptotic form of the Bessel functions we have,

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_\nu &\propto r^{-2}\left[\cos\delta\, J_{2\mu+2n}(kr)-\sin\delta\, N_{2\mu+2n}(kr)\right]\\ &\to(1/2r^2)\,(2/\pi kr)^{\frac{1}{2}}\left[e^{i(kr-(\mu+n)\pi-\frac{1}{2}\pi+\delta)}+\right.\\ &\left.+e^{-i(kr-(\mu+n)\pi-\frac{1}{2}\pi+\delta)}\right].\end{aligned}\tag{21}$$

The radial momenta of the particles in the, say, outgoing parts of (21) at a given α and for large r, then are

$$\begin{aligned}p_1=(2m\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}}&\sim\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial r_1}\Phi=\hbar k\cos\alpha\,\Phi\\ p_2=(2m\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}&\sim\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial r_2}\Phi=\hbar k\,\sin\alpha\,\Phi\end{aligned}\tag{22}$$

which demonstrates that the velocity ratio is given by the ratio of the radii as discussed above.

Because of the variables (18) of the two-particle wave function, it is necessary to use as the inside region the volume given by the surface $r=c$. The angular integrations now involve in addition to the usual variables $\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2$, the variable α. The integration over α corresponds to sweeping over varying ratios r_1/r_2 keeping r constant (see Fig. 6). This is different than in the case of one-particle channels where the surface is defined by, say, $r_1=\mathrm{b}$ which is also shown in Fig. 6. The orthogonality of the two-particle channels is almost trivial for the wave functions (19). It is expressed by the orthogonality of the functions $d^{(\nu)}$ for different ν.

However, in the projection of the channel function from the nuclear wave function a problem arises from the fact that the nuclear wave function is not asymptotic over the complete matching surface as a result of the presence of the nuclear interactions in the region $r_1<a$ and $r_2<a$ (see Fig. 6). This problem can be overcome by choosing a sufficiently

large "outer matching radius", b. Then the contribution from the region $r_1, r_2 < a$ becomes smaller in terms of the variable α and the contribution of this part to the orthogonality relations can be made arbitrarily small. This point will be discussed more completely below.

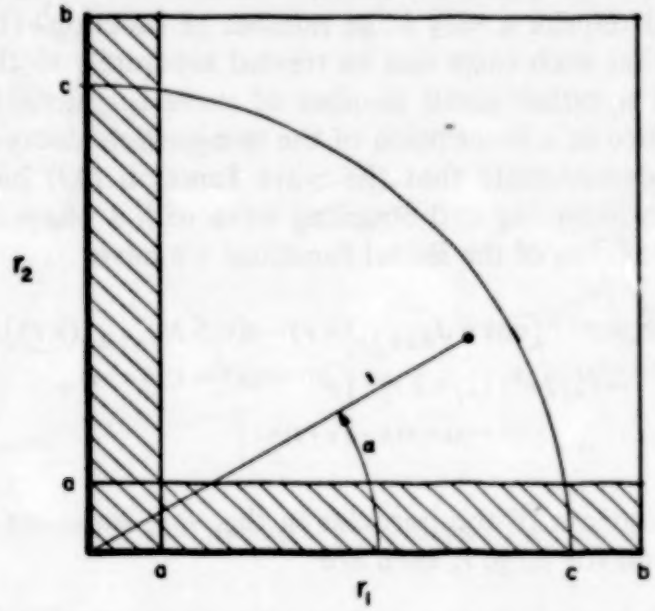


Fig. 6. The nuclear interactions are confined to $r_1, r_2 < a$. The one-particle channels can be defined by boundary conditions at $r_1, r_2 = b$. The two-particle channels must be matched at $r = c$. Here difficulties are encountered with respect to channel orthogonality because the circle $r = c$ enters the cross-hatched region. For details see text

The S-matrix now can be written for the correlated wave functions (19). In fact, it retains the form (9) completely, except that the energy ε does not appear explicitly any more. This continuous variable is replaced by the discrete index n which is contained in the general two-particle channel index ν, Eq. (19). We thus have

$$\begin{aligned} S_{c\,c'} &= \sum_{\beta} V_c^{(\beta)}\, e^{2i\delta_\beta}\, V_{c'}^{(\beta)} \\ S_{c\,\nu} &= \sum_{\beta} V_c^{(\beta)}\, e^{2i\delta_\beta}\, V_{\nu}^{(\beta)} \\ S_{\nu\,\nu'} &= \sum_{\beta} V_\nu^{(\beta)}\, e^{2i\delta_\beta}\, V_{\nu'}^{(\beta)}. \end{aligned} \tag{23}$$

In contrast to the form (9) of the S-matrix which is written for the uncorrelated two-particle wave functions, (23) contains only discrete indices. The dependence on ε is contained in the functions Φ_ν via the dependence on α, Eq. (22). Obviously the symmetry of the S-matrix (23)

in the character of the indices is more pleasing than that of the S-matrix (9). Also, the mathematics of discrete indices is easier than that of continuous indices[7-9].

V. Eigenstates of the S-Matrix

According to (21) the reduced incoming and outgoing correlated waves are

$$\begin{aligned} I_\nu &= (\tfrac{1}{2}\pi k)^{\frac{1}{2}} H^{(2)}_{2\mu+2n}(kr) \to r^{-\frac{1}{2}} e^{-i(kr-(\mu+n)\pi-\frac{1}{2}\pi)} \\ O_\nu &= (\tfrac{1}{2}\pi k)^{\frac{1}{2}} H^{(1)}_{2\mu+2n}(kr) \to r^{-\frac{1}{2}} e^{i(kr-(\mu+n)\pi-\frac{1}{2}\pi)}. \end{aligned} \tag{24}$$

Superficially the definitions (24) differ from that of the uncorrelated wave functions (4) in that the latter have two radial coordinates r_1, r_2, while (24) has only the one radial coordinate, r. The second variable, viz., α, as an angular variable of the hypersphere, has been incorporated into the channel wave function $\tilde{\Psi}_\nu$ together with the other angular variables, $\vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2$.

In terms of the functions (24) and (3) the general wave function is then

$$\Psi = \sum_c (A_c I_c^{(1)} + B_c O_c^{(1)})\, \tilde{\Psi}_c + \sum_\nu (A_\nu I_\nu + B_\nu O_\nu)\, \tilde{\Psi}_\nu \tag{25}$$

which is the analogue of Eq. (2).

The channel wave function $\tilde{\Psi}_\nu$ here is defined by

$$\tilde{\Psi}_\nu = N(v \sin 2\alpha)^{-\frac{1}{2}} d^{(\mu+n)}_{\mu,\lambda}(2\alpha)\, r^{-2} \times [\Psi^{[I_f]} \times [Y^{[l_1]} \times Y^{[l_2]}]^{[l]}]^{[I]}_M. \tag{26}$$

The factor N is determined by the normalization of the α-dependent functions in (26) and is

$$N = 2(2\mu+2n+1)^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

The factor $v^{-\frac{1}{2}}$ in (26) has been added to normalize the total functions, i.e.

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_\nu &= I_\nu \tilde{\Psi}_\nu \\ \mathscr{O}_\nu &= O_\nu \Psi_\nu \end{aligned} \tag{28}$$

to unit incoming and outgoing pair flux respectively. This normalization is the proper one as one can see by the following consideration. In a situation consisting of an $(A-1)$ target and an incoming particle (see Fig. 1), the reaction may lead either to the emission of a single particle,

[7] Wannier, G. H.: Phys. Rev. **90**, 817 (1953).
[8] Delves, L. M.: Nuclear Phys. **9**, 391 (1958–59).
[9] Smith, F. T.: Phys. Rev. **120**, 1058 (1960).

or to the emission of a pair of particles. In the two-particle channels thus the emission of two particles has to be given the same weight as the emission of a single particle in the one-particle channels. In a typical experiment, Fig. 5, we have two counters subtending solid angles $\Delta\Omega_1$, and $\Delta\Omega_2$, respectively. They have thickness Δr_1 and Δr_2. In terms of the variables (18) they occupy the volume

$$\Delta V = r_1^2 \Delta\Omega_1 r_2^2 \Delta\Omega_2 \Delta r_1 \Delta r_2 = r^2 \cos^2\alpha \Delta\Omega_1 r^2 \sin^2\alpha \Delta\Omega_2 r \Delta\alpha \Delta r \quad (29)$$

where $\Delta\alpha$ reflects the finite thickness of the counters. Except for the "trivial" volume elements associated with the angular dimensions of the counters the situation can again be discussed in an $r-\alpha$ diagram, Fig. 4. The coincidence counting rate dC/dt is given by

$$(dC/dt)\Delta t = \rho v \Delta A \Delta t = \Psi^* \Psi r^5 \cos^2\alpha \sin^2\alpha \Delta\Omega_1 \Delta\Omega_2 \Delta\alpha v \Delta t \quad (30)$$

where ΔA is the surface element of the six-dimensional hypersphere. Thus the velocity v indeed is the correct variable which determines the flux in the two-particle channels.

Returning now to the S-matrix, Eq. (7) is then replaced by

$$\begin{aligned} B_c &= -\sum_{c'} S_{cc'} A_{c'} - \sum_{\nu'} S_{c\nu'} A_{\nu'} \\ B_\nu &= -\sum_{c'} S_{\nu c'} A_{c'} - \sum_{\nu'} S_{\nu\nu'} A_{\nu'} . \end{aligned} \quad (31)$$

The eigenvalue equation for the S-matrix retains the form (8). In the one-particle channels, c, the eigenvectors $V_c^{(\beta)}$ have remained unchanged. We denote the amplitudes in the two-particle channels by $V_\nu^{(\beta)}$. Naturally, the amplitudes $V_\nu^{(\beta)}$ are related to the amplitudes $V_\kappa^{(\beta)}(\varepsilon)$ since the correlated wave functions can be expanded in terms of the uncorrelated wave functions. We shall later use this expansion when computing the nuclear wave function.

VI. Computation of the Eigenchannels

An eigenchannel wave function has the following explicit form in the asymptotic region

$$\begin{aligned} \Psi^{(\beta)} = &\sum_c V_c^{(\beta)} (e^{-i\delta^{(\beta)}} I_c^{(1)} - e^{i\delta^{(\beta)}} O_c^{(1)}) \tilde{\Psi}_c + \\ &+ \sum_\nu V_\nu^{(\beta)} (e^{-i\delta^{(\beta)}} I_\nu - e^{-i\delta^{(\beta)}} O_\nu) \tilde{\Psi}_\nu . \end{aligned} \quad (32)$$

As soon as the wave function $\Psi^{(\beta)}$ is known in the form (32) the amplitudes $V_c^{(\beta)}$ and $V_\nu^{(\beta)}$ can be obtained by projection using the channel orthogonality relations, i.e. the orthogonality of the $\tilde{\Psi}_c$-s and the $\tilde{\Psi}_\nu$-s. In order to solve the problem we thus must compute the wave function

(32) on the basis of the nuclear problem. More precisely, we have to define a procedure which insures that the solution of the nuclear problem is a pure eigenchannel wave function, and not a linear combination of several eigenchannel wave functions. The procedure for achieving this below the two-particle threshold has been described previously[10]. In short, it consisted in the solution of the transcendental equation

$$E(\delta)=E \tag{33}$$

which was shown to have solutions only for eigenphases $\delta=\delta^{(\beta)}$. We now discuss the construction of a similar equation for the present case, i.e. for one- and two-particle channels. It is based on the following characteristics of the eigenchannel wave function in the asymptotic region: For the one-particle channels the wave function is described by a standing wave in, say, r_1, with a phase shift $\delta^{(\beta)}$. In the two-particle channels it is a standing wave in r, with the same phase shift $\delta^{(\beta)}$. The procedure used in Ref.[1] for the one-particle channels consisted in employing in the solution of the nuclear problem exclusively such wave functions which had this characteristic. This was achieved by imposing suitable boundary conditions, the so-called natural boundary conditions, on the single-particle wave functions at $r_1=a$; the matching radius a was chosen such that the bound state wave functions were negligibly small at that distance.

For the two-particle channels the analogous natural boundary conditions would have to be imposed on the two-particle wave functions at a constant r, say at $r=c$. As can be seen from Fig. 6, such a boundary implies a correlated matching in r_1 and r_2 where both r_1 and r_2 vary between 0 and r. This does not allow the immediate use of single-particle product wave functions, the only kind of wave functions which can be used in practical shell model calculations. We therefore propose the following procedure.

1. The single particle wave functions are determined by, say, a Woods-Saxon-potential and by imposing boundary conditions at $r_1=b$, corresponding to a phase shift δ. We shall call the single particle wave functions $u_\kappa(\boldsymbol{r}_1)$, and they are given by

$$u_\kappa(\boldsymbol{r}_1)=f_\kappa(r_1)\,Y_{l\,m}(\hat{r}_1)\,. \tag{34}$$

At the same time we introduce the hole wave functions $v_\kappa(\boldsymbol{r}_1)$ in anticipation of the calculation of the nuclear problem. They are given by the Bell-convention[11]. The wave functions are normalized in the interval $0\leqq r_1\leqq b$. This is identical with the procedure of Ref.[1]. The one-particle channels then can be immediately written in terms of these wave functions.

[10] DANOS, M., and W. GREINER: Phys. Rev. **138**, B 93 (1965).
[11] BELL, J. S.: Nuclear Phys. **12**, 117 (1958).

2. The two-particle wave functions are expanded in a set of correlated free particle two-body wave functions which obey the proper boundary conditions, the natural two-particle boundary conditions, at $r=c$, viz.

$$\begin{aligned}&(\partial \ln \Phi/\partial \ln r)\\&\quad=[(\partial/\partial \ln r)\ln\{\cos\delta\, J_{2\mu+2n}(kr)-\sin\delta\, N_{2\mu+2n}(kr)\}]_{r=c}\end{aligned} \tag{35}$$

and which are regular at $r=0$. Together with the radial part of the wave equation (17) for the radial function R,

$$\frac{1}{r^5}\frac{d}{dr}\left(r^5\frac{dR}{dr}\right)+\left[k^2-\frac{1}{r^2}\left((2\mu+2n+1)^2-4\right)\right]R=0 \tag{36}$$

this then yields a set of eigenvalues, say k_p, and a set of eigenfunctions

$$\begin{aligned}\Phi_\nu(k_p)&=R_{\nu p}(r)\,\tilde{u}_\nu\\&=(\sqrt{2}/c)\left[\{J_{2\mu+2n}(X)\}^2-J_{2\mu+2n-1}(X)\,J_{2\mu+2n+1}(X)\right]^{-\frac{1}{2}}\times\\&\quad\times J_{2\mu+2n}(k_p r)\,\tilde{u}_\nu\end{aligned} \tag{37}$$

where

$$\begin{aligned}&\tilde{u}_\nu=N(\sin 2\alpha)^{-\frac{1}{2}}\,d^{(\mu+n)}_{\mu,\lambda}(2\alpha)\,r^{-2}\left[Y^{[l_1]}\times Y^{[l_2]}\right]^{[L]}\\&X=k_p c\,.\end{aligned} \tag{38}$$

These functions are normalized to unity in the region $r\leqq c$ (see Fig. 6).

Since the product of two single particle wave functions, $u_\kappa(r_1)\,u_\tau(r_2)$, form a complete set in the square region $r_1, r_2\leqq b$ (see Fig. 6) the wave functions (37) can be expanded in terms of that set. Since the square region $r_1, r_2\leqq b$ is larger than $r\leqq c$ a certain arbitrariness still exists in this expansion. We shall make the following choice. The function Φ, (37) is defined for all r. We thus expand the function (37) in the whole square region of Fig. 6, to obtain

$$\Phi_\nu(k_p r,\alpha)=\sum_{\kappa,\tau}G_{\kappa\tau}(\nu,k_p)\,u_\kappa(r_1)\,u_\tau(r_2)\,. \tag{39}$$

This expansion will converge uniformly except for a GIBB's phenomenon near the boundary $r_1=b$, $r_2=b$. This, however, has no influence on the defining region $r\leqq c$ since b can be chosen large enough so that the GIBB's phenomenon takes place outside the region $r=c$. Two points remain to be explained. They concern the normalization and the orthogonality of the functions (39) in the square region. The functions (37) are orthonormal in the region $r\leqq c$ while the same functions taken in the larger region $r_1, r_2\leqq b$ are neither orthogonal nor normalized. Still, they form a complete set. We shall return to these points later.

3. We are now prepared to describe the solution of the nuclear problem in the inside region. Choosing an energy, say $\bar{E}$, and a phase, say δ_0, one

can compute the logarithmic derivatives for both the one-particle and the two-particle channels using previously obtained information concerning the level structure of the $(A-1)$ and the $(A-2)$ systems. With these boundary conditions one now can obtain a complete set of states using functions uv for the particle-hole states and Φvv for the two particle-two hole states. Since according to our assumptions not more than two

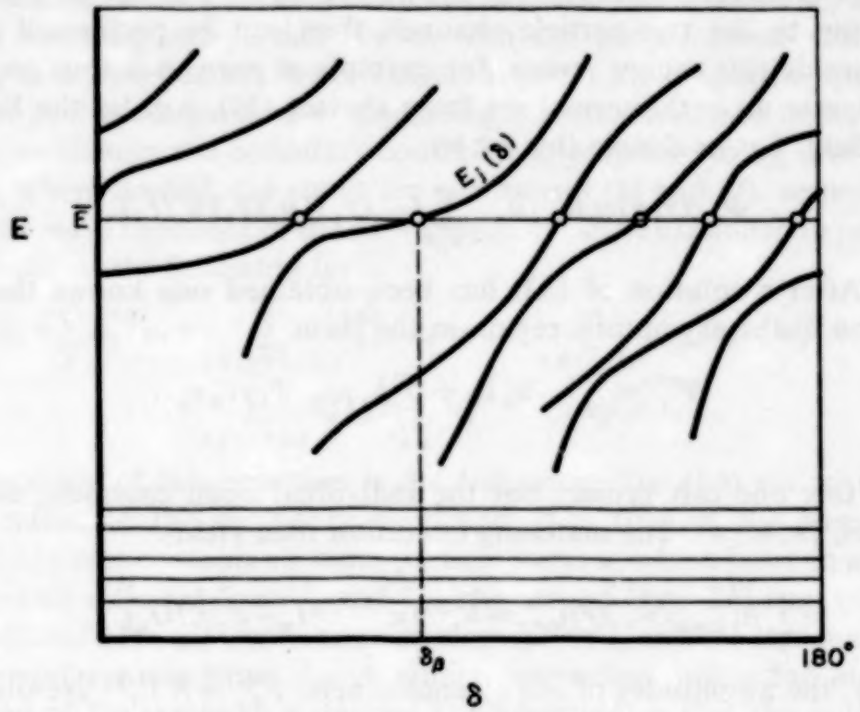


Fig. 7. Graphical solution of Eq. (33). The eigenphases are found as the crossing points of the curves $E_j(\delta)$ with the line $E=\bar{E}$

particles can be emitted in the reaction for energetic reasons, the three-particle three-hole and higher states are all closed channels. They thus can be treated as $uuu\,vvv$ etc. With this set of states one now can diagonalize the nuclear Hamiltonian. For the evaluation of the matrix elements involving the states Φvv one uses the expansion (39). This way one obtains the eigenvalues of H, say E_j. In general no eigenvalue will coincide with the energy, $\bar{E}$, for which one has done the calculation. Thus, one repeats the outlined calculation for other values of the phase and one generates this way functions giving the dependence of the eigenvalues as a function of δ, i.e. one generates the functions $E_j(\delta)$ (see Fig. 7). The eigenphases then are found as the solutions of the consistency-relation (33).

We now have to discuss the questions postponed above concerning the non-orthonormality of the expansion (39). To begin with we make

the following observation. In the matching of the inside and outside solutions it is essential that the amplitudes in the different channels are properly normalized with respect to each other. If that has been achieved then the matching can take place at any point within the asymptotic region. In our case it means that if the one-particle wave functions are normalized in the interval $0 \leqq r_j \leqq b$, then the two-particle wave functions must be normalized within the square region of Fig. 6, $r_1, r_2 \leqq b$. The matching to the two-particle channels then can be performed at any place inside this square region, for example at $r=c$. It is thus necessary to generate an orthonormal set from the set (39), e.g. by the Schmidt procedure. Let us denote this set by

$$\bar{\Phi}_{\nu,i}(\nu,\alpha) \equiv \bar{R}_{\nu,i}\,\tilde{u}_\nu = \sum_{\kappa,\tau} \bar{G}_{k\tau}(\nu,i)\,u_\kappa(\boldsymbol{r}_1)\,u_\tau(\boldsymbol{r}_2)\,. \tag{40}$$

4. After a solution of (33) has been obtained one knows the wave function in the asymptotic region in the form

$$\Psi^{(\beta)} = \sum_{k'} h_{k'}\,u_k\,v_{k'} + \sum_{\substack{\nu\,i \\ \kappa\,\kappa'}} h_{\nu i \kappa\kappa'}\,\Phi_{\nu i}\,v_\kappa\,v_{\kappa'}\,. \tag{41}$$

From this one can project out the individual open channels, say, the channel, $\{\kappa, \kappa', \nu\}$. The matching condition then yields

$$\sum_i h_{\nu i,\kappa\kappa'}\,\bar{R}_{\nu i}(r)|_{r=c} = \tilde{V}_\nu^{(\beta)}\left[e^{-i\delta^{(\beta)}} I_\nu - e^{i\delta^{(\beta)}} O_\nu\right]_{r=c}\,. \tag{42}$$

Finally, the amplitudes of the eigenchannels, $V_\nu^{(\beta)} = N\tilde{V}_\nu^{(\beta)}$ are obtained by normalization from the $\tilde{V}_\nu^{(\beta)}$. This is needed since the coefficients h are normalized with respect to both open and closed channels, while the V's are normalized in the open channels alone.

VII. Details of the Calculation

The procedure by which the eigenchannels can be computed has been outlined in the previous section only in very general terms. We now shall discuss it in detail. This discussion is straight forward but quite involved.

a) Construction of a Complete Non-Redundant Set of States

At an energy where the emission of two particles can take place, in general a rather large number of one-particle channels will be open. We consider first the case where only one two-particle channel is open, and where the angular momenta of the two particles, l_1 and l_2, are different. It is to be expected that also some one-particle channels will have the same angular momenta l_1 or l_2. Let us begin with the simplest possible

case, i.e., that where only one two-particle channel and two one-particle channels with l_1 and l_2, respectively, have to be considered. In the asymptotic region the wave function then will have the form

$$\psi = A_1\,\omega_1\,u_{l_1} + A_2\,\omega_2\,u_{l_2} + \Sigma\,B_n\,\Omega\,w_{l_1 l_2 n}\,. \tag{43}$$

The functions ω_1, ω_2, and Ω describe the two states of the $(A-1)$ system and the state of the $(A-2)$ system, respectively. The symbols u_{l_1} and u_{l_2} denote standing one-particle waves with the proper phase shift, and $w_{l_1, l_2, n}$ is a two-particle wave function (19) with a specific quantum number n. For the purpose of expanding the wave function in the inside region we denote the boundary condition appropriate to u_{l_1} and u_{l_2} by giving, where needed, the states u a superscript (1) and (2), respectively. Then the wave functions of the $(A-1)$-system can be expanded in particle-hole states of the following form

$$\begin{aligned}\omega_i = \sum_{\nu} a_{\nu}^{(i)}\,v_{\nu} + \sum_{\alpha\beta\,(\gamma \neq l_1,\,l_2)} b_{\alpha\beta\gamma}^{(i)}\,v_\alpha\,v_\beta\,u_\gamma + \sum_{\alpha\beta\,(\gamma = l_1)} c_{\alpha\beta\gamma}^{(i)}\,v_\alpha\,v_\beta\,u_\gamma^{(i)} + \\ + \sum_{\alpha\beta\,(\gamma = l_2)} d_{\alpha\beta\gamma}^{(i)}\,v_\alpha\,v_\beta\,u_\gamma^{(k)} \qquad i \neq k = 1, 2\,.\end{aligned} \tag{44}$$

The meaning of this equation is the following. The $(1h)$ states, v_ν, are independent of the boundary condition. The first of the sums over $(1p-2h)$ states contains all those particle states u_γ which have an angular momentum different from l_1 and l_2. The second $(1p-2h)$ sum contains the particle states, $u_\gamma^{(1)}$, with angular momentum l_1 and the last sum those with angular momentum l_2. A similar expansion holds for ω_2. The meaning of the symbolic statement $(\gamma = l_1)$ in (44) is that the l-quantum number encompassed in the composite quantum number γ equal l_1. The summation is over the other quantum numbers contained in γ. The state Ω, Eq. (43), then can be written

$$\Omega = \sum_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}\,v_\alpha\,v_\beta + \cdots\,. \tag{45}$$

These expansions for the $\omega - s$ and for Ω are assumed to be known from a previous calculation. In both Eqs. (44) and (45) we have terminated the expansion at the $(2h)$-states.

The expansion of the $w_{l_1, l_2, n}$ proceeds as follows. First $w_{l_1, l_2, n}$ is expanded in terms of $\bar{\Phi}_{\nu i}$, Eq. (40), to yield

$$w_{l_1 l_2 n} = \sum_i W_{ni}\,\bar{\Phi}_{l_1 l_2 n, i}\,. \tag{46}$$

According to the extension and orthonormalization procedure discussed above, preceding Eq. (40), we write explicitly

$$\bar{\Phi}_{\nu i} = \sum_m c_m^{(\nu i)}\,\Phi_\nu(k_m)\,. \tag{47}$$

To recapitulate, the functions $\bar{\Phi}_{\nu l}$ are orthogonal and normalized to unity $r_1, r_2 \leqq b$ while the wave functions $\Phi_\nu(k_m)$ are orthonormal in the region $r \leqq c$. The summation over m involves only the radial wave number, k_m, and the wave functions $\bar{\Phi}_{\nu l}$ all have the same logarithmic derivative (35) at $r=c$, which is the proper boundary condition for the two-particle channel. The functions $\bar{\Phi}_{\nu l}$ are then written as the expansion (40). The wave functions of the A-system then can be written in the form

$$\psi = \sum_{(\nu=l_1)} A_\nu \omega_1 u_\nu^{(1)} + \sum_{(\nu=l_2)} B_\nu \omega_2 u_\nu^{(2)} + \\ + \sum_{l\alpha\tau n} W_{nl}\, \Omega\left(\bar{G}_{\kappa\tau}(l_1\, l_2\, n\, i)\, u_\kappa(r_1)\, u_\tau(r_2)\right). \tag{48}$$

This wave function finally has to be supplemented to encompass a complete set for the purpose of solving the inside problem. We insert (44) and (45) in (48) to obtain

$$\begin{aligned}
\psi = & \sum_{(\nu=l_1)\,\tau} A_\nu a_\tau^{(1)} v_\tau u_\nu^{(1)} + \sum_{(\nu=l_2)\,\tau} B_\nu a_\tau^{(2)} v_\tau u_\nu^{(2)} + \\
& + \sum_{\alpha\beta\,(\nu=l_1)\,(\gamma\neq l_1,\, l_2)} A_\nu b_{\alpha\beta\gamma}^{(1)} v_\alpha v_\beta u_\gamma u_\nu^{(1)} + \\
& + \sum_{\alpha\beta\,(\nu=l_1)\,(\gamma\neq l_1,\, l_2)} B_\nu b_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} v_\alpha v_\beta u_\gamma u_\nu^{(2)} + \\
& + \sum_{\alpha\beta\,(\nu,\,\gamma=l_1)} A_\nu C_{\alpha\beta\gamma}^{(1)} v_\alpha v_\beta u_\gamma^{(1)} u_\nu^{(1)} + \sum_{\alpha\beta\,(\nu,\,\gamma=l_2)} B_\nu C_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} v_\alpha v_\beta u_\gamma^{(2)} u_\nu^{(2)} + \\
& + \sum_{\alpha\beta\,(\nu=l_1)\,(\gamma=l_2)} A_\nu d_{\alpha\beta\gamma}^{(1)} v_\alpha v_\beta u_\gamma^{(2)} u_\nu^{(1)} + \\
& + \sum_{\alpha\beta\,(\nu=l_2)\,(\gamma=l_1)} B_\nu d_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} v_d v_\beta u_\gamma^{(1)} u_\nu^{(2)} + \sum_{i\kappa\tau n\alpha\beta} W_{ni}(f_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta) \times \\
& \times \left[\bar{G}_{\kappa\tau}(l_1\, l_2\, n, i)\, u_\kappa u_\tau\right] + \Sigma\, D_{\nu\mu} v_\nu u_\mu + \Sigma\, F_{\alpha\beta\gamma\delta} v_\alpha v_\beta u_\gamma u_\delta .
\end{aligned} \tag{49}$$

The last two sums in (49) represent those $(1p-1h)$ and $(2p-2h)$ states which have to be added to achieve completeness, i.e. those with l neither l_1 nor l_2.

The first two sums represent no difficulty concerning redundancies. The next to last sum then simply contains all further $(1p-1h)$ states not yet contained in the first two sums; the particle states here can be computed with arbitrary boundary conditions. The third through sixth sums also have no redundancy. The seventh and the eigth sums, however, are superficially redundant. However, in fact, no difficulty arises at this point since the particle wave functions with angular momentum l_1 are computed with the boundary condition $\{1\}$ and those with l_2 are computed with the boundary condition $\{2\}$. The terms in these both sums which contain the same particle and hole functions can be combined in computing the Hamiltonian matrix. Afterwards, in projecting with ω_1, ω_2 at

$r=b$ the two channels separate because of channel orthogonality. However, we shall treat the $(2p-2h)$ states of these sums together with the states in sum nine, which describes the two-particle channels. To that end we consider the particle functions $u_\kappa(\boldsymbol{r}_1)\,u_\tau(\boldsymbol{r}_2)$. The components where one or both of these functions describe angular momentum l_1 or l_2 are computed with the appropriate single particle boundary conditions for l_1 and l_2 respectively. The other particle wave functions have arbitrary boundary conditions. Now all $(2p-2h)$ wave functions of the sums three through eight can be expanded in terms of the wave functions appearing in sum nine. We thus are left with an orthogonal set of wave functions where the single particle components obey the proper single particle boundary conditions and the two-particle components obey in addition the proper two-particle boundary conditions. In general this set will already be complete. However, if for some reason some states have not yet appeared they can be added explicitly. Thus we have finally

$$\Psi=\Sigma\, M_{i\,k}\, v_i\, u_k^{(l)}+\Sigma\, N_{\alpha\beta,\,\nu\,i}\, v_\alpha\, v_\beta\Big(\sum_{\kappa\tau}\bar{G}_{\kappa\tau}(\nu,i)\,u_\kappa^{(l)}\,u_\tau^{(l')}\Big). \tag{50}$$

The superscripts l and l' indicate that the single particle states have be computed with the appropriate boundary conditions.

We now turn to the case where the two channels have the same angular momentum, viz. $l_1=l_2=l$. In the asymptotic region the wave function still has the form (43). We again begin by considering the $(1p-1h)$ states. Since the wave functions ω_1 and ω_2 of the $(A-1)$ system are orthogonal, a complete set of $(1p-1h)$ states is

$$\begin{gathered}\psi_{1\,(\nu=l)}=\sum_k a_k^{(1)}\,v_k\,u_\nu^{(1)};\qquad \psi_{2\,(\nu=l)}=\sum_\kappa a_k^{(2)}\,v_k\,u_\nu^{(2)}\\ \psi_i=\sum_{\lambda\,(\nu\neq l)} a_{\lambda\nu}^{(i)}\,v_\lambda\,u_\nu.\end{gathered} \tag{51}$$

The set (51) has been generated in the following way. First, the $(1h)$ component of the state ω_1 has been multiplied with the complete set of $(1p)$ states of angular momentum l, viz. $u_\nu^{(1)}$, computed with the boundary condition appropriate to the channel 1. The $(1h)$-component of the state ω_2, which is orthogonal to ω_1, has been similarly augmented by $u_\nu^{(2)}$. The states ψ_i are all other $(1p-1h)$ states. The summation over λ, ν is needed to generate such states which are orthogonal to the previous states. The boundary condition employed here for the particle states is arbitrary.

We now consider the $(2p-2h)$ states. To begin with we note that the states ω_i are bound. Thus the summation over γ in the $(1p-1h)$ sums of (44) leads to an exponentially decaying radial function, independently for every α and β. Thus the $(1p)$ functions u_γ can be computed with an arbitrary boundary condition. For example, the choice

indicated in (44) is a possible one. Next, in the expansion (40) of the $(2p)$-wave functions $\bar{\Phi}_{\lambda i}$ one may use arbitrary boundary conditions for the single particle wave functions. Because of the bound state character of the functions ω_1 and ω_2 in the asymptotic region there exists a channel orthogonality in the sense

$$\langle \omega_1 | | \Omega u_\nu \rangle = 0 \tag{52}$$

where the double bar of the scalar product indicates that the radial coordinate of u has been kept constant at some $r_1 > a$, or, the integration over r_1 has been restricted to the outside region $r_1 > a$. This orthogonality then maintains itself also in

$$\langle \omega_1 u_\mu | | \Omega u_\mu u_\nu \rangle = 0 \tag{53}$$

i.e. the usual channel orthogonality relations exist in this form where the restricted variables are r_1 and r_2.

In the channel orthogonality relations of the two-particle channels, however, the integration has to be performed over α while r is kept larger than some value, say $r > c$. Here a non-vanishing contribution to (53) will arise from the cross-hatched region of Fig. 6, since then one of the particles is inside the nucleus and thus the wave function is not of the asymptotic form. An upper limit to the deviation from zero of the relation (53) integrating over α and keeping $r = c$ fixed then is about $\frac{1}{2}\pi\, c/2a$. This limit comes about by setting the overlap equal unity in the cross-hatched region and zero outside of it. This is an overestimate since the nuclear wave function has in general oscillatory character while the dependence of $\tilde{u}$, Eq. (37), on α is smooth; even more, the function $d_{\mu\lambda}^{(\mu+n)}(2a)$ is either very small or stays constant in the important region for moderately large c. In addition, the nuclear wave function contains correlations between the different particles. Thus the integrations over the other coordinates will result in further cancellations in the orthogonality relation. The deviation from channel orthogonality can be checked in the course of the actual calculations and, in principle, can be reduced to zero by the choice of a sufficiently large radius c.

An estimate of the needed value of c is obtained by noting that $d_{\mu\lambda}^{(\mu+n)}(2\alpha)$ has a "wave length" in α at about $\pi/[2(\mu+n)]$. One thus may expect channel orthogonality for $c \geqq 2(\mu+n)\, a/\pi$. The size required for the inside region thus depends on n, and it increases when increasing the desired resolution of the description of the energy partition between the particles. For $n \approx 5$, a region $c \approx 10\, a$ should suffice.

We are now in the position to write an orthonormal set for the inside region. We begin with the complete set of states

$$\begin{aligned} &\psi_{1\nu} = \omega_1 u_{l\nu}^{(1)} \qquad \psi_{2\nu} = \omega_2 u_{l\nu}^{(2)} \qquad \psi_{3i} = \sum_{\lambda\nu} a_{\lambda\nu}^{(i)} v_\lambda u_\nu \\ &\psi_{4\lambda i} = \Omega \bar{\Phi}_{\lambda i} \qquad \psi_{5\mu\nu\lambda i} = v_\mu v_\nu \bar{\Phi}_{\lambda i}. \end{aligned} \tag{54}$$

The sets ψ_1, ψ_2 and ψ_3 are orthogonal as is. The sets ψ_4 and ψ_5 now can be orthogonalized with respect to the sets ψ_1, ψ_2 in the following way. The $(2p-2h)$-components of ψ_1 can be expanded in terms of functions $v_\mu v_\nu \bar{\Phi}_{\lambda i}$ where the function $\bar{\Phi}_{\lambda i}$ is expanded in single particle functions computed with the boundary conditions appropriate to channel ψ_1. Similarly, the $(2p-2h)$-component of $\psi_{2\nu}$ are expanded in terms of $\bar{\Phi}_{\lambda i}$ which are computed with single particle functions obeying the boundary conditions of channel 2. The remaining $(2p-2h)$ states $\psi_{4\lambda i}$, $\psi_{5\mu\nu i}$ are orthogonalized with respect to $\psi_{1\nu}$ and $\psi_{2\nu}$. This way it has been achieved that upon projection with ω_1, the radial single particle function of the open channel fulfills automatically the natural boundary conditions, similarly the channel ω_2, while *simultaneously* upon projection with Ω and a given $d_{\mu\lambda}^{(\mu+n)}(2\alpha)$ the radial function of the open two-particle channel fulfills its proper boundary condition. The price which has been paid is the appearance of single particle wave functions in the diverse expansions which have different boundary conditions. For antisymmetrization purposes it is then necessary to write Slater determinants instead of creation and annihilation operators.

The above outlined procedure is already completely general in that it is not restricted to two one-particle channels and one two-particle channel. No complications arise if the number of open channels is larger. For example, if another two-particle channel opens then, if the angular momenta of the two particles do not coincide with the previous angular momenta, channel orthogonality obtains automatically; if the new angular momenta coincide with the old then channel orthogonality is insured by the orthogonality of Ω_1 and Ω_2 and again a complete set of states for the inside region can be defined.

As long as no three-particle channels are open, all $(3p-3h)$ states are bound and can be expanded in terms of single particle states with arbitrary boundary conditions.

b) Construction of the Hamiltonian Matrix

In principle the problem is solved as soon as the set of wave functions has been defined in which the nuclear Hamiltonian is to be diagonalized. Thus a general wave function is written in terms of the set (54) as

$$\Psi = \sum_{i,\nu} A_{i\nu}\,\omega_i\,u_\nu^{(i)} + \Sigma\,\bar{A}_i\Big(\sum_{\lambda\nu} a_{\lambda\nu}^{(i)}\,v_\lambda\,u_\nu\Big) + \sum_i B_i\Big(\sum_{\lambda\nu\sigma\tau} b_{\lambda\nu\sigma\tau}^{(i)}\,v_\lambda\,v_\nu\,\bar{\Phi}_{\sigma\tau}\Big)\,. \quad (55)$$

We compute the Hamiltonian matrix directly in terms of the orthogonalized functions, for example, a matrix element to be used in the diagonalization would be

$$H_{ik} = \Big\langle \sum_{\substack{\lambda\nu\sigma\tau\\ kk'}} b_{\lambda\nu\sigma\tau}^{(i)}\,v_\lambda\,v_\nu\,\bar{G}_{kk'}^{(\sigma\tau)}\,u_k^{(i)}\,u_{k'}^{(i)}\,\Big|\,H\,\Big|\sum_{\lambda\nu} a_{\lambda\nu}^{(k)}\,v_\lambda\,u_\nu\Big\rangle\,. \quad (56)$$

Naturally, the calculations of the matrix element will be performed in the expanded version, i.e. the sums will be written out and the matrix element will be computed term by term. However, it is advantageous to use the summed matrix element (56) directly since this way the orthogonal wave functions (54) remain intact, together with the boundary conditions contained in those wave functions.

VIII. Sequential Decays

A sequential decay proceeds, roughly speaking, by a process in which a particle is emitted leaving the $(A-1)$ system in a long-lived state. This state subsequently decays by emission of a second particle. Considering the $(A-1)$ system to be a target $(A-2)$ system with the second particle not only in the outgoing but also in an incoming channel, one sees that a situation leading to a sequantial decay corresponds to a sharp resonance in the scattering of the second particle on the $(A-2)$ system. All these statements are qualitative, but they can be made quantitative[12]. To describe such a sharp state one would have to use two-particle wave functions of sufficiently high resolution. This clearly is not a practicable procedure since it would require a large number of two-particle channels and, therefore, large Hamiltonian matrices. It thus is better to treat the sequential decays separately in a manner analogous to that of LANE and THOMAS[13].

In that procedure the two-particle decay is considered to take place consecutively, both decays being separated in time. The intermediate state is first treated as if it were stable. It then leads to just another one-particle channel. (See Fig. 1.) Afterwards, the $(A-1)$ system in that state is considered to be "radioactive" and to decay in a well-defined branching ratio to the different available states in the $(A-2)$ system. This procedure is evidently suited only in the limiting case of very narrow intermediate states. As a matter of fact, since the $(A-1)$ system is supposed to have been solved previously, it should already be known beforehand which of the levels of the $(A-1)$ system can be treated by the Lane-Thomas procedure.

By this procedure, one thus simulates the "high resolution" two-particle functions omitted in the computation of the Hamiltonian. However, one still has to check for consistency since a part of the intermediate state may be contained already in the eigenchannels utilized in the calculation. So, writing for the inside wave function

$$\Psi = \Sigma a_c \psi_c + \Sigma a_\nu \varphi_\nu \tag{57}$$

[12] ZUPANČIČ, Č.: Revs. Modern Phys. **37**, 330 (1965).
[13] LANE, A. M., and R. G. THOMAS: Revs. Modern Phys. **30**, 257 (1958).

where the first sum over c symbolizes those wave functions which are associated with one-particle channels and have the natural boundary conditions at the matching radius b while the second sum over ν symbolizes the two-particle functions associated with the two-particle channels, then the Lane-Thomas procedure consists in the explicit addition of a redundant decaying pseudo-one-particle channel, say ψ_d:

$$\Psi = \Sigma\, a_c\, \psi_c + \Sigma_\nu\, a_\nu\, \varphi_\nu + a_d\, \psi_d . \tag{58}$$

Whether or not the intermediate level can be considered long-lived then is determined by the overlap integral

$$\zeta_\nu = (\psi_\nu, \psi_d) \tag{59}$$

which will be small if the energy width, $\Delta = E/n_{\max}$, of the two-particle functions included in the set φ_ν of (57) is much larger than the width of the intermediate state. Then the components of (58) are orthogonal and the coefficients a_c, a_ν and a_d are uniquely determined. If, on the other hand, $\Gamma \approx \Delta$, then some $\xi \approx 1$ and, in fact, the description of the sequential decay is already contained in (57) and the Lane-Thomas procedure does not have to be applied.

When the Lane-Thomas procedure is used one may have to correct explicitly for the rescattering of the second particle by the first[14-16]. This process is included in the treatment of the internal region if its size, i.e. c, is chosen according to the discussion of the channel orthogonality in Section VII(a). In general, the rescattering is not too important since its probability is proportional to σ/R^2 where σ is the cross section between the two emitted particles and R is the distance where the second particle can catch up with the first. This distance increases with the lifetime of the intermediate state. However, for certain experimental conditions this process can be quite important and it then has to be taken into account by explicit calculation.

The authors thank U. FANO for constructive criticisms and him and J. COOPER for valuable discussions.

[14] FOX, R.: Phys. Rev. **125**, 311 (1962).

[15] KACSER, C., and I. J. R. AITCHISON: Revs. Modern Phys. **37**, 350 (1965), and to be published.

[16] LANG, J., R. MÜLLER, W. WÖLFLI, R. BÖSCH, and P. MARMIER: To be published.

Zeitschrift für Physik 202, 150–176 (1967)

Zur mikroskopischen Beschreibung der kollektiven Kern-Zustände

J.-P. AMIET

Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg

Eingegangen am 8. Februar 1967

The N-body nuclear problem is cast into a form which is appropriate for the study of collective states. Starting with the method of generator coordinates where the weight function is defined on a transformation group, the resulting integral equations are transformed into an equivalent set of partial differential equations. The role of the transformation group is to induce nuclear collective motions. The aim consists in extending the group theoretical description of rotational states to other types of collective excitations. A subsequent transformation of the differential equations is performed. The resulting form is appropriate for the discussion of collective states in terms of particle-hole excitations. The possibility is investigated of introducing exact bosons in a microscopic way.

1. Einleitung

Die Beschreibung der kollektiven Zustände eines Atomkerns führt auf zwei Probleme, die in dieser Arbeit wieder aufgenommen werden: 1. eine einheitliche Behandlung der Rotations- und Vibrationszustände und 2. der Übergang von einer mikroskopischen zu einer makroskopischen Beschreibung dieser Zustände. Der Formalismus, den wir im folgenden verwenden werden, ist eine Weiterentwicklung eines Verfahrens, das bereits in etlichen Arbeiten benützt wurde[1–3]. Es basiert auf der „generator-coordinates method", die für kollektive Zustände den folgenden Ansatz für die Kernwellenfunktion zugrunde legt:

$$\Psi = \int d\rho\, f(\rho)\, \Phi(\rho)\,. \tag{1.1}$$

Dabei ist $\Phi(\rho)$ eine Slaterdeterminante, die von einigen Parametern $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_r)$ abhängt. Die gesuchte Funktion $f(\rho)$ soll mit einem Variationsverfahren bestimmt werden. Die Schar $(\rho_1 \ldots \rho_r)$ enthält u. a. die Eulerschen Winkel, φ, ϑ, ψ und Deformationsparameter β, γ, für die Oberflächenvibrationen. Die Einteilchenfunktionen $\chi_\alpha(x, \rho)$ kann man in der Hartree-Fock-Basis $\{\chi_\alpha(x, \rho_0)\}$ entwickeln:

$$\chi_\alpha(x, \rho) = \sum_\beta c_{\alpha\beta}(\rho)\, \chi_\beta(x, \rho_0)\,. \tag{1.2}$$

Für kleine Oszillationen um einen Gleichgewichtspunkt soll die Funktion $f(\rho)$ mit zunehmendem β, γ schnell abfallen. Das heißt, daß die unitären

[1] JANCOVICI, B., and D. H. SCHIFF: Nuclear Phys. **58**, 678 (1964).

[2] GRIFFIN, J. J., and J. A. WHEELER: Phys. Rev. **108**, 311 (1957).

[3] PEIERLS, R. E., and J. YOCCOZ: Proc. Phys. Soc. (London) A **70**, 381 (1957).

Transformationen $c_{\alpha\beta}$ in (1.2) wesentlich in einem kleinen Gebiet $\mathcal{G}$ um β_0, γ_0 benützt werden. Wir wollen deshalb im folgenden annehmen, daß man im Gebiet $\mathcal{G}$ die Schar von Transformationen $\{c_{\alpha\beta}\}$ durch eine Gruppe von unitären Transformationen $V(\lambda)$ ersetzen kann. Die Matrizen $V_{\alpha\beta}(\lambda)$ gehören zu einer Darstellung einer kompakten Gruppe G, und λ bezeichnet die Gruppenelemente. Der Ansatz (1.1) behält dabei seine Gestalt mit

$$\Phi(\lambda)=\mathcal{U}(\lambda)\Phi,$$

wobei jetzt $\Phi=\Phi(\rho_0)$. Der unitäre Operator $\mathcal{U}(\lambda)$ ist durch $V(\lambda)$ im A-Teilchenraum induziert. Die Einführung einer Transformationsgruppe soll die einheitliche Behandlung von Vibrationen und Rotationen ermöglichen. Das hat überdies den Vorteil, daß man gruppentheoretische Methoden benützen kann.

Die obige Annahme bedeutet keine wesentliche Einschränkung, wenn der Raum aller $\Phi(\rho)$, $\rho\in\mathcal{G}$, in der linearen Hülle des Raumes aller $\Phi(\lambda)$, $\lambda\in G$, enthalten ist. Es ist wohl möglich, daß diese Bedingung nicht streng zu erfüllen ist. Die Wahl der Gruppe selbst wird von der Natur der kollektiven Bewegung abhängen, und es gibt dafür kein allgemeines Rezept.

In der ersten Hälfte dieser Arbeit wird eine Differentialgleichung für eine kollektive Funktion $g(\lambda)$ aus einem Variationsprinzip

$$\delta\frac{\langle\Psi|H|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle}=0$$

hergeleitet und diskutiert. In der zweiten Hälfte wird eine Umschreibung der Differentialgleichung unternommen, die den Anschluß an die Beschreibung von Vibrationszuständen als Überlagerung von Teilchen-Loch-Anregungen liefert. Die mit der Gruppe G zusammenhängende Einschränkung wird dabei aufgegeben. Es wird sich in diesem Formalismus herausstellen, daß man Phononen als Hilfsgrößen einführen kann, die genau die Vertauschungsrelationen für Bosonen erfüllen. Der Hamiltonoperator bleibt dabei ein endliches Polynom in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, im Gegensatz zu den Methoden von Beliaev und Zelevinsky[4] und Marumori, Yamamura und Tokunaga[5]. Unser Ziel ist dabei, die kürzlich vorgeschlagene „collective dynamic theory" von Danos und Greiner[6], die zur Erweiterung des hydrodynamischen Modells das Phononenkonzept wesentlich benützt hat, auf einer mikroskopischen Basis zu verstehen.

---

[4] Beliaev, S. T., and V. G. Zelevinsky: Nuclear Phys. **39**, 582 (1962).

[5] Marumori, T., M. Yamomura, and A. Tokunaga: Progr. Theoret. Phys. (Kyoto) **31**, 1009 (1964).

[6] Danos, M., and W. Greiner: Phys. Rev. **134**, B 284 (1964).

2. Annahmen und Ausgangsprinzip

Der Formalismus, der im folgenden hergeleitet wird, basiert auf einem Variationsverfahren, und den Ansatz dafür leiten wir aus einer Produktfunktion Φ her:

$$\Phi = \prod_{\mu \leqq F} b_\mu^+ \, |0\rangle , \tag{2.1}$$

wobei die Erzeugungsoperatoren, b_μ^+, einer vollständig orthonormierten Basis $\{\chi_\mu(x)\}$ für die Einteilchenzustände entsprechen*. Die Basisfunktionen brauchen keine Symmetrie des Hamilton-Operators zu besitzen, doch soll angenommen werden, daß sie das richtige Verhalten unter Zeitumkehr zeigen. Der Einfachheit halber kann man annehmen, daß die Menge $\{\chi_\mu\}_{\mu \leqq F}$ die Lösung der Hartree-Fock-Näherung bildet. Der Hamilton-Operator lautet wie üblich

$$H = \sum_{\alpha, \beta} \langle \alpha | \, t \, | \beta \rangle \, b_\alpha^+ \, b_\beta + \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \alpha \beta | \, u \, | \gamma \delta \rangle \, b_\alpha^+ \, b_\beta^+ \, b_\gamma \, b_\delta \tag{2.2}$$

in der oben eingeführten Basis.

Wir betrachten außerdem eine Gruppe G und nehmen an, daß:

G eine kompakte Gruppe ist; (2.3a)

eine unitäre Darstellung $V(\lambda)$ von G im Hilbert-Raum der Einteilchen-Zustände vorgegeben ist: (2.3b)

$$\lambda \to V(\lambda), \quad \lambda \in G,$$

$$V(\lambda) \chi_\alpha = \sum_\beta \chi_\beta \, V_{\beta\alpha}(\lambda);$$

es eine Untergruppe G_0 von G gibt, die eine Invarianzgruppe von H ist. (2.3c)

Wesentlich ist es hier, daß G_0 die Drehgruppe und die Raumspiegelung enthält.

Die Darstellung $V(\lambda)$ von G induziert im Raum für A Nukleonen eine weitere unitäre Darstellung,

$$\lambda \to \mathscr{U}(\lambda),$$

durch die Definition

$$b_\mu^+(\lambda) = \mathscr{U}(\lambda) \, b_\mu^+ \, \mathscr{U}^+(\lambda) = \sum_\nu b_\nu^+ \, V_{\nu\mu}(\lambda) . \tag{2.4}$$

Daher hat man

$$\Phi(\lambda) = \mathscr{U}(\lambda) \, \Phi = \prod_{\mu \leqq F} b_\mu^+(\lambda) \, \Phi . \tag{2.5}$$

Was die Deutung der Funktion Φ und der Transformation $\mathscr{U}(\lambda)$ anbelangt, kann man jetzt schon sagen, daß Φ die Rolle einer inneren Wellen-

* F wird sowohl die Fermi-Kante wie die Anzahl von Nukleonen bezeichnen.

funktion spielen wird, wie z. B. in der Beschreibung stark deformierter Kerne, und daß $\mathscr{U}(\lambda)$ Schwingungen um einen Gleichgewichtspunkt und Drehungen des „Zustandes" Φ erzeugen soll.

Die Mittelwerte des Energieoperators H,

$$E(\lambda)=\langle\Phi(\lambda)|\,H\,|\Phi(\lambda)\rangle\,, \tag{2.6}$$

hängen nicht von λ ab, solange dieses Element H invariant läßt; d. h. $\lambda\in G_0$ impliziert $[\mathscr{U}(\lambda), H]=0$. Diese bekannte Eigenschaft gilt im allgemeinen nicht mehr für Elemente von G, die außerhalb von G_0 liegen. Interessant ist aber der Fall, wo G so gewählt werden kann, daß $E(\lambda)$ in einem engen Energiebereich bleibt, wenn λ über die ganze Gruppe G läuft. Es ist dann leicht sich vorzustellen, daß es günstige Überlagerungen der „Zustände" $\Phi(\lambda)$ gibt, die eine tiefere Energie liefern als das Minimum von $E(\lambda)$, $\lambda\in G$.

Wir setzen vorläufig

$$\Psi[f]=\int_G d\lambda\, f(\lambda)\,\mathscr{U}(\lambda)\,\Phi\,, \tag{2.7}$$

ohne G weiter zu spezifizieren; diese Gruppe mag von Fall zu Fall verschieden sein. Die Gruppenelemente und die Menge $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ der Gruppenparameter werden mit demselben Buchstaben bezeichnet. Das Invariante Maß auf der Gruppe, $\mu[d\lambda]$, wird einfach als $d\lambda$ geschrieben. Der Ansatz (2.7) ist von vielen Autoren[1-3] benützt worden und bildet die Grundannahme der bekannten Methode der erzeugenden Koordinaten (generator coordinates method). Der einzige Unterschied liegt hier darin, daß man eine invariante Integration über eine kompakte Transformationsgruppe G benützt, anstatt über das Gebiet gewisser Deformationsparameter zu integrieren.

Zur Bestimmung der Funktion $f(\lambda)$ wird wie üblich verlangt, daß erstens der Ansatz (2.7) eine endliche Norm besitzt ($\|\Psi[f]\|<\infty$) und zweitens die mittlere Energie

$$E[f]=\frac{\langle\Psi[f]|\,H\,|\Psi[f]\rangle}{\langle\Psi[f]|\Psi[f]\rangle} \tag{2.8}$$

minimal ist. Dies führt zu der notwendigen Bedingung

$$\frac{\delta}{\delta f^*}E[f]=0\,, \tag{2.9}$$

die der Integralgleichung

$$\int_G d\lambda'\, f(\lambda')\,[\langle\Phi(\lambda)|\,H\,|\Phi(\lambda')\rangle - E\langle\Phi(\lambda)|\Phi(\lambda')\rangle]=0\,, \quad \forall\,\lambda\in G\,, \tag{2.10}$$

äquivalent ist.

Wir werden im nächsten Abschnitt eine partielle Differentialgleichung aus dieser Integralgleichung herleiten können. Außerdem wird die Wellenfunktion $\Psi[f]$ in der Form einer Überlagerung von Teilchen-Loch-Zuständen explizit angegeben.

3. Die Wellengleichung für die Bosonen

Die Integralgleichung (2.10) für die Dichtefunktion $f(\lambda)$ läßt sich ohne Näherung in eine partielle Differentialgleichung für die verwandte Funktion

$$g(\lambda)=\int_G d\lambda' f(\lambda')\Delta(\lambda^{-1}\lambda') \tag{3.1}$$

umschreiben. Der Kern

$$\Delta(\lambda)=\langle\Phi|\mathcal{U}(\lambda)|\Phi\rangle \tag{3.2}$$

ist eine stetige Funktion auf der Gruppe G. Die Unitarität und Gruppeneigenschaften von $\mathcal{U}(\lambda)$ haben zur Folge, daß

$$\langle\Phi(\lambda)|\Phi(\lambda')\rangle=\langle\Phi|\mathcal{U}^+(\lambda)\mathcal{U}(\lambda')|\Phi\rangle=\Delta(\lambda^{-1}\lambda')$$

gilt. Eine explizite Form für $\Delta(\lambda)$ erhält man leicht durch Einsetzen von (2.4) in (3.2). Sie lautet

$$\Delta(\lambda)=\mathrm{Det}\ V_F(\lambda), \tag{3.3}$$

wobei

$$V_F(\lambda)=\Theta_F V(\lambda)\Theta_F. \tag{3.4}$$

Der Operator Θ_F projiziert auf besetzte Zustände der Basis $\{\chi_\mu\}$:

$$\Theta_F=(\Theta(F-\mu)\delta_{\mu\nu}),\quad \Theta(F-\mu)=\begin{cases}1 & \mu\leqq F\\ 0 & \mu>F,\end{cases} \tag{3.5}$$

d.h. V_F ist die Einschränkung der unitären Matrix $V(\lambda)$ (2.3) auf den Unterraum besetzter Zustände. Außerdem hat man die Relation

$$\Delta(\lambda^{-1})=\Delta^*(\lambda), \tag{3.6}$$

die aus der Unitarität von $V(\lambda)$ folgt:

$$V_F(\lambda^{-1})=(V_F(\lambda))^+ \qquad (\neq V_F^{-1}(\lambda)!). \tag{3.7}$$

Aus (3.3) sieht man, daß $\Delta(\lambda)$ ein homogenes Polynom A-ten Grades in den Variablen $V_{\mu\nu}(\lambda)$ ist. Betrachtet man die verschiedenen Variablen $V_{\mu\nu}$ als voneinander unabhängig, dann ist es sinnvoll von partiellen Ableitungen von Δ nach $V_{\mu\nu}$ zu sprechen. In der Tat, die Größe $\partial\Delta/\partial V_{\mu\nu}(\lambda)$ ist null für $\mu, \nu>F$, und die Matrix $(\partial\Delta/\partial V_{\mu\nu})$ ist das algebraische Komplement von $V_{\mu\nu}$ bezüglich Det V_F. Die folgenden nützlichen Relationen

sind leicht nachprüfbar:

$$\sum_{\nu \leqq F} V_{\mu\nu}(\lambda) \frac{\partial \Delta}{\partial V_{\mu'\nu}}(\lambda) = \delta_{\mu\mu'} \Delta(\lambda), \qquad \mu \leqq F, \tag{3.8}$$

$$\sum_{\nu_1, \nu_2 \leqq F} V_{\mu_1\nu_1} V_{\mu_2\nu_2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial V_{\mu_1'\nu_1} \partial V_{\mu_2'\nu_2}} = (\delta_{\mu_1\mu_1'} \delta_{\mu_2\mu_2'} - \delta_{\mu_1\mu_2'} \delta_{\mu_2\mu_1'}) \Delta, \tag{3.9}$$

$$\mu_1, \mu_2 \leqq F,$$

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial V_{\mu_1\nu_1} \partial V_{\mu_2\nu_2}} = -\frac{\partial^2 \Delta}{\partial V_{\mu_1\nu_2} \partial V_{\mu_2\nu_1}}. \tag{3.10}$$

Die in (3.1) definierte Funktion $g(\lambda)$ ist wiederum ein homogenes Polynom A-ten Grades in den Variablen

$$V_{\mu\alpha}(\lambda^{-1}) = \overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda)$$

was sich leicht feststellen läßt mit Hilfe von

$$V_{\mu\nu}(\lambda^{-1}\lambda') = \sum_{\alpha} \overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda) V_{\alpha\nu}(\lambda'). \tag{3.11}$$

Es wurde schon bemerkt, daß die Transformationen $\mathscr{U}(\lambda)$ Deformationen und Drehungen der inneren Wellenfunktion Φ darstellen sollen. Entsprechend kann man die Gruppenparameter $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ als kollektive Variablen interpretieren, die im makroskopischen Grenzfall scharf meßbare Größen sind. Weiter kann man die Funktion $g(\lambda)$ als Wellenfunktion für die kollektive Bewegung identifizieren, für die wir jetzt die Wellengleichung ableiten wollen.

Die Funktion $g(\lambda)$ ist die Amplitude der Slater-Determinante $\Phi(\lambda)$ in der Lösung Ψ von (2.10), $g(\lambda) = \langle \Phi(\lambda) | \Psi \rangle$, und die Integralgleichung (2.10) selbst ist mit

$$\langle \Phi(\lambda) | E - H | \Psi \rangle = 0 \tag{3.12}$$

identisch.

Wir werden jetzt zeigen, daß es einen Differentialoperator $\mathscr{H}$ gibt, der die folgende Gleichung erfüllt:

$$\langle \Phi(\lambda) | H | \Psi \rangle = \mathscr{H} g(\lambda). \tag{3.13}$$

Das linke Glied von Gl. (3.13) ist ein Polynom in $\overset{*}{V}_{\alpha\beta}(\lambda)$ vom gleichen Grad wie $g(\lambda)$. Man braucht dann nur die richtige Kombination von $\overset{*}{V}$ und $\partial / \partial \overset{*}{V}$ zu finden, die das gesuchte $\mathscr{H}$ bildet. Man hat nun

$$\langle \Phi(\lambda) | b_\alpha^+ b_\beta | \Phi(\lambda') \rangle = \sum_{\alpha'\beta'} \overset{*}{V}_{\alpha\alpha'}(\lambda) V_{\beta\beta'}(\lambda') \langle b_{\alpha'} \Phi | \mathscr{U}(\lambda^{-1}\lambda') | b_{\beta'} \Phi \rangle$$

$$= \sum_{\alpha', \beta' \leqq F} \overset{*}{V}_{\alpha\alpha'}(\lambda) V_{\beta\beta'}(\lambda') \frac{\partial \Delta}{\partial V_{\alpha'\beta'}}(\lambda^{-1}\lambda'),$$

wobei die Identität

$$\langle b_\alpha \Phi | \mathscr{U}(\lambda) | b_\beta \Phi \rangle = \frac{\partial \Delta}{\partial V_{\alpha\beta}}(\lambda) \tag{3.14}$$

benützt wurde. Es folgt dann

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi(\lambda) | b_\alpha^+ b_\beta | \Psi \rangle \\
&= \sum_{\beta', \alpha' \leqq F} \overset{*}{V}_{\alpha\alpha'}(\lambda) \int_G d\lambda' f(\lambda') V_{\beta\beta'}(\lambda') \frac{\partial \Delta}{\partial V_{\alpha'\beta'}}(\lambda^{-1}\lambda') \\
&= \sum_{\beta', \alpha' \leqq F} \overset{*}{V}_{\alpha\alpha'}(\lambda) \int d\lambda' f(\lambda') \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial V_{\mu\nu}(\lambda^{-1}\lambda')}{\partial V_{\alpha'\beta}(\lambda^{-1})} \frac{\partial \Delta}{\partial V_{\mu\nu}}(\lambda^{-1}\lambda') \\
&= \sum_{\mu \leqq F} \overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \overset{*}{V}_{\beta\mu}(\lambda)} \int_G d\lambda' f(\lambda') \Delta(\lambda^{-1}\lambda') = \sum_{\mu \leqq F} \overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda) \frac{\partial g}{\partial \overset{*}{V}_{\beta\mu}}(\lambda).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Eine ähnliche Rechnung führt zu

$$\langle \Phi(\lambda) | b_\alpha^+ b_\beta^+ b_\gamma b_\delta | \Psi \rangle = \sum_{\mu,\nu \leqq F} \overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda) \overset{*}{V}_{\beta\nu}(\lambda) \frac{\partial^2 g}{\partial \overset{*}{V}_{\gamma\nu} \partial \overset{*}{V}_{\delta\mu}}(\lambda). \tag{3.16}$$

Wenn man Gln. (3.15) und (3.16) in (3.13) einsetzt, bekommt man den erwünschten Ausdruck für $\mathscr{H}$. Die äquivalente Form von Gl. (3.12) (oder (2.10)) ist dann

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,\beta} \langle \alpha | t | \beta \rangle \sum_{\mu \leqq F} \overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda) \frac{\partial g}{\partial \overset{*}{V}_{\beta\mu}}(\lambda) + \\
&+ \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \alpha\beta | u | \gamma\delta \rangle \sum_{\mu,\nu \leqq F} \overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda) \overset{*}{V}_{\beta\nu}(\lambda) \frac{\partial^2 g}{\partial \overset{*}{V}_{\delta\mu} \partial \overset{*}{V}_{\gamma\nu}}(\lambda) = E\, g(\lambda).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Die Differentialgleichung (3.17) ist die Wellengleichung für die kollektive Bewegung des Systems. Es darf nicht vergessen werden, daß $g(\lambda)$ nur durch die Matrixelemente $\overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda)$ von λ abhängt.

Die Multiplikation mit $\overset{*}{V}_{\alpha\mu}$ und die partielle Abteilung $\partial/\partial \overset{*}{V}_{\alpha\mu}$ kann man als Operatoren auffassen, die auf $g(\lambda)$ wirken und die kanonischen Vertauschungsrelationen für Bosonen erfüllen:

$$\begin{aligned}
&\left[\overset{*}{V}_{\alpha\mu}, \overset{*}{V}_{\beta\nu}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial \overset{*}{V}_{\alpha\mu}}, \frac{\partial}{\partial \overset{*}{V}_{\beta\nu}}\right] = 0 \\
&\left[\overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda), \frac{\partial}{\partial \overset{*}{V}_{\beta\nu}(\lambda)}\right] = -\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Aus diesem Grund ist (3.17) auch als Bewegungsgleichung für ein System von Bosonen zu verstehen.

Der Ansatz $\Psi[f]$ für den Kernzustand ist gemäß (2.7) durch die vorgegebene „innere" Wellenfunktion Φ und die unbekannte Gewichtsfunktion $f(\lambda)$ bestimmt. Andererseits liefert die Lösung von (3.17) die kollektive Wellenfunktion $g(\lambda)$, woraus $f(\lambda)$ nur schwer mit Hilfe von (3.1) zu gewinnen wäre. Es ist dann wünschenswert, einen Ausdruck für Ψ zu bekommen, in welchem nur Φ und g auftreten. Das folgende Ergebnis ist mit Hilfe der Entwicklung von $\Delta(\lambda^{-1}\lambda')$ nach Potenzen von $\overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda)$ und $V_{\alpha\mu}(\lambda')$ leicht nachzuprüfen:

$$\Psi=\sum_{r=0}^{F}\sum_{\substack{\alpha_r>\ldots>\alpha_1>F\\ \mu_r<\ldots<\mu_1\leqq F}}\frac{\partial^{(r)}g}{\partial\overset{*}{V}_{\alpha_1\mu_1}\ldots\partial\overset{*}{V}_{\alpha_r\mu_r}}(e)\,b^+_{\alpha_r}\ldots b^+_{\alpha_1}b_{\mu_1}\ldots b_{\mu_r}\Phi, \tag{3.19}$$

wobei e das Einselement der Gruppe G ist.

Eine äquivalente Form ist

$$\Psi=\left[\prod_{\substack{\alpha>F\\ \mu\leqq F}}\left(1+b^+_\alpha\,b_\mu\frac{\partial}{\partial\overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda)}\right)\right]g(\lambda)\Big|_{\lambda=e}\Phi, \tag{3.20}$$

wobei b^+_α, b_μ auf Φ und $\partial/\partial\overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda)$ auf $g(\lambda)$ wirken.

4. Eigenschaften der Wellengleichung bezüglich der Symmetriegruppe

Die Lösungen $g(\lambda)$ der Gl. (3.17) müssen infolge des Pauli-Prinzipes zu einer bestimmten Klasse homogener Polynome gehören. Man erhält nach Einsetzen der Entwicklung von $\Delta(\lambda^{-1}\lambda')$ in (3.1):

$$g(\lambda)=\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_F}G^{\alpha_1\ldots\alpha_F}_{1\ldots F}\overset{*}{V}_{\alpha_1,1}(\lambda)\ldots\overset{*}{V}_{\alpha_F,F}(\lambda), \tag{4.1}$$

wobei

$$G^{\alpha_1\ldots\alpha_F}_{\mu_1\ldots\mu_F}=\int_G d\lambda\, f(\lambda)\sum_{\nu_1\ldots\nu_F}\delta^{\nu_1\ldots\nu_F}_{\mu_1\ldots\mu_F}V_{\alpha_1\nu_1}(\lambda)\ldots V_{\alpha_F\nu_F}(\lambda), \tag{4.2}$$

$$\delta^{\nu_1\ldots\nu_F}_{\mu_1\ldots\mu_F}=\begin{cases}+1, & (\mu_1,\ldots,\mu_F)=\text{gerade Perm.}\quad(\nu_1,\ldots,\nu_F)\\ -1, & (\mu_1,\ldots,\mu_F)=\text{ungerade Perm.}\ (\nu_1,\ldots,\nu_F)\\ 0\ , & \text{sonst}.\end{cases} \tag{4.3}$$

Der „Tensor" $G^{\alpha_1\ldots\alpha_F}_{\mu_1\ldots\mu_F}$ ist symmetrisch bei Vertauschung von 2 Indexgruppen, (μ_i,α_i) und (μ_k,α_k), und vollständig antisymmetrisch in den Indizes $(\alpha_1,\ldots,\alpha_F)$ und $(\mu_1,\ldots,\mu_F)$:

$$G^{\ldots\alpha_i\ldots\alpha_k\ldots}_{\ldots\mu_r\ldots\mu_s\ldots}=-G^{\ldots\alpha_k\ldots\alpha_i\ldots}_{\ldots\mu_r\ldots\mu_s\ldots}=-G^{\ldots\alpha_i\ldots\alpha_k\ldots}_{\ldots\mu_s\ldots\mu_r\ldots}. \tag{4.4}$$

Diese Eigenschaft stellt das Pauli-Prinzip dar.

Die Bewegungsgleichung (3.17) kann man in der Operatorform

$$\left(E-\mathscr{H}(\lambda)\right) g(\lambda)=0 \tag{4.5}$$

schreiben, wobei

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(\lambda)=&\sum_{\alpha\beta}\langle\alpha|\, t\,|\beta\rangle \sum_{\mu\leqq F} \overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda)\,\frac{\partial}{\partial \overset{*}{V}_{\beta\mu}(\lambda)}+\\ &+\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\langle\alpha\beta|\, u\,|\gamma\delta\rangle \sum_{\mu\nu\leqq F} \overset{*}{V}_{\alpha\mu}\overset{*}{V}_{\beta\nu}\,\frac{\partial}{\partial \overset{*}{V}_{\delta\mu}}\,\frac{\partial}{\partial \overset{*}{V}_{\gamma\nu}}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Die Wirkung von $\mathscr{H}(\lambda)$ auf eine Funktion $g(\lambda)$ ist nur dann definiert, wenn diese Funktion in der Form (4.1) geschrieben ist.

Beliebige Matrixelemente des ursprünglichen Hamilton-Operators H lassen sich leicht mit Hilfe von $\mathscr{H}(\lambda)$ ausdrücken. Wenn $\Psi[f_1]$ und $\Psi[f_2]$ zwei in (2.7) definierte Ansätze sind, dann gilt

$$\langle\Psi[f_1]|\, H\,|\Psi[f_2]\rangle=\int_G d\lambda\, f_1^*(\lambda)\,\mathscr{H}(\lambda)\, g_2(\lambda), \tag{4.7}$$

wobei $g_2(\lambda)$ mit Hilfe von (4.1) und (4.2) aus $f_2(\lambda)$ gewonnen wurde. Dasselbe gilt für beliebige Operatoren. Insbesondere hat man für das Skalarprodukt

$$\langle\Psi[f_1]|\,\Psi[f_2]\rangle=\int_G d\lambda\, f_1^*(\lambda)\, g_2(\lambda):=(g_1, g_2). \tag{4.8}$$

Die Integralgleichung (2.10) definiert ein hermitisches Problem, da der Integralkern der Relation

$$\langle\Phi(\lambda)|\, H\,|\Phi(\lambda')\rangle=\langle\Phi(\lambda')|\, H\,|\Phi(\lambda)\rangle^*$$

genügt. Diese Eigenschaft liegt etwas versteckt in der Gl. (3.17), indem zwei Eigenlösungen g_1 und g_2 für zwei nicht entartete Energien E_1 und E_2 bezüglich des Skalarproduktes (4.8) orthogonal aufeinander sind:

$$\int_G f_1^*(\lambda)\, g_2(\lambda)\, d\lambda=\left[\int_G f_2^*(\lambda)\, g_1(\lambda)\, d\lambda\right]^*=0. \tag{4.9}$$

Gleichzeitig sind die Eigenwerte E reell.

Der neue Hamilton-Operator $\mathscr{H}(\lambda)$ hat spezielle Transformationseigenschaften bezüglich einer Translation $\lambda\to\lambda_0\lambda$ in der Gruppe G. Die Transformationsgesetze für $V_{\alpha\mu}$ und $\partial/\partial V_{\alpha\mu}$ sind

$$V_{\alpha\beta}(\lambda_0\lambda)=\sum_\gamma V_{\alpha\gamma}(\lambda_0)\, V_{\gamma\beta}(\lambda), \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial V_{\alpha\beta}(\lambda_0\lambda)}=\sum_\gamma \overset{*}{V}_{\gamma\alpha}(\lambda_0)\,\frac{\partial}{\partial V_{\gamma\beta}(\lambda)}. \tag{4.11}$$

Infolgedessen bekommt man

$$\mathscr{H}(\lambda_0\lambda)=\sum_{\alpha\beta}\langle\alpha|\,t(\lambda_0)\,|\beta\rangle\sum_{\mu\le F}\overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda)\frac{\partial}{\partial\overset{*}{V}_{\beta\mu}(\lambda)}+$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\langle\alpha\beta|\,u(\lambda_0)\,|\gamma\delta\rangle\sum_{\mu,\nu\le F}\overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda)\,\overset{*}{V}_{\beta\nu}(\lambda)\frac{\partial^2}{\partial\overset{*}{V}_{\delta\mu}(\lambda)\,\partial\overset{*}{V}_{\gamma\nu}(\lambda)}, \tag{4.12}$$

mit

$$t(\lambda_0)=\mathscr{U}^+(\lambda_0)\,t\,\mathscr{U}(\lambda_0),\qquad u(\lambda_0)=\mathscr{U}^+(\lambda_0)\,u\,\mathscr{U}(\lambda_0).$$

Die Invarianz von H unter Transformationen der Untergruppe G_0 impliziert eine einfache Eigenschaft von $\mathscr{H}(\lambda)$: nämlich die Translationsinvarianz

$$\mathscr{H}(\lambda_0\lambda)=\mathscr{H}(\lambda),\qquad \lambda_0\in G_0. \tag{4.13}$$

Dieses Ergebnis ist direkt aus (4.12) abzulesen, weil

$$t(\lambda_0)=t,\qquad u(\lambda_0)=u,\qquad \lambda_0\in G_0.$$

Die Invarianz (4.13) hat wichtige Konsequenzen für die Eigenlösungen $g(\lambda)$ von (4.5). Es seien zwei Gruppenelemente λ_1 und λ_2 vorgegeben, die durch ein Element $\lambda_0\in G_0$ verknüpft sind:

$$\lambda_1=\lambda_0\lambda_2.$$

Die Funktionen $g(\lambda_2)$ und $g_{\lambda_0}(\lambda_2)=g(\lambda_0\lambda_2)$ sind im allgemeinen verschieden. Sie genügen aber derselben Gleichung für den gleichen Eigenwert:

$$\big(E-\mathscr{H}(\lambda_2)\big)\,g(\lambda_2)=\big(E-\mathscr{H}(\lambda_2)\big)\,g_{\lambda_0}(\lambda_2)=0, \tag{4.14}$$

weil gemäß (4.13):

$$0=\big(E-\mathscr{H}(\lambda_1)\big)\,g(\lambda_1)=\big(E-\mathscr{H}(\lambda_0\lambda_2)\big)\,g(\lambda_0\lambda_2)$$
$$=\big(E-\mathscr{H}(\lambda_2)\big)\,g_{\lambda_0}(\lambda_2).$$

Im allgemeinen Fall können die Lösungen entartet sein. Wenn $g_1(\lambda),\ldots,g_r(\lambda)$, einen vollständigen Satz linear abhängiger Lösungen zum Eigenwert E bilden, folgt aus (4.14), daß

$$g_k(\lambda_0\lambda)=\sum_{l=1}^{r}D_{kl}(\lambda_0)\,g_l(\lambda),\qquad \forall\ \lambda_0\in G_0. \tag{4.15}$$

Die Gruppenstruktur von G_0 führt nach Iteration zu den Bedingungen für die unbekannten Funktionen $D_{kl}(\lambda_0)$:

$$\sum_{l=1}^{r}D_{kl}(\lambda_0)\,D_{lm}(\lambda_0')=D_{km}(\lambda_0\lambda_0'),\qquad D_{kl}(e)=\delta_{kl}. \tag{4.16}$$

Das heißt: die Matrixen $(D_{kl}(\lambda_0))$, $\lambda_0 \in G_0$, gehören zu einer Darstellung von G_0. Außerdem gilt das Gesetz (4.15) auch für die Funktionen $f_1(\lambda), \ldots, f_r(\lambda)$, die gemäß (2.11) die $g_i(\lambda)$ ergeben:

$$g_i(\lambda_0 \lambda) = \int_G d\lambda' f_i(\lambda') \Delta(\lambda^{-1} \lambda_0^{-1} \lambda') = \int_G d\lambda' f_i(\lambda_0 \lambda \lambda') \Delta(\lambda')$$
$$= \sum_k D_{ik}(\lambda_0) \int_G d\lambda' f_k(\lambda \lambda') \Delta(\lambda').$$

Es ist leicht zu zeigen, daß die Transformationen (4.15) das Skalarprodukt (4.8) invariant läßt. Das bedeutet, daß $D(\lambda_0)$ unitär ist:

$$\sum_i \overset{*}{D}_{ik}(\lambda_0) D_{lm}(\lambda_0) = \delta_{km}. \tag{4.17}$$

Im allgemeinen werden die Darstellungen $D(\lambda_0)$ der Untergruppe G_0 irreduzibel sein, es sei denn, daß eine zufällige Entartung vorliegt. Wir werden die irreduziblen Darstellungen von G_0 mit $D^A_{aa'}(\lambda_0)$ bezeichnen, wobei A die Darstellungen und a, a', die Basisvektoren im Unterraum A numerieren. In dieser Schreibweise lauten (4.15) und (4.17):

$$g^A_a(\lambda_0 \lambda) = \sum_{a'} D^A_{aa'}(\lambda_0) g^A_{a'}(\lambda), \qquad \lambda_0 \in G_0, \tag{4.15'}$$

$$D^A(\lambda_0)\big(D^A(\lambda_0)\big)^+ = I. \tag{4.17'}$$

Diese Ergebnisse lassen sich leicht auf die Kernzustandsfunktion (2.7) übertragen:

$$\mathscr{U}(\lambda_0) \Psi^A_a = \sum_{a'} D^A_{aa'}(\lambda_0^{-1}) \Psi^A_{a'},$$

$$\Psi^A_a = \Psi[f^A_a],$$

wobei die Invarianz des Maßes $d\lambda$ bezüglich der linken Translation, $d(\lambda_0 \lambda) = d\lambda$, wesentlich benützt wurde.

Die Ergebnisse dieses Abschnittes sind schon in anderer Form bekannt[7]. Sie lassen sich in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Satz. Die Lösungen des in Gl. (2.3 – 7 – 9) definierten Variationsverfahrens – oder der äquivalenten Gl. (3.17) –, die zu demselben Eigenwert E gehören, bilden den Darstellungsraum einer Darstellung der Invarianzgruppe G_0. Jede Darstellung ist irreduzibel, dann und nur dann, wenn keine zufällige Entartung vorliegt.

5. Die Multipletts

Wir wollen uns der Einfachheit halber auf einen endlichen Unterraum $\mathscr{V}_N$ des Hilbert-Raumes der Einteilchenzustände beschränken. Dies entspricht ohnehin den praktischen Situationen. $N(\geqslant F)$ ist die

[7] ZEH, H. D.: Z. Physik **188**, 361 (1965); **202**, 38 (1967).

Dimension von $\mathcal{V}_N$, der alle in Φ besetzten Zustände χ_μ, $\mu \leqq F$, enthält. Setzen wir vorläufig $G = U_N$, der Gruppe von unitären Transformationen in $\mathcal{V}_N$. Die Lösungen von (3.17) liefern in diesem Fall die genaue Diagonalisierung von H im Unterraum $\mathcal{V}_N^{(1)} \otimes \cdots \otimes \mathcal{V}_N^{(F)}$ der Kernzustände.

Die H.-F.-Näherung dieses Problems gewinnt man, indem man $f_{\lambda_0}(\lambda) = \delta(\lambda_0^{-1}\lambda)$ in (2.8) einsetzt und das Minimum bezüglich $\lambda_0 \in U_N$ sucht. Ein- und Mehrteilchen-Anregungen entsprechen anderen Lösungen $f_{\lambda_i}(\lambda) = \delta(\lambda_i^{-1}\lambda)$. Für realistische Einteilchenanregungen, die einer Überlagerung elementarer Anregungen entsprechen, soll die Funktion $f(\lambda)$ eine „Ausdehnung" bekommen und besitzt in einem der Punkte λ_i ein starkes Maximum. Für kollektive Zustände, wo die Überlagerung kohärent ist, erwartet man, daß $f(\lambda)$ in der Nähe von λ_0 wesentlich von null verschieden ist. Wir wollen annehmen, daß dieses Gebiet von einer kleinen Untergruppe G von U_N überdeckt wird.

Die Lösung $g(\lambda)$ von (4.5) kann man immer nach irreduziblen Darstellungen $D^{\Lambda}_{aa'}(\lambda)$ von G entwickeln, da $\{D^{\Lambda}_{aa'}(\lambda)\}$ einen vollständigen Satz von Funktionen auf G bildet:

$$g(\lambda) = \sum_{\Lambda, a, a'} g^{\Lambda}_{aa'} D^{\Lambda}_{a'a}(\lambda). \tag{5.1}$$

Wenn die Gruppe G richtig gewählt ist, besteht die Hoffnung, daß nur eine Darstellung D^{Λ} zur Beschreibung einer Schar von typischen Kollektivzuständen wesentlich beiträgt. Für eine erste Begründung ist folgendes zu bemerken: Wenn man G auf G_0 – die Invarianzgruppe – beschränkt, dann ist die H.-F.-Lösung entartet*, $E(\lambda) = \langle \Phi(\lambda) | H | \Phi(\lambda) \rangle = \langle \Phi | H | \Phi \rangle$, $\lambda \in G_0$, und $g(\lambda)$ gehört zu einer irreduziblen Darstellung (s. § 4). Andererseits gibt es Gründe anzunehmen, daß kollektive Zustände eng mit Unstabilitäten der H.-F.-Lösung verbunden sind[8]. Wenn man jetzt G so wählt, daß $\mathcal{U}(\lambda)$ eine annähernd instabile Lösung Φ nur in einem Bereich variiert, wo $E(\lambda)$, $\lambda \in G$, wenig von λ abhängt, dann hat man eine Situation, die der genauen Entartung im Fall von G_0 sehr ähnlich ist. Mit anderen Worten, wenn man nah genug an diesem Grenzfall ist, wird in jeder Lösung g *eine* Darstellung D^{Λ} die überwiegende Rolle spielen. Die Quantenzahlen $\Lambda = (\Lambda_1 \ldots \Lambda_p)$, die die Darstellungen numerieren, bleiben dann in guter Näherung erhalten und können für die Numerierung gewisser Kernzustände benutzt werden.

Die Funktionen

$$g_a^{\Lambda, s}(\lambda) = \sum_{a'} \int_G d\lambda' \, D^{\Lambda}_{aa'}(\lambda') \, \Delta(\lambda^{-1}\lambda') \, \Gamma^{\Lambda, s}_{a'}, \tag{5.2}$$

mit der Eigenschaft

$$(g_a^{\Lambda, s}, g_b^{B, t}) = \delta_{\Lambda B} \delta_{ab} \sum_{a'b'} \overset{*}{\Gamma}{}^{\Lambda, s}_{a'} \Delta^{\Lambda}_{a'b'} \Gamma^{\Lambda, t}_{b'} = \delta_{\Lambda B} \delta_{ab} \delta_{st}$$

* Mit Ausnahme des Falles wo Φ ein Eigenvektor von J^2 zum Eigenwert $j \neq 0$ ist.

[8] THOULESS, D. J.: Nuclear Phys. **22**, 78 (1961).

bilden eine Basis für die Entwicklung von $g(\lambda)$. Die Zahlen $A=(A_1, \ldots, A_p)$ sind wie üblich die Eigenwerte der Casimir-Operatoren C_i von G, aber die Indizes $a=(a_1, \ldots, a_q)$ sind von der gewählten Basis abhängig. Es ist zweckmäßig sie als Eigenwerte gewisser Linearkombinationen von Erzeugenden K_r von G und von den Casimir-Operatoren der Invarianzgruppe G_0 zu wählen. Die Erzeugenden K_r haben die Gestalt

$$K_r=\sum_{\alpha\beta}\langle\alpha|\, k_r\,|\beta\rangle \sum_{\nu\leqq F} \overset{*}{V}_{\alpha\nu}(\lambda)\frac{\partial}{\partial \overset{*}{V}_{\beta\nu}(\lambda)}, \tag{5.3}$$

mit

$$\langle\alpha|\, k_r\,|\beta\rangle=-i\frac{\partial V_{\alpha\beta}}{\partial \lambda_r}(\lambda)\bigg|_{\lambda=e}. \tag{5.4}$$

Der Hamilton-Operator $\mathscr{H}(\lambda)$ läßt sich formal in drei Teile aufspalten,

$$\mathscr{H}(\lambda)=\mathscr{H}_0(\lambda)+\mathscr{H}_1(\lambda)+\mathscr{H}_2(\lambda), \tag{5.5}$$

die sich durch ihre Wirkung auf die Basis (5.2) unterscheiden lassen. Der erste Teil ist translationsinvariant:

$$\mathscr{H}_0(\lambda_1\,\lambda)=\mathscr{H}_0(\lambda), \quad \lambda, \lambda_1 \in G. \tag{5.6}$$

Der zweite Teil bildet jede Darstellung in sich ab,

$$\mathscr{H}_1\, g_a^{A,s}(\lambda)=\sum_{b,t} g_b^{A,t}(\lambda)(\mathscr{H}_1)^A_{b,t;a,s}, \tag{5.7}$$

und $\mathscr{H}_2$ ist der Rest, der ausschließlich verschiedene Darstellungen miteinander verknüpft.

Es gilt:

$$[\mathscr{H}_0, K_r]=0, \quad [\mathscr{H}_1, C_i]=0, \quad [\mathscr{H}_2, C_i]\neq 0. \tag{5.8}$$

Die Basis-Funktionen $g_a^{A,s}(\lambda)$ sind Eigenfunktionen von $\mathscr{H}_0$:

$$(E_0^A-\mathscr{H}_0)\, g_a^{A,s}=0. \tag{5.9}$$

Sie sind die Verallgemeinerung der kollektiven Funktionen $D^J_{MK}(\Omega)$, die zur Beschreibung der Rotationszustände dienen. Die Zahlen (A, s) numerieren die Multipletts, und a ihre einzelnen Glieder. Hier hat man aber keine vollkommene Entartung bezüglich a, weil

$$(g_a^{A,s}, \mathscr{H}\, g_a^{A,s})=E_0^A+(g_a^{A,s}, \mathscr{H}_1\, g_a^{A,s})=E_a^{A,s}. \tag{5.10}$$

Zwei Tatsachen sprechen dafür, daß die Basis (5.2) eine vernünftige nullte Näherung für die Beschreibung kollektiver Zustände bilden könnte. Erstens zeigen die Ergebnisse des Elliott-Modells[9], daß verschiedene Multipletts nur schwach gekoppelt sind, wenn die richtige

[9] ELLIOTT, J. P.: Proc. Roy. Soc. (London) **245**, 128 (1958).

Gruppe G vorliegt. (Der Anschluß an das Elliott-Modell wird im nächsten Abschnitt diskutiert.) Zweitens gibt es schwache E.-M.-Übergänge zwischen verschiedenen Bändern, die hier wie im Elliott-Modell und seinen Verfeinerungen als Multipletts interpretiert sind. Die Diagonalisierung innerhalb eines Multipletts (A, s) kann sich aber als sehr wichtig erweisen. Die Glieder $g_a^{A,s}$ eines Multipletts sind durch wiederholte Anwendung von Aufsteige-, $M_r^{(+)}$, und Absteige-Operatoren, $M_r^{(-)}$, auf einen festen Zustand zu gewinnen. Die Operatoren $M_r^{(\pm)}$ sind Linearkombinationen von Erzeugenden K_r, und deswegen Einteilchenoperatoren. Es seien $g_{a_0}^{A,s}$ der Zustand tiefster Energie, und $\mathscr{H}^{A,s}$ die Beschränkung von $\mathscr{H}$ auf das Multiplett (A, s). Wenn $\mathscr{H}^{A,s}$ in guter Näherung in der Basis $\{g_a^{(A,s)}\}$ diagonal wäre, dann würde sich ein angeregter Zustand $g_a^{A,s} = M_r^{(+)} g_{a_0}^{A,s}$ nur durch eine Überlagerung von Ein-Teilchen-Ein-Loch-Anregungen vom Grundzustand $g_{a_0}^{A,s}$ unterscheiden. Dieses Bild mag für Vibrationen vernünftig sein, – es ist beinahe mit der „random phase approximation" äquivalent – wohl aber schlecht für Rotationen[7]. In der Tat, die Diagonalisierung von $\mathscr{H}^{A,s}$ innerhalb jedes Multipletts erfolgt durch eine unitäre Transformation, W, die die Operatoren $M^{(\pm)}$ in

$$\tilde{M}_r^{(\pm)} = W M_r^{(\pm)} W^+$$

umwandelt. Die neuen Operatoren, $\tilde{M}$, sind keine Einteilchenoperatoren mehr, weil die Relation

$$W K_r W^+ = \sum_s w_{rs} K_s$$

im allgemeinen nur gilt, wenn W identisch mit einer Transformation $\mathscr{U}(\lambda)$ ist.

6. Über die Definition der Gruppe G

Es gibt kein allgemeines Rezept nach dem man in einem vorgegebenen Fall die geeignete Gruppe G auswählen könnte. Dies liegt daran, daß die einzigen kompakten Lie-Algebren, die man aus Polynomen in den Operatoren $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{x}$ bilden kann, nur aus bilinearen Formen in diesen Operatoren bestehen; darunter befindet sich die Lie-Algebra der Gruppe SU_3, die von ELLIOTT benützt wurde. Für andere Gruppen ist man gezwungen, die Erzeugenden mit Hilfe ihrer Matrixelemente in der Einteilchenbasis vorzugeben. Dies stellt ein Problem für sich dar und wird in einer nächsten Arbeit aufgenommen. Wir möchten aber hier das Elliott-Modell als Beispiel benützen, und eine mögliche Erweiterung davon andeuten. Der Hamilton-Operator von ELLIOTT ist

$$H = H_0 + H_1 = \sum_i \left(\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \boldsymbol{x}_i^2 \right) - k \sum_{\substack{i<j \\ m}} Q_m^+(i) Q_m(j), \qquad (6.1)$$

mit

$$Q_m = r^2\, Y_m^{(2)}(\vartheta_x, \varphi_x) + \frac{1}{m^2\omega^2}\, p^2\, Y_m^{(2)}(\vartheta_p, \varphi_p). \tag{6.2}$$

H_0 soll eine Näherung des H.-F.-Einteilchenoperators sein und H_1 beschreibt die Restwechselwirkung, was allerdings nicht ganz richtig ist, weil H_1 einen Beitrag zum H.-F.-Operator liefern würde. Um konsequent zu bleiben, müssen wir dann in (3.17) H_0 statt t und H_1 statt u einführen. Außerdem soll die Basis $\{\chi_\alpha\}$ aus Eigenfunktionen von H_0 (Oszillatorwellenfunktionen) bestehen und wir definieren $G = \mathrm{SU}_3$. Der Operator $\mathscr{H}$ hat dann die Gestalt

$$\mathscr{H} = E_R + \omega_n N^{(n)} - \tfrac{1}{2} k \sum_{\mu=-2}^{+2} Q_\mu^{(n)} Q_{-\mu}^{(n)} (-1)^\mu. \tag{6.3}$$

E_R ist die Energie des Rumpfes, der wegen der Form von H von der unvollständig besetzten obersten Hauptschale n entkoppelt ist. Der Operator

$$N^{(n)} = \sum_{\substack{l,m \\ l',m' \leqq F}} \overset{*}{V}_{nlm,\,nl'm'} \frac{\partial}{\partial \overset{*}{V}_{nlm,\,nl'm'}}$$

ist der Teilchenzahloperator in der Schale n und

$$Q_\mu^{(n)} = \sum_{lml'm'} \langle n\, l\, m \,|\, Q_\mu \,|\, n\, l'\, m' \rangle \sum_{l''m'' \leqq F} \overset{*}{V}_{nlm,\,nl''m''} \frac{\partial}{\partial \overset{*}{V}_{nl'm',\,nl''m''}}$$

wirkt auf $g(\lambda)$ wie ein Differentialoperator in den Variablen λ_i:

$$Q_\mu^{(n)}\, g(\lambda) = \int d\lambda'\, f(\lambda') \sum_{lml'm'} \left(\boldsymbol{Q}_\mu(\lambda) \overset{*}{\boldsymbol{V}}(\lambda)\right)_{nlm,\,nl'm'} \frac{\partial}{\partial \overset{*}{V}_{nlm,\,nl'm'}(\lambda)} \Delta_n(\lambda^{-1}\lambda')$$

$$= \int d\lambda'\, f(\lambda')\, \boldsymbol{Q}_\mu(\lambda)\, \Delta_n(\lambda^{-1}\lambda') = \boldsymbol{Q}_\mu(\lambda)\, g(\lambda),$$

wobei die Erzeugende $\boldsymbol{Q}_\mu(\lambda)$ als Differentialoperator dargestellt wird. Außerdem hat man

$$\omega_n = \omega + \tfrac{1}{2} k \langle n \,\|\, Q^+ \cdot Q \,\|\, n \rangle.$$

Die Gleichung $(E - \mathscr{H})\, g(\lambda)$ ist dann eine Differentialgleichung, deren Eigenlösungen irreduzible Darstellungen $D^A_{aa'}(\lambda)$ von SU_3 sind. Es werden selbstverständlich nur die D^A betrachtet, die in $\Delta_n(\lambda)$ enthalten sind, d.h. für welche

$$\int d\lambda\, D^A_{aa'}(\lambda)\, \Delta_n(\lambda) \neq 0.$$

Mit unserem Verfahren ist es möglich dieses Modell zu erweitern. Dazu nimmt man irgendeine Basis $\{\chi_\alpha\}$ und entwickelt sie nach Oszillatorwellenfunktionen:

$$\chi_\alpha = \sum_{nlm} c^\alpha_{nlm}\, \varphi_{nlm}. \tag{6.4}$$

Die Gruppe SU_3 wird in den Hauptschalen n eingeführt und die Gl. (3.17) mit realistischen Kräften betrachtet. Die Gruppe SU_4 kann auf einfache Weise in dieses Schema eingeführt werden: es gibt für jede Folge $n_1 \ldots n_r$ von nebeneinanderliegenden Oszillatorschalen eine irreduzible Darstellung von SU_4, die diese Zustände untereinander mischt[10]. Diese Transformationen können dann mit Hilfe von (6.4) für die Zustände χ_α definiert werden und damit kennt man die Koeffizienten $V_{\alpha\beta}(\lambda)$, $\lambda \in SU_4$. Diese Verallgemeinerung könnte für kollektive Zustände mit ungeradem Spin und ungerader Parität von Nutzen sein.

7. Die Phononengleichung

Das Verfahren, das zu Gl. (3.17) führt, ist sehr allgemein und kann auch für andere Zwecke verwendet werden. Wir wollen es jetzt für einige Betrachtungen benützen, wo die Kernzustände aus Teilchen-Loch-Anregungen aufgebaut sind. Die Ableitung von Gl. (3.17) hängt gar nicht davon ab, welche Gruppe G zugrunde gelegt wurde. Wir können dann ebenso gut annehmen, daß die Koeffizienten $V_{\alpha\beta}$ die allgemeinsten unitären Transformationen in einem beliebig großen, aber endlichen Einteilchen-Raum bilden. Diese letzte Einschränkung hat keine praktischen Folgen, sie soll nur Konvergenzfragen, die für unendliche Gruppen auftreten, vermeiden.

Es ist zweckmäßig die Gl. (3.17) etwas umzuformen, um die Koeffizienten $V_{\mu\nu}$, $\mu, \nu \leqq F$, zu eliminieren; diese bilden die Untermatrix V_F, die nur Transformationen innerhalb der Slaterdeterminante Φ verursacht. Dafür definieren wir

$$h = \frac{1}{\Delta^*(\lambda)}\, g(\lambda), \tag{7.1}$$

$$L^\alpha_\mu(\lambda) = \sum_{\nu \leqq F} V_{\alpha\nu}(\lambda)\, \frac{\partial}{\partial V_{\mu\nu}(\lambda)} \lg \Delta(\lambda) = \sum_{\nu \leqq F} V_{\alpha\nu}(\lambda) \left(V_F^{-1}(\lambda)\right)_{\nu\mu}. \tag{7.2}$$

Die letzte Gleichung von (7.2) als auch

$$L^\alpha_\mu = \Theta(F-\mu)\, \delta_{\mu\alpha}, \qquad \alpha \leqq F, \tag{7.3}$$

folgen aus (3.8). Man kann leicht einsehen, daß h nur noch von den neuen Variablen

$$A^\alpha_\mu = \overset{*}{L}{}^\alpha_\mu - \Theta(F-\mu)\, \delta_{\mu\alpha} \tag{7.4}$$

abhängt. Diese Variablen A^α_μ sind durch die Identität

$$\mathcal{U}(\lambda)\, \Phi = \Delta(\lambda) \exp\Big(\sum_{\substack{\alpha > F \\ \mu \leqq F}} \overset{*}{A}{}^\alpha_\mu\, b^+_\alpha\, b_\mu \Big) \Phi \tag{7.5}$$

[10] Mukunda, N., L. O'Raifeartaigh, and E. C. G. Sudarshan: Phys. Rev. Letters **15**, 1041 (1965).

wohl bekannt[11]. Der Sinn von (7.1) ist, die nullte Näherung $\Psi_0 = \Phi(\lambda_0)$, die dem Ansatz $g_0(\lambda) = \Delta^*(\lambda_0^{-1}\lambda)$ entspricht, von höheren Näherungen abzuspalten. Man erhält schließlich

$$h = \int d\lambda' \tilde{f}(\lambda') \Omega(\lambda^{-1}; \lambda') = \sum_{r=0}^{F} \frac{1}{(r!)^2} \sum_{\substack{\alpha_1 \ldots \alpha_r > F \\ \mu_1 \ldots \mu_r \leqq F}} G^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r} A^{\alpha_1}_{\mu_1} \wedge \cdots \wedge A^{\alpha_r}_{\mu_r}, \tag{7.6}$$

mit

$$\tilde{f}(\lambda) = f(\lambda) \Delta(\lambda), \tag{7.7}$$

$$\Omega(\lambda^{-1}; \lambda') = \frac{\Delta(\lambda^{-1}\lambda')}{\Delta(\lambda^{-1}) \Delta(\lambda')} = \det\left(M_{\mu\nu}(\lambda^{-1}; \lambda')\right), \tag{7.8}$$

$$M_{\mu\nu}(\lambda^{-1}; \lambda') = \sum_{\text{alle } \alpha} L^{\alpha}_{\mu}(\lambda^{-1}) L^{\alpha}_{\nu}(\lambda'), \tag{7.9}$$

$$G^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r} = \int d\lambda' \tilde{f}(\lambda') \overset{*}{A}{}^{\alpha_1}_{\mu_1}(\lambda') \wedge \ldots \wedge \overset{*}{A}{}^{\alpha_r}_{\mu_r}(\lambda'). \tag{7.10}$$

In (7.6) und (7.10) wurde folgendes Symbol für das antisymmetrische Produkt eingeführt:

$$A^{\alpha_1}_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge A^{\alpha_r}_{\mu_r} = \sum_{\nu_1 \ldots \nu_r} \delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r} A^{\alpha_1}_{\mu_1} \ldots A^{\alpha_r}_{\mu_r}, \tag{7.11}$$

wobei die Koeffizienten $\delta^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r}$ in (4.3) definiert wurden. Die Gl. (3.17) läßt sich leicht in eine Gleichung für h umformen. Durch

$$\mathscr{H}(\lambda) g(\lambda) = \overset{*}{\Delta}(\lambda) \tilde{\mathscr{H}} h(A)$$

wird ein neuer Operator $\tilde{\mathscr{H}}$ definiert, der nur noch die Variablen A und die Ableitungen $\partial/\partial A$ enthält. Das Ergebnis ist die zu (3.17) äquivalente Differentialgleichung

$$(E - \tilde{\mathscr{H}}) h(A) = 0, \tag{7.12}$$

mit

$$\tilde{\mathscr{H}} = E_0 + \sum_{\substack{\alpha > F \\ \mu \leqq F}} \left\{ \varepsilon_{\alpha\mu} \left[A^{\alpha}_{\mu} - \sum_{\substack{\gamma > F \\ \sigma \leqq F}} A^{\gamma}_{\mu} A^{\alpha}_{\sigma} \frac{\partial}{\partial A^{\gamma}_{\sigma}} \right] + \varepsilon_{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial A^{\alpha}_{\mu}} \right\} + \sum_{\alpha\beta > F} \varepsilon_{\alpha\beta} \sum_{\sigma \leqq F} A^{\alpha}_{\sigma} \frac{\partial}{\partial A^{\beta}_{\sigma}} - \sum_{\mu\nu \leqq F} \varepsilon_{\mu\nu} \sum_{\gamma > F} A^{\gamma}_{\nu} \frac{\partial}{\partial A^{\gamma}_{\mu}} + \tilde{\mathscr{H}}' \left(\langle |u| \rangle, A, \frac{\partial}{\partial A} \right), \tag{7.13}$$

wobei $\tilde{\mathscr{H}}$ aus allen Termen von (7.18 – 20) besteht, die ε_{α} nicht enthalten.

[11] THOULESS, D. J.: Nuclear Phys. **21**, 225 (1960).

Die folgenden Abkürzungen wurden in (7.13) benützt:

$$E_0 = \sum_{\mu \leqq F} \langle \mu | t | \mu \rangle + \tfrac{1}{2} \sum_{\mu, \nu \leqq F} \overline{\langle \mu \nu | u | \nu \mu \rangle}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \langle \alpha | t | \beta \rangle + \sum_{\mu \leqq F} \overline{\langle \alpha \mu | u | \mu \beta \rangle} \tag{7.14}$$

$$\overline{\langle \alpha \nu | u | \mu \beta \rangle} = \langle \alpha \nu | u | \mu \beta \rangle - \langle \alpha \nu | u | \beta \mu \rangle .$$

Für den Beweis von (7.12) wird wesentlich die folgende Identität benützt:

$$\sum_{\mu \leqq F} \overset{*}{V}_{\alpha\mu}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \overset{*}{V}_{\beta\mu}(\lambda)} \Delta^*(\lambda) h = \Delta^*(\lambda) \left[\overset{*}{L}{}^{\alpha}_{\beta} h + \sum_{\substack{\nu \leqq F \\ \gamma > F}} \overset{*}{L}{}^{\alpha}_{\nu} (\delta_{\beta\gamma} - \overset{*}{L}{}^{\gamma}_{\beta}) \frac{\partial h}{\partial A^{\gamma}_{\nu}} \right]. \tag{7.15}$$

Die Kenntnis der Lösung $h(A)$ genügt vollständig um die Kernwellenfunktion hinzuschreiben, da die Entwicklungskoeffizienten, die in (3.19) auftreten, mit h wie folgt verknüpft sind:

$$\frac{\partial^{(r)} g}{\partial \overset{*}{V}_{\alpha_1\mu_1} \ldots \partial \overset{*}{V}_{\alpha_r\mu_r}} (\lambda) \bigg|_{\lambda = e} = \frac{\partial^{(r)} h}{\partial A^{\alpha_1}_{\mu_1} \ldots \partial A^{\alpha_r}_{\mu_r}} \bigg|_{A=0} = G^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\mu_1 \ldots \mu_r}. \tag{7.16}$$

Außerdem ist der Ausdruck (7.13) für $\tilde{\mathscr{H}}$ viel durchsichtiger als (4.6), indem er uns erlaubt, Terme verschiedener Herkunft und verschiedenen Einflusses auf die Wellenfunktion abzutrennen. Wir nehmen jetzt an, daß die innere Funktion die Lösung eines H.-F.-Verfahrens ist. Die Energie E_0 ist dann die H.-F.-Gesamtenergie, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ wird diagonal und als Einteilchenoperator interpretiert, und $\tilde{\mathscr{H}}$ nimmt die Gestalt

$$\tilde{\mathscr{H}} = E_0 + \tilde{\mathscr{H}}_0 + \tilde{\mathscr{H}}_1 + \tilde{\mathscr{H}}_2 \tag{7.17}$$

an, mit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathscr{H}}_0 = & \sum_{\alpha > F} \varepsilon_\alpha \sum_{\sigma \leqq F} A^{\alpha}_{\sigma} \frac{\partial}{\partial A^{\alpha}_{\sigma}} - \sum_{\mu \leqq F} \varepsilon_\mu \sum_{\gamma > F} A^{\gamma}_{\mu} \frac{\partial}{\partial A^{\gamma}_{\mu}} + \\ & + \sum_{\substack{\alpha\beta > F \\ \mu\nu \leqq F}} \Bigg\{ \overline{\langle \alpha \nu | u | \beta \mu \rangle} \left[A^{\alpha}_{\mu} - \sum_{\substack{\gamma > F \\ \sigma \leqq F}} A^{\gamma}_{\mu} A^{\alpha}_{\sigma} \frac{\partial}{\partial A^{\gamma}_{\sigma}} \right] \frac{\partial}{\partial A^{\beta}_{\nu}} + \\ & + \tfrac{1}{4} \overline{\langle \alpha \beta | u | \nu \mu \rangle} \left[A^{\alpha}_{\mu} - \sum_{\gamma\sigma} A^{\gamma}_{\mu} A^{\alpha}_{\sigma} \frac{\partial}{\partial A^{\gamma}_{\sigma}} \right] \left[A^{\beta}_{\nu} - \sum_{\delta\tau} A^{\delta}_{\nu} A^{\beta}_{\tau} \frac{\partial}{\partial A^{\delta}_{\tau}} \right] + \\ & + \tfrac{1}{4} \overline{\langle \mu \nu | u | \beta \alpha \rangle} \frac{\partial}{\partial A^{\alpha}_{\mu}} \frac{\partial}{\partial A^{\beta}_{\nu}} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{7.18}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathscr{H}}_1 = \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha\beta\gamma > F \\ \mu \leqq F}} & \left\{ \overline{\langle \alpha\gamma | u | \beta\mu \rangle} \left[A_\mu^\alpha - \sum_{\delta\tau} A_\mu^\delta A_\tau^\alpha \frac{\partial}{\partial A_\tau^\delta} \right] \sum_{\sigma \leqq F} A_\sigma^\gamma \frac{\partial}{\partial A_\sigma^\beta} + \right. \\ & \left. + \overline{\langle \mu\beta | u | \gamma\alpha \rangle} \sum_{\sigma \leqq F} A_\sigma^\beta \frac{\partial}{\partial A_\sigma^\gamma} \frac{\partial}{\partial A_\mu^\alpha} \right\} \\ - \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha > F \\ \mu\nu\sigma \leqq F}} & \left\{ \overline{\langle \alpha\sigma | u | \nu\mu \rangle} \left[A_\mu^\alpha - \sum_{\delta\tau} A_\mu^\delta A_\tau^\alpha \frac{\partial}{\partial A_\tau^\delta} \right] \sum_{\gamma > F} A_\nu^\gamma \frac{\partial}{\partial A_\sigma^\gamma} \right. \\ & \left. + \overline{\langle \mu\nu | u | \sigma\alpha \rangle} \sum_{\gamma > F} A_\sigma^\gamma \frac{\partial}{\partial A_\nu^\gamma} \frac{\partial}{\partial A_\mu^\alpha} \right\},\end{aligned} \tag{7.19}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathscr{H}}_2 = \tfrac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta > F} & \overline{\langle \alpha\beta | u | \gamma\delta \rangle} \sum_{\nu\sigma \leqq F} A_\nu^\alpha A_\sigma^\beta \frac{\partial}{\partial A_\nu^\delta} \frac{\partial}{\partial A_\sigma^\gamma} + \\ + \tfrac{1}{4} \sum_{\mu\nu\sigma\tau \leqq F} & \overline{\langle \mu\nu | u | \sigma\tau \rangle} \sum_{\gamma\delta > F} A_\mu^\gamma A_\nu^\delta \frac{\partial}{\partial A_\tau^\gamma} \frac{\partial}{\partial A_\sigma^\delta}.\end{aligned} \tag{7.20}$$

Wenn man Gln. (7.16), (7.6) und (3.19) zusammen betrachtet, ist es sofort klar, daß die Variablen A_μ^α eng mit Teilchen-Loch-Anregungen verbunden sind. Außerdem erfüllen A_μ^α als Multiplikationsoperator und $\partial/\partial A_\mu^\alpha$ als Differentialoperator die Vertauschungsrelationen für Bosonen:

$$\left[\frac{\partial}{\partial A_\mu^\alpha}, A_\nu^\beta \right] = \delta_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta}, \quad [A_\mu^\alpha, A_\nu^\beta] = \left[\frac{\partial}{\partial A_\mu^\alpha}, \frac{\partial}{\partial A_\nu^\beta} \right] = 0. \tag{7.21}$$

Im Gegensatz zu (3.17) hat (7.12) keine Lösungen zu fester Anzahl von Bosonen, weil $\tilde{\mathscr{H}}$ Glieder mit ungleicher Anzahl von Operatoren A und $\partial/\partial A$ besitzt. Wie wir gleich sehen werden, sind die Terme

$$- \sum_{\gamma > F, \sigma \leqq F} A_\mu^\gamma A_\sigma^\alpha \frac{\partial}{\partial A_\sigma^\gamma}$$

in den eckigen Klammern in (7.18–19) Korrekturen zu A_μ^α, die vom Pauli-Prinzip verlangt werden. Sie treten also nicht aus rein dynamischen Gründen auf.

8. Das Pauli-Prinzip

Das Pauli-Prinzip drückt sich in $h(A)$ dadurch aus, daß die Koeffizienten $G_{\mu_1 \ldots \mu_r}^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ in den oberen bzw. unteren Indizes völlig antisymmetrisch sind. Mit anderen Worten, die Funktion $h(A)$ ist eine Linearkombination von speziellen homogenen Polynomen in A_μ^α, die die Form (7.11) besitzen.

Es treten in $\tilde{\mathscr{H}}$ verschiedene Kombinationen der Operatoren A_μ^α und $\partial/\partial A_\mu^\alpha$ auf, u.a.

$$\begin{aligned} Z_{\mu\nu} &= \sum_{\gamma > F} A_\mu^\gamma \frac{\partial}{\partial A_\nu^\gamma}, \\ Z^{\alpha\beta} &= \sum_{\sigma \leqq F} A_\sigma^\alpha \frac{\partial}{\partial A_\sigma^\beta}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Diese zwei Operatoren sowie $\partial/\partial A_\mu^\alpha$ erhalten, wie man sich leicht überzeugen kann, die Gestalt (7.11):

$$\frac{\partial}{\partial A_\mu^\alpha} A_\mu^\alpha \wedge A_\nu^\beta \wedge \cdots \wedge A_\sigma^\gamma = A_\nu^\beta \wedge \cdots \wedge A_\sigma^\gamma, \tag{8.2}$$

$$Z^{\alpha\beta} A_\mu^\beta \wedge A_\nu^\gamma \wedge \cdots \wedge A_\sigma^\delta = A_\mu^\alpha \wedge A_\nu^\gamma \wedge \cdots \wedge A_\sigma^\delta, \tag{8.3}$$

$$Z_{\mu\nu} A_\nu^\alpha \wedge A_\sigma^\beta \wedge \cdots \wedge A_\tau^\gamma = A_\mu^\alpha \wedge A_\sigma^\beta \wedge \cdots \wedge A_\tau^\gamma. \tag{8.4}$$

Da die Multiplikation mit A_μ^α offensichtlich die Form (7.11) stört, führen wir deshalb die antisymmetrisierte Multiplikation $A_\mu^\alpha \wedge$ mit A_μ^α ein, die durch

$$\begin{aligned}(A_\mu^\alpha \wedge)\, & A_{\mu_1}^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge A_{\mu_r}^{\alpha_r} \\ &= A_\mu^\alpha A_{\mu_1}^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge A_{\mu_r}^{\alpha_r} - \sum_{i=1}^{r} A_{\mu_i}^\alpha A_\mu^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge A_{\mu_1}^{\alpha_i} \wedge \cdots \wedge A_{\mu_r}^{\alpha_r} \\ &= A_\mu^\alpha \wedge A_{\mu_1}^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge A_{\mu_r}^{\alpha_r}\end{aligned} \tag{8.5}$$

auf jedem Polynom der Form (7.11) definiert ist.

Diesen Operator kann man auch anders ausdrücken:

$$A_\mu^\alpha \wedge = A_\mu^\alpha - \sum_{\substack{\sigma \leqq F \\ \gamma > F}} A_\mu^\gamma A_\sigma^\alpha \frac{\partial}{\partial A_\sigma^\gamma}. \tag{8.6}$$

Das rechte Glied ist genau der Ausdruck, der in den eckigen Klammern in $\tilde{\mathscr{H}}$, Gln. (7.18–19), auftritt. Der Hamilton-Operator läßt sich dann als Kombination von Basisoperatoren, die einzeln das Pauli-Prinzip „erhalten", neu schreiben:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathscr{H}} &= E_0 + \sum_{i=0}^{2} \mathscr{H}_i \left(A \wedge, \frac{\partial}{\partial A}, Z \right), \\
\tilde{\mathscr{H}}_0 &= \sum_{\alpha > F} \varepsilon_\alpha Z^{\alpha\alpha} - \sum_{\mu \leqq F} \varepsilon_\mu Z_{\mu\mu} + \sum_{\substack{\alpha\beta > F \\ \mu\nu \leqq F}} \overline{\langle \alpha\nu | u | \beta\mu \rangle} A_\mu^\alpha \wedge \frac{\partial}{\partial A_\nu^\beta} + \\
&\quad + \tfrac{1}{4} \sum_{\substack{\alpha\beta > F \\ \mu\nu \leqq F}} \left(\overline{\langle \alpha\beta | u | \nu\mu \rangle} (A_\mu^\alpha \wedge)(A_\nu^\beta \wedge) + \overline{\langle \mu\nu | u | \beta\alpha \rangle} \frac{\partial}{\partial A_\mu^\alpha} \frac{\partial}{\partial A_\nu^\beta} \right) \\
\tilde{\mathscr{H}}_1 &= \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha\beta\gamma > F \\ \mu \leqq F}} \left(\langle \alpha\gamma | u | \beta\mu \rangle (A_\mu^\alpha \wedge) Z^{\gamma\beta} + \langle \mu\beta | u | \gamma\alpha \rangle Z^{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial A_\mu^\gamma} \right) - \\
&\quad - \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha > F \\ \mu\nu\sigma \leqq F}} \left(\langle \alpha\sigma | u | \nu\mu \rangle (A_\mu^\alpha \wedge) Z_{\nu\sigma} + \langle \mu\nu | u | \sigma\alpha \rangle Z_{\sigma\nu} \frac{\partial}{\partial A_\mu^\alpha} \right) \\
\tilde{\mathscr{H}}_2 &= \tfrac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta > F} \langle \alpha\beta | u | \gamma\delta \rangle \sum_{\sigma\nu \leqq F} A_\sigma^\alpha A_\nu^\beta \frac{\partial^2}{\partial A_\sigma^\delta \partial A_\nu^\gamma} + \\
&\quad + \tfrac{1}{4} \sum_{\mu\nu\sigma\tau} \langle \mu\nu | u | \sigma\tau \rangle \sum_{\gamma\delta} A_\mu^\gamma A_\nu^\delta \frac{\partial^2}{\partial A_\tau^\gamma \partial A_\sigma^\delta}.
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Es ist jetzt klar, welche Kombinationen von Phononenoperatoren A^{α}_{μ} und $\partial/\partial A^{\alpha}_{\mu}$ eine dynamische Rolle in $\tilde{\mathscr{H}}$ spielen und welche nur anwesend sind, um das Pauli-Prinzip in Betracht zu ziehen.

Die Operatoren $A^{\alpha}_{\mu}\wedge$ und $\partial/\partial A^{\alpha}_{\mu}$ erfüllen nicht mehr die kanonischen Vertauschungsrelationen. Obwohl

$$\left[A^{\alpha}_{\mu}\wedge, A^{\beta}_{\nu}\wedge\right]=\left[\frac{\partial}{\partial A^{\alpha}_{\mu}}, \frac{\partial}{\partial A^{\beta}_{\nu}}\right]=0, \tag{8.8}$$

hat man

$$\left[\frac{\partial}{\partial A^{\alpha}_{\mu}}, A^{\beta}_{\nu}\wedge\right]=\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\mu\nu}-\delta_{\mu\nu}\,Z^{\beta\alpha}-\delta_{\alpha\beta}\,Z_{\nu\mu}. \tag{8.9}$$

Gln. (8.8) und (8.9) deuten an, daß $A\wedge$, $\partial/\partial A$ und die Operatoren (8.1) die Rolle von gewissen Produkten $b^{+}\,b$ übernommen haben. Die Übersetzung erfolgt durch die Korrespondenz

$$\begin{aligned} A^{\alpha}_{\mu}\wedge &\leftrightarrow b^{+}_{\alpha}\,b_{\mu}\\ \frac{\partial}{\partial A^{\alpha}_{\mu}} &\leftrightarrow b^{+}_{\mu}\,b_{\alpha}\\ Z^{\alpha\beta} &\leftrightarrow b^{+}_{\alpha}\,b_{\beta}\\ Z_{\mu\nu} &\leftrightarrow b_{\mu}\,b^{+}_{\nu}, \qquad \alpha,\beta>F,\ \mu,\nu\leqq F. \end{aligned}$$

Der Operator $A^{\alpha}_{\mu}\wedge$ erzeugt ein korrektes Teilchen-Loch-Paar, und $\partial/\partial A^{\alpha}_{\mu}$ „vernichtet" es. Die formale Einführung von Phononen im Zusammenhang mit A^{α}_{μ} und $\partial/\partial A^{\alpha}_{\mu}$ ist berechtigt, und enthält keine Näherung, solange man Phononen und Teilchen-Loch-Anregungen nicht miteinander identifiziert, sondern durch Gl. (8.6) verbindet. Das ist der Vorteil unseres Formalismus, wo sich die Pauli-Korrektur in einem einzigen Term als Funktion der Phononenoperatoren ausdrücken läßt gegenüber anderen Methoden[4,5], wo eine unendliche Reihe benötigt wird.

Wir bemerken schließlich, daß $A^{\alpha}_{\mu}\wedge$ und $\partial/\partial A^{\alpha}_{\mu}$ bezüglich des in (4.8) definierten Skalarproduktes zueinander hermitisch konjugiert sind.

Erstens gilt:

$$\begin{aligned} (g^{(1)}, g^{(2)}) &= \int d\lambda\, d\lambda'\, \overset{*}{f}{}^{(1)}(\lambda)\, \Delta(\lambda^{-1}\lambda')\, f^{(2)}(\lambda')\\ &= \int d\lambda\, d\lambda'\, \overset{*}{\tilde{f}}{}^{(1)}(\lambda)\, \Omega(\lambda^{-1};\lambda')\, \tilde{f}^{(2)}(\lambda') \qquad (8.10)\\ &= (h^{(1)}, h^{(2)}), \end{aligned}$$

und zweitens hat man:

$$\frac{\partial}{\partial A^{\alpha}_{\mu}(\lambda)}\,\Omega(\lambda^{-1};\lambda')=\left(\overset{*}{A}{}^{\alpha}_{\mu}(\lambda')\wedge\right)\Omega(\lambda^{-1};\lambda'). \tag{8.11}$$

Dann folgt:

$$\left(h^{(1)}, \frac{\partial}{\partial A^{\alpha}_{\mu}} h^{(2)}\right) = \int d\lambda \overset{*}{\tilde{f}}{}^{(1)}(\lambda) \frac{\partial h^{(2)}}{\partial A^{\alpha}_{\mu}}(\lambda)$$

$$= \int d\lambda' \tilde{f}^{(2)}(\lambda') \int d\lambda \overset{*}{\tilde{f}}{}^{(1)}(\lambda) \left(\overset{*}{A}{}^{\alpha}_{\mu}(\lambda') \wedge\right) \Omega(\lambda^{-1}; \lambda') \quad (8.12)$$

$$= (h^{(2)}, A^{\alpha}_{\mu} \wedge h^{(1)})^{*} = (A^{\alpha}_{\mu} \wedge h^{(1)}, h^{(2)}).$$

9. Die Phononen

Wir nehmen weiter an, daß die Einteilchen-Basis $\{|\alpha\rangle\}$ die H.-F.-Gleichungen erfüllt. $\tilde{\mathscr{H}}$ besitzt dann die Form (8.7), wo die in $A\wedge$ und $\partial/\partial A$ linearen Glieder nicht mehr auftreten. Die Eigenlösungen von Gl. (8.7) sind gemäß (7.6) Polynome in A^{α}_{μ}, nämlich

$$h(A) = \sum_{n} \left(h^{(2n)}(A) + h^{(2n+1)}(A)\right) = h_g + h_u, \quad (9.1)$$

wobei $h^{(m)}$ für ein homogenes Polynom m-ten Grades steht. h_g soll nur gerade und h_u nur ungerade Potenzen von A enthalten. Der Grundzustand h_0 ist durch $h^{(0)}_0 \neq 0$ charakterisiert (es wird dabei angenommen, daß die H.-F.-Lösung Φ nicht orthogonal zum wahren Grundzustand steht).

Das einzige Glied von $\tilde{\mathscr{H}}$, Gl. (8.7), das h_g und h_u verbindet ist $\tilde{\mathscr{H}}_1$, da es die Anzahl von Teilchen-Loch-Anregungen (im folgenden: T.-L.-A.) um eins ändert.

Der Teil h_u sollte, wenn die Paarungskräfte stark genug wirken, nur eine Korrektur zu h_g sein, da er mindestens ein aufgebrochenes Nukleon-Paar enthält. In diesem Fall darf $\tilde{\mathscr{H}}_1$ keine große Rolle für den Grundzustand spielen.

$\tilde{\mathscr{H}}_2$ erhält die Anzahl von T.-L.-A. und verursacht in einer vorgegebenen Konfiguration $h^{(m)}$ einfach Teilchen-Teilchen oder Loch-Loch-Streuungen.

Der Rest $\tilde{\mathscr{H}}_0$ von $\tilde{\mathscr{H}}$ verbindet Konfigurationen mit $2m$, $2m \pm 2$ T.-L.-A. und drückt die Streuung eines Teilchen-Loch-Paares bzw. die Erzeugung und Vernichtung von zwei T.-L.-Paaren aus. Die verschiedenen Basisoperatoren, aus welchen $\tilde{\mathscr{H}}_0$ aufgebaut ist, bilden keine geschlossene Lie-Algebra, so daß schon die Diagonalisierung von $\tilde{\mathscr{H}}_0$ ein ernsthaftes Problem stellt.

Die verschiedenen Methoden niedrigster Ordnung, die für eine mikroskopische Beschreibung der Vibrationszustände vorgeschlagen wurden (ohne Berücksichtigung der Nukleonpaarungskorrelation), sind untereinander praktisch äquivalent und erreichen ausschließlich die näherungsweise Diagonalisation von $\tilde{\mathscr{H}}_0$. Eine dieser Näherungen, die von JANCOVICI und SCHIFF[1] entwickelt wurde, besteht darin, den A-Körper Hamilton-Operator durch einen „kollektiven" Operator, $\tilde{\mathscr{H}}'_0$, zu ersetzen.

Dieses $\tilde{\mathscr{H}}'_0$ ist der Teil von $\tilde{\mathscr{H}}_0$, Gl. (8.7), den man bekommt, wenn man das Pauli-Prinzip zum großen Teil unberücksichtigt läßt:

$$\tilde{\mathscr{H}}'_0 = \sum_{\substack{\alpha\beta > F \\ \mu\nu \leqq F}} \Big\{ [(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\mu)\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\mu\nu} + \overline{\langle \alpha\nu \,|\, u \,|\, \beta\mu\rangle}]\, A^\alpha_\mu \frac{\partial}{\partial A^\beta_\nu} + \\ + \tfrac{1}{2}\,\overline{\langle \alpha\beta \,|\, u \,|\, \nu\mu\rangle}\, A^\alpha_\mu\, A^\beta_\nu + \tfrac{1}{2}\,\overline{\langle \mu\nu \,|\, u \,|\, \beta\alpha\rangle}\, \frac{\partial}{\partial A^\alpha_\mu}\, \frac{\partial}{\partial A^\beta_\nu} \Big\}. \tag{9.2}$$

Die Diagonalisierung von $\tilde{\mathscr{H}}'_0$ erfolgt leicht mit Hilfe einer Bogoljubov-Valatin-Transformation für Bosonen:

$$A^\alpha_\mu = \sum_r (u^r_{\alpha\mu}\, B^+_r - v^r_{\alpha\mu}\, B_r) \\ \frac{\partial}{\partial A^\alpha_\mu} = \sum_r (v^r_{\alpha\mu}\, B_r - u^r_{\alpha\mu}\, B^+_r)\,. \tag{9.3}$$

Eine anders begründete Näherung, die unter vielen Namen (u.a. „Random-Phase Approximation" (RPA)) bekannt ist[12], liefert dasselbe Energie-Spektrum wie die Näherung von JANCOVICI und SCHIFF. Der Ansatz dieser Methode lautet in unserer Schreibweise

$$Q^+_r = \sum_{\alpha\mu} \left(X^r_{\alpha\mu}\, A^\alpha_\mu \wedge + Y^r_{\alpha\mu} \frac{\partial}{\partial A^\alpha_\mu} \right); \tag{9.4}$$

diese Operatoren müssen der Gleichung

$$[\tilde{\mathscr{H}}_0, Q^+_r] = \omega_r\, Q^+_r + R_r \tag{9.5}$$

genügen, wobei R_r, ein bilinearer Term in $A \wedge Z$ und $Z \dfrac{\partial}{\partial A}$, vernachlässigt wird. Der Grundzustand h_0 soll

$$Q_r\, h_0 = 0\,, \quad \text{alle } r\,, \tag{9.6}$$

erfüllen. Ein Unterschied, auf den wir jetzt nicht eingehen wollen, besteht zwischen den kollektiven Wellenfunktionen, die in diesen zwei Methoden gewonnen werden.

Diese zwei Näherungsmethoden ermöglichen auf eine mikroskopische Weise die Einführung von Phononen in die Kernstruktur. Die Operatoren B^+_r und B_r von JANCOVICI und SCHIFF erfüllen genau die kanonischen Vertauschungsrelationen für Bosonen; dasselbe gilt näherungsweise für Q^+_r und Q_r in der R.P.A. Es ist aber bekannt, daß diese Methoden sehr bald schlecht werden, wenn man Zustände mit mehr als einem Phonon betrachtet. Dieser Nachteil ist zweifellos auf den Teil von $\tilde{\mathscr{H}}$, den man

[12] BOHM, D., and D. PINES: Phys. Rev. **92**, 609 (1953). — SAWADA, K.: Phys. Rev. **106**, 372 (1957). — SAWADA, K., K. A. BRUECKNER, N. FUKUDA, and R. BROUT: Phys. Rev. **108**, 507 (1957). — ANDERSON, P. W.: Phys. Rev. **112**, 1900 (1958).

vernachlässigt hat und nicht konsequent berücksichtigen kann, zurückzuführen.

Diese Schwierigkeit tritt nicht auf, wenn man die vollständige Gl. (7.12) benützt. Man kann sich selbstverständlich fragen, ob die systematische Einführung von Phononen in die Theorie eines Fermionensystems zweckmäßig ist. Phononen wurden jedenfalls in viele Modelle eingebaut, wie z. B. in das hydrodynamische Modell von BOHR-MOTTELSON[13], in das Zweiflüssigkeitsmodell von STEINWEDEL-JENSEN[14] und in ihre natürliche Erweiterung: die „Dynamic Collective Theory" von DANOS und GREINER[6]. Das letztere Modell benützt verschiedene Sorten von Phononen, die durch eine zusätzliche Wechselwirkung gekoppelt sind, und liefert interessante Ergebnisse, die man auf mikroskopischer Basis besser verstehen möchte. Andererseits verdient die Struktur dieser Theorie selbst eine genauere Untersuchung, nämlich: die Wechselwirkung, die phänomenologisch hingeschrieben wird, erzwingt in der Wellenfunktion Komponenten mit einer beliebig hohen Anzahl von Phononen. Die Gefahr besteht dabei, daß man immer mehr gegen das Pauli-Prinzip verstößt, wenn man diese Theorie verfeinern und den Hamilton-Operator besser diagonalisieren will. Dies bleibt natürlich eine Vermutung, solange keine mikroskopische Erklärung dieser Theorie vorliegt. Wir werden jetzt als Versuch in dieser Richtung, Phononen als Hilfsgrößen in unser Schema einführen; etwas allgemeiner als JANCOVICI und SCHIFF, setzen wir

$$\begin{aligned} B_r^{(+)} &= c_r + \sum_{\alpha\mu} \left(u_{\alpha\mu}^r A_\mu^\alpha + v_{\alpha\mu}^r \frac{\partial}{\partial A_\mu^\alpha} \right) \\ B_r^{(-)} &= c_r + \sum_{\alpha\mu} \left(u_{\alpha\mu}^r \frac{\partial}{\partial A_\mu^\alpha} + v_{\alpha\mu}^r A_\mu^\alpha \right) \end{aligned} \tag{9.7}$$

und verlangen, daß die reellen Koeffizienten $u_{\alpha\mu}^r$ und $v_{\alpha\mu}^r$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\mu} (u_{\alpha\mu}^r u_{\alpha\mu}^s - v_{\alpha\mu}^r v_{\alpha\mu}^s) &= \delta_{rs} \\ \sum_{\alpha\mu} (u_{\alpha\mu}^r v_{\alpha\mu}^s - v_{\alpha\mu}^r u_{\alpha\mu}^s) &= 0 \end{aligned} \tag{9.8}$$

$$\begin{aligned} \sum_{r} (u_{\alpha\mu}^r u_{\beta\nu}^r - v_{\alpha\mu}^r v_{\beta\nu}^r) &= \delta_{\alpha\beta}\, \delta_{\mu\nu} \\ \sum_{r} (u_{\alpha\mu}^r v_{\beta\nu}^r - v_{\alpha\mu}^r u_{\beta\nu}^r) &= 0 . \end{aligned} \tag{9.9}$$

---

[13] BOHR, A., u. B. R. MOTTELSON: Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd. **27**, 16 (1953).

[14] STEINWEDEL, H., u. J. H. D. JENSEN: Z. Naturforsch. **5a**, 413 (1950). — STEINWEDEL, H., J. H. D. JENSEN, and P. JENSEN: Phys. Rev. **79**, 1019 (1950).

Die c_r's sind freie Parameter. Die Vertauschungsrelationen von $B_r^{(+)}$ und $B_r^{(-)}$ sind gemäß (9.7–8):

$$[B_r^{(+)}, B_s^{(-)}] = \delta_{rs}, \quad [B_r^{(+)}, B_s^{(+)}] = [B_r^{(-)}, B_s^{(-)}] = 0. \tag{9.10}$$

Diese Operatoren sind absichtlich nicht B^+ und B genannt worden, weil sie ,wie A und $\partial/\partial A$, bezüglich des Skalarproduktes (4.8) nicht zueinander hermitisch konjugiert sind. Der Vakuumzustand h_0 ist die Lösung von

$$B_r^{(-)} h_0 = 0, \quad \text{alle } r.$$

Man bekommt explizit

$$h_0 = e^{-M(A)}, \tag{9.11}$$

wobei

$$M(A) = \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha\beta > F \\ \mu\nu \leqq F}} M_{\mu\nu}^{\alpha\beta} A_\mu^\alpha A_\nu^\beta + \sum_{\substack{\alpha > F \\ \mu \leqq F}} N_\mu^\alpha A_\mu^\alpha. \tag{9.12}$$

Die Koeffizienten $M_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ und N_μ^α müssen die Gleichungen

$$\sum_{\beta\nu} u_{\beta\nu}^r M_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = v_{\alpha\mu}^r, \tag{9.13}$$

bzw.

$$\sum_{\beta\nu} u_{\beta\nu}^r N_\nu^\beta = c^r, \tag{9.14}$$

erfüllen. Die Umkehrung von (9.7) ist:

$$\begin{aligned} A_\mu^\alpha &= c_{\alpha\mu} + \sum_r (u_{\alpha\mu}^r B_r^{(+)} - v_{\alpha\mu}^r B_r^{(-)}) \\ \frac{\partial}{\partial A_\mu^\alpha} &= c_{\alpha\mu} + \sum_r (u_{\alpha\mu}^r B_r^{(-)} - v_{\alpha\mu}^r B_r^{(+)}) \end{aligned} \tag{9.15}$$

mit

$$c_{\alpha\mu} = -\sum_r (u_{\alpha\mu}^r - v_{\alpha\mu}^r) c_r. \tag{9.16}$$

Die Ausdrücke (9.15) für A und $\partial/\partial A$ werden jetzt in ganz $\tilde{\mathscr{H}}$, Gl. (8.7), und nicht nur in Gl. (9.2) eingesetzt. Nachdem alle Operatoren $B_r^{(+)}$ auf die linke Seite von allen $B_r^{(-)}$ durchkommutiert worden sind, erhält man für $\tilde{\mathscr{H}}$ ein Polynom in $B_r^{(\pm)}$. Es treten u.a. lineare Terme auf, die von der Wick-Ordnung innerhalb $\tilde{\mathscr{H}}_1$ stammen. Die Koeffizienten c_r wurden eingeführt um die in $B_r^{(\,)}$ linearen Glieder zum Verschwinden zu bringen. Die Parameter $u_{\alpha\mu}^r$ und $v_{\alpha\mu}^r$ werden durch die Forderung bestimmt, daß der bilineare Anteil von $\tilde{\mathscr{H}}$ diagonal ist, d.h. nur noch die Produkte $B_r^{(+)} B_r^{(-)}$ enthält. In diesem Fall nimmt $\tilde{\mathscr{H}}$ die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathscr{H}} &= U(c,u,v) + \sum_r \omega_r(c,u,v)\, B_r^{(+)} B_r^{(-)} + \tilde{\mathscr{H}}_w(c,u,v; B^{(+)}, B^{(-)}) \\ &= U + \tilde{\mathscr{H}}_P + \tilde{\mathscr{H}}_w, \end{aligned} \tag{9.17}$$

U ist eine Konstante, und die Phononenwechselwirkung $\tilde{\mathcal{H}}_w$ ist ein Polynom, wobei Glieder vom Grade 3 bis 8 in $B^{(\pm)}$ auftreten. Die zwei Forderungen (keine linearen und nur diagonale quadratische Terme im $\tilde{\mathcal{H}}$) drücken sich durch ein System von nichtlinearen Gleichungen für die Parameter u^r, v^r und c_r aus. Es wäre hier fehl am Platz, diese komplizierten Gleichungen und die explizite Form von $\tilde{\mathcal{H}}_w$ niederzuschreiben, ohne gleichzeitige Diskussion eines numerischen Beispiels. Wir werden uns vorläufig mit einigen allgemeinen Bemerkungen begnügen, wozu wir diese Ausdrücke nicht unbedingt hinzuschreiben brauchen.

Die Bestimmungsgleichungen von u, v und c reduzieren sich auf das übliche lineare System von JANCOVICI und SCHIFF (oder der R.P.A.), wenn man

$$0=\tilde{\mathcal{H}}_1=\tilde{\mathcal{H}}_2=\text{Pauli-Korrektur von } \tilde{\mathcal{H}}_0$$

setzt. Es ist dann zu erwarten, daß unsere Koeffizienten, in den Fällen wo diese Methode gültig ist, nicht weit entfernt von der Lösung der R.P.A. (ohne Paarungskorrelation) sein werden. Wenn die Paarungskorrelation im Grundzustand groß ist, spielt der Term $\tilde{\mathcal{H}}_1$ keine große Rolle und $c_r \approx 0$. Unsere Gleichungen haben mit $c_r=0$ eine ähnliche Form wie die allgemeine „Gap"-Gleichung der Paarungstheorie. Es treten im Gegensatz zu der R.P.A. typische Paarungsmatrixelemente wie $\langle \alpha, -\alpha \,|u|\, \beta, -\beta\rangle$, $\alpha, \beta > F$, und $\langle \mu, -\mu \,|u|\, \nu, -\nu\rangle$, $\mu, \nu \leqq F$, auf, die ausschließlich in $\tilde{\mathcal{H}}_2$ enthalten sind. Diese Matrixelemente haben hier die Gelegenheit die Werte von u^r und v^r zu beeinflussen, und damit die Paarungskorrelation des Grundzustandes, die durch die Koeffizienten $M^{\alpha,-\alpha}_{\mu,-\mu}$ (Gl. (9.12)) zum Ausdruck kommt, zu verstärken. Nur ein numerisches Beispiel wird zeigen können, ob die dadurch entstandene Korrelation stark genug ist, damit unsere die Teilchenzahlen erhaltenden Methode gerechtfertigt ist.

Für sphärische Kerne und abgeschlossene j-Schalen kann man den Indizes r einen scharfen Drehimpuls zuordnen und $r=(N, J, M)$ setzen. Es ist anzunehmen, daß die Lösungen v^r, u^r (wie in der R.P.A.) nur wenig von $v^r_{\alpha\mu} \approx 0$, $u^r_{\alpha\mu} \approx \delta_{\alpha\alpha_r}\delta_{\mu\mu_r}$ abweichen werden, außer für den niedrigsten Zustand einiger Werte von J^π (z.B. Dipoloszillationen, 1^-, Quadrupolvibrationen 2^+). Wenn das Ein-Phonon-Spektrum ω_{J_π} dieser wenigen kollektiven Zustände in unserem Verfahren richtig beschrieben wird, kann man versuchsweise die entsprechenden Phononen mit denen der „Dynamic Collective Theory" identifizieren. Die Form und die Intensität der Wechsekwirkung zwischen Phononen verschiedener Art wird dann von $\tilde{\mathcal{H}}_w$ vorgeschrieben.

Zum Schluß noch ein Wort über das Pauli-Prinzip. Die einzelnen Glieder $\tilde{\mathcal{H}}_0$, $\tilde{\mathcal{H}}_1$ und $\tilde{\mathcal{H}}_2$ von $\tilde{\mathcal{H}}$, Gl. (8.7), haben keine Wirkung auf die Wellenfunktionen, die nicht mit dem Pauli-Prinzip verträglich ist. Dies

ist nicht mehr wahr für die Terme von Gl. (9.17), weil die Pauli-Korrekturen durch die Transformation (9.15) unter U, $\tilde{\mathcal{H}}_p$ und $\tilde{\mathcal{H}}_w$ verteilt wurden. Die Eigenlösungen von $\tilde{\mathcal{H}}$ „erfüllen" wohl das Pauli-Prinzip, aber schon nicht mehr die von $\tilde{\mathcal{H}}_p$. Es wäre also gefährlich, einen Teil von $\tilde{\mathcal{H}}_w$ zu vernachlässigen – mit der Ausrede, daß er eine kleine dynamische Rolle spielt – da sein Einfluß äußerst wichtig für die Wellenfunktion sein könnte.

10. Zusammenfassung

Die Hauptzüge dieser Arbeit bestehen in zwei verwandten Umformungen des N-Fermionen-Problems. Die erste führt aus einem Variationsverfahren zu einer partiellen Differentialgleichung, von der wir glauben, daß sie eine geeignete Basis für gruppentheoretische Untersuchungen der kollektiven Kernzustände liefert.

Die zweite Umschreibung ermöglicht die Einführung von wahren Phononen als Hilfsgrößen in die Theorie der Kernstruktur. Das Fernziel dieses Verfahrens ist ein besseres Verständnis von Kernmodellen, die zur Beschreibung von Vibrationszuständen Phononen verwenden, auf mikroskopischer Basis.

Der Autor ist Dr. H. D. ZEH und Dr. W. BIERTER für interessante Diskussionen und kritische Durchsicht des Manuskriptes sehr dankbar.

Zeitschrift für Physik 202, 177–181 (1967)

Surface Delta Interaction and Electromagnetic Transitions in Tin and Lead Isotopes*

W. YUCKER, A. PLASTINO**, and S. A. MOSZKOWSKI
University of California, Los Angeles, California

Received February 27, 1967

Electric Quadrupole and Octupole transition rates are calculated in even Pb and Sn isotopes using wavefunctions obtained with a Surface Delta Interaction. Agreement with experimental results is better than in previous calculations which used a Pairing plus Quadrupole (or Octupole) or a Gaussian Interaction.

In the last 6 years many properties of low-lying nuclear spectra have been understood from a microscopic point of view. In medium and heavy nuclei the quasi-particle treatment has been successfully applied, utilizing rather simple effective interactions. Most authors, following KISSLINGER and SORENSEN [1], used a pairing plus quadrupole (or octupole) force (PQF). Others employed a more classical interaction, such as a Gaussian force (GF).

However, these two alternative choices of the effective interaction have not yielded very different results. In both cases good agreement with experiment has been obtained, the main difference being in which of two approximations is used. The Tamm-Dancoff (TDA) and Random Phase Approximation (RPA) give nearly identical transition rates for the GF, but different results for the PQF model.

Both the GF and the PQF require the fitting of several parameters prior to their application to the calculation of nuclear properties. Recently a simple, one parameter force, the Surface Delta Interaction (SDI) has been proposed [2], which is particularly suitable for this type of calculation and is able to produce simultaneously both short and long range effects. It was previously applied to a calculation of energy levels in single-closed shell nuclei using TDA [3], and the results were as good as those achieved using the other interactions referred to above.

In this note we calculate $E2$ and $E3$ transition rates in even Sn and Pb isotopes in order to test SDI wavefunctions and to compare our results

* Work supported in part by the National Science Foundation.

** Permanent adress: Universidad Nacional de la Plata, Argentina. Fellow of the Consejo Nacional de Investigaciones Cientificas y Tecnicas of Argentina.

[1] KISSLINGER, L. S., u. R. A. SORENSEN: Kgl. Danske Videnskab Selskab, Mat.-fys. Medd. **32**, No. 9 (1960); — Revs. Modern Phys. **23**, 853 (1963).

[2] GREEN, I. M., and S. A. MOSZKOWSKI: Phys. Rev. **139**, 790 (1965).

[3] PLASTINO, A., R. ARVIEU, and S. A. MOSZKOWSKI: Phys. Rev. **145**, 837 (1966).

with those obtained using the PQF and GF. Of course, since we only have neutrons in the unfilled shells, all the transition strength must come from excitation of the filled proton shells. A better test of the SDI wavefunctions requires the explicit consideration of proton core excitation rather than the notion of an effective charge. We follow the latter approach in this note, since our objective is only to compare the results for an SDI with those obtained with more conventional interactions. (The core excitation approach is now under investigation.)

The mathematical formalism required in order to calculate transition rates is the usual one described in Ref.[4]. We begin by applying the Bogolyubov-Valatin transformation to the nuclear Hamiltonian. The transformed Hamiltonian describes approximately independent quasiparticles. This step takes into account correlations due to pairing. The second step is the diagonalization of the new hamiltonian including the residual interactions in the two quasiparticle space.

In the present treatment we use the same interaction both for describing the pairing component and the residual quasiparticle interaction, namely the surface delta interaction;

$$V_{\mathrm{SDI}} = -4\pi G\,\delta(\Omega_{ik}). \tag{1}$$

This is a δ-function interaction in the angular coordinates (Ω) of the interacting particles with the additional requirement that all radial integrals are set equal.

Further details concerning the physical basis of this interaction and its utilization in calculations of energy spectra may be found in references 2 and 3.

In this stage of treating the quasiparticle interaction one can utilize either the Tamm-Dancoff approximation (TDA) or the random phase approximation (RPA). In the former, the nuclear excited states are described as a superposition of basis wavefunctions

$$|\Omega\, J\, M\rangle = \sum_{\alpha\beta}{}' \psi_{\alpha\beta}{}^{\Omega}\, |(\alpha\beta)\, J\, M\rangle \tag{2}$$

where $|(\alpha\beta)\, JM\rangle$ are the different two quasiparticle state components and Ω denotes the set of extra quantum numbers required to specify uniquely a particular state. To calculate transition rates we have to consider the one particle tensor operator $T(kq)$ associated with electric multipole radiation. The Bogolyubov-Valatin transformation allows us to separate this operator into two terms: $T_{11}(kq)$ which conserves the number of quasiparticles, and $T_{20}(kq)$ which creates or destroys two quasiparticles. Only the latter appears in the calculation of transition probabilities to the ground state.

[4] ARVIEU, R., and E. SALUSTI: Nuclear Phys. **66**, 305 (1965).

In this approximation the transition amplitude is given by

$$\langle \tilde{O} | \, T_{20}(k\,q) \, | \, \Omega \, J \, M \rangle = -\sum_{\alpha\beta}{}' \psi_{\alpha\beta}{}^{\Omega} \, t_{\alpha\beta} \, \delta_{k\,J} \, \delta_{q\,M} \tag{3}$$

where

$$t_{\alpha\beta} = [(1+\delta_{\alpha\beta})(2k+1)]^{-\frac{1}{2}} \langle J_\alpha \| \, t_k \, \| J_\beta \rangle \, [U_\alpha V_\beta + (-)^k V_\alpha U_\beta] \tag{4}$$

$\tilde{O}$ denotes the quasiparticle vacuum, and the double barred quantity refers to the reduced matrix element of the one particle tensor operator.

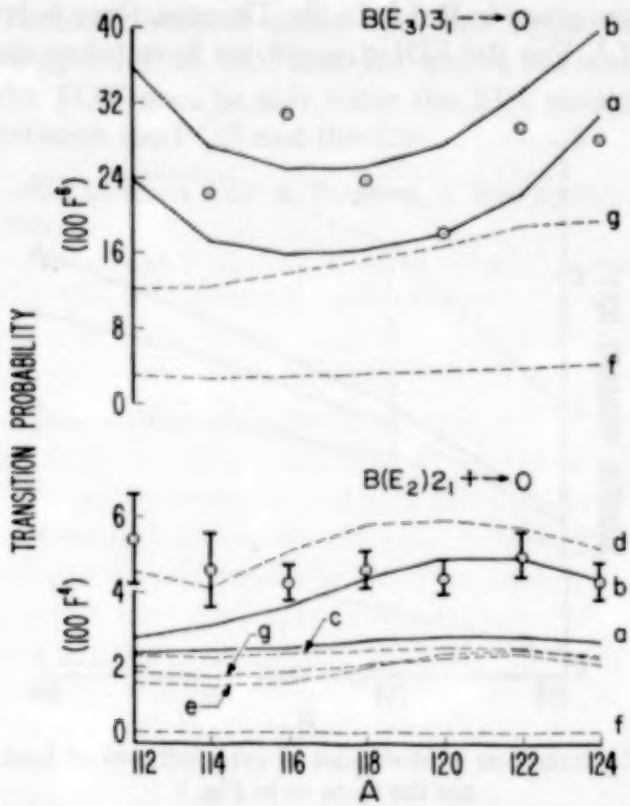


Fig. 1. Reduced $E2$ and $E3$ transition probabilities in the even tin isotopes. Dotted points represent experimental values. a and b Calculated results using surface delta interaction (TDA and RPA, respectively). c and d Calculated results using pairing plus quadrupole interaction[4]. (TDA and RPA). e Calculated results using Gaussian interaction[4] in TDA. (RPA gives practically the same values). f and g Calculated results using pairing plus quadrupole interaction including effect of core excitation[5]. (TDA and RPA)

The prime on the sum indicates that each pair of indices (α, β) appears only once.

In the RPA, the ground state is a superposition of the quasiparticle vacuum and states containing $4, 8, \ldots, 4n$ quasiparticles. An excited state in the two QP basis can be obtained by either creating two quasiparticles $\alpha\beta$ coupled to JM, $|(\alpha\beta)\,JM\rangle$ or destroying such a pair

$|(\bar{\alpha}\bar{\beta})JM\rangle$. In this case, the complete wavefunction is of the form

$$\Omega JM)=[1+\delta_{\alpha\beta}]^{-\frac{1}{2}}\sum_{\alpha\beta}'[\xi_{\alpha\beta}{}^{\Omega}|(\alpha\beta)JM\rangle+\eta_{\alpha\beta}{}^{\Omega}(-)^{J+M}|(\bar{\alpha}\bar{\beta})JM\rangle]. \quad (5)$$

Taking the T_{20} component of the transition operator, we obtain:

$$\langle\tilde{O}|\,T_{20}(kq)\,|\Omega JM\rangle=-\delta_{kJ}\delta_{qM}\sum_{\alpha\beta}'(\xi_{\alpha\beta}{}^{\Omega}-\eta_{\alpha\beta}{}^{\Omega})t_{\alpha\beta}. \quad (6)$$

For the Pb isotopes, the single-particle levels and the SDI coupling strength are those given in Ref.[3]. In the Tin case, the s.p. levels have been taken from Ref.[5]. For the SDI strength we have taken the value 0.25*.

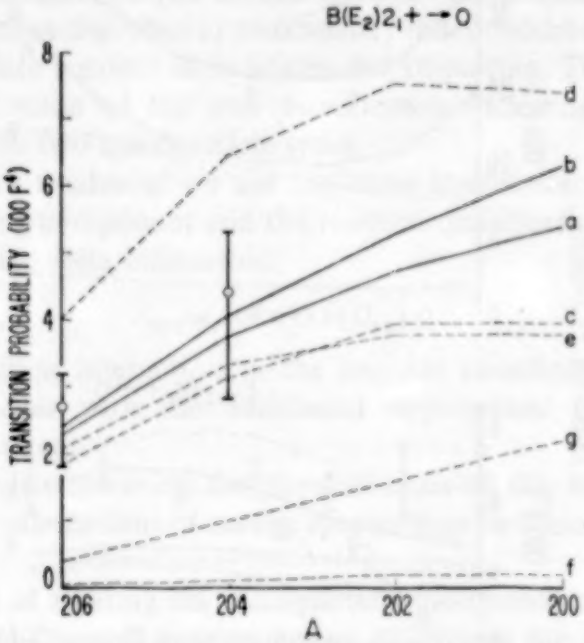


Fig. 2. Reduced $E2$ transition probabilities in even isotopes of lead. Further details are the same as in Fig. 1

Fig. 1 shows the results obtained in the even isotopes of Tin for the $E2$ ($E3$) transitions from the lowest $2+(3-)$ excited state to the ground state. Fig. 2 shows $E2$ results for the even Pb isotopes. No $E3$ transitions are given here due to lack of experimental information. In our calculations we took an effective charge equal to 1**. The same value for the effective

* Actually, as shown in Ref.[3], a better agreement with experiment is obtained in the Tin case if one uses an SDI minus a pairing force instead of a pure SDI. The results reported here for the Sn isotopes have been obtained subtracting from the SDI a pairing force in such a way as to obtain the same pairing properties as in Ref.[5]. This subtraction amounts to 20%.

** This value was fitted by TAMURA and UDAGAWA[6] for the Sn isotopes.

[5] LOMBARD, R. J., and X. CAMPI-BENET: Nuclear Phys. **83**, 303 (1966).

[6] TAMURA, T., and T. UDAGAWA: Progr. Theoret. Phys. (Kyoto) **26**, 947 (1961).

charge was chosen in Ref.[4]. The results obtained there for the PQF and the GF and those obtained in Ref.[5] for the PQF, but taking into account core excitation, are also shown in Figs. 1 and 2.

As expected, the RPA gives larger values than the TDA. It may also be of interest that the calculated transition rates agree better with experiment than the ones calculated using the GF or PQF models, though the clarification of this point requires a more detailed examination of the proton core excitation. It should also be noted that the difference between the results obtained using the two approximations above referred to is bigger for an SDI than for a GF, but smaller in the SDI case than in the PQF one. In this sense the SDI would be something intermediate between the PQF and the GF.

The authors want to thank Drs. A. Faessler, J. Bar-Touv, and V. Gillet for valuable discussions.

Zeitschrift für Physik 202, 182–189 (1967)

On the Influence of Shell Structure and Matrix Element Fluctuations on the Pairing Correlation in Nuclei

J. O. RASMUSSEN and C. W. MA
Departments of Chemistry and Physics
University of California, Berkeley/USA

Received February 28, 1967

The uniform model for the nuclear pairing-force problem is extended to take into account the effect of fluctuations in nucleon orbital level density ρ and in pairing matrix elements $G_{\nu\nu'}$. Simple formulas for the average dependence of level density on energy are presented, and alternative ways of estimating effects of shell bunching on the pairing correlation are derived. It is argued also that the pairing constant G might be systematically overestimated in the usual BCS numerical calculations; a semi-constant pairing force with diagonal elements larger than off-diagonal is thus suggested.

1. Introduction

A useful model for general studies of pairing-force effects is the uniform model (variously called continuous or homogeneous model) introduced by BELYAEV[1]. In this model the sums over discrete nucleon orbitals occurring in the usual BCS equations for the gap parameter Δ are replaced by integrals over a Nilsson orbital level density ρ. In the case of strongly deformed nuclei it may be a reasonable approximation to take ρ as a constant. For convenience the matrix elements scattering a pair of nucleons from one orbital to another are often taken as a constant. BOHR and MOTTELSON[2] argue that the matrix elements will become small for momentum transfers greater than $\hbar/a$ where a is the force range, and thus that the constant matrix elements G should be zero outside an energy interval $2\mu \approx E_F$ around the chemical potential, E_F being the Fermi energy. The solution of the BCS equations with these assumptions gives

$$\Delta_0 = \mu \left(\sinh \frac{1}{\rho G} \right)^{-1} \approx 2\mu \exp\left(-\frac{1}{\rho G} \right). \tag{1}$$

We propose here to consider modifications of the uniform model to take into account fluctuations of G and ρ with energy. We consider also the consequences of the diagonal matrix elements $G_{\nu\nu}$ systematically exceeding the off-diagonal elements $G_{\nu\nu'}$.

[1] BELYAEV, S. T.: Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd. **31**, No. 11 (1959).

[2] BOHR, A., and B. R. MOTTELSON: Unpublished Lecture Notes. Berkeley, Calif. 1966.

2. Effects of Shell Structure on Pairing

STRUTINSKY[3] has carefully considered the fluctuations of ρ with energy and deformation by numerically averaging over Nilsson energy level diagrams. One sees the average trend of ρ [or $g(E)$ in his notation] as increasing with energy. This is a feature of the harmonic oscillator potential and would be less accentuated in an infinite square well. (A finite square well would show a sharp increase in ρ near energies a nucleon binding energy above the chemical potential. A velocity-dependent potential well would tend further to lower the level density for deep-lying levels.) One sees the strong minima at the magic numbers for spherical nuclei, while for deformed shapes the fluctuation amplitude decreases and the period shortens.

It is interesting in passing to develop a simple numerical formula for the dependence of smoothed average level density on energy.

By taking successive finite differences of the spin-orbit shell closure numbers, 28, 50, 82, 126, we readily determine an algebraic relationship between the number of orbitals v in a shell and the principal quantum number N of most of the orbitals of the shell.

$$v=\frac{N^2}{2}+\frac{3N}{2}+2. \tag{2}$$

Thus, if there is an energy separation $\hbar\omega_0$ between shell breaks, we get for average orbital density within a shell that

$$\rho_{av}(N)=\frac{N^2+3N+4}{2\hbar\omega_0}. \tag{3}$$

Such an expression would hold fairly well for sufficient deformation that the predominant shell bunching is washed out.

The orbital energy ε is related to the principal quantum number by

$$\varepsilon=\hbar\omega_0(N+3/2). \tag{4}$$

Thus by substitution into the previous equation we get

$$\rho(\varepsilon)=\left[\left(\frac{\varepsilon}{\hbar\omega_0}\right)^2+\frac{25}{4}\right]\Big/2\hbar\omega_0. \tag{5}$$

The formula is not expected to be reliable below $N=3$, since the pattern of shell breaks occurring at the spin-orbit split sets in at $N=3$ with magic number 28.

---

[3] STRUTINSKY, V. M.: Soviet J. Nuclear Phys. **3**, 449 (1966), Kurchatov Atomic Energy Institute Preprint IAE-1108, Moscow, 1966.

Another simple formula relating ρ to ε can be taken from the work of HILL and WHEELER[4] for a rectangular box with infinite potential at the walls. They give for the number of states ν with wave number less than k

$$\nu = \frac{Vk^3}{6\pi^2} - S\frac{k^2}{16\pi} + \frac{Lk}{8\pi^2} \tag{6}$$

where V is the volume, S the surface area and L the total length of all edges of the box. Substituting for k, the quantity $(2m\varepsilon)^{\frac{1}{2}}/\hbar$, dropping the last term (curvature term) as inappropriate for shapes without sharp edges, and differentiating with respect to ε we get

$$\rho(\varepsilon) = \frac{d\nu}{d\varepsilon} = \frac{(2m)^{\frac{3}{2}} V}{4\pi^2 \hbar^3} \varepsilon^{\frac{1}{2}} - \frac{mS}{8\pi\hbar}. \tag{7}$$

The true average dependence of ρ on ε may lie somewhere between the extremes of Eqs. (5) and (7). Eq. (7) lends itself to the study of the average dependence of ρ on deformation.

Let us turn now to a consideration of the BCS equation in integral form with $G_{\nu\nu'}$ still equal to a constant G but with $\rho(\varepsilon)$ now not constant.

$$1 = \frac{G}{2} \int_{-\mu}^{\mu} \frac{\rho(\varepsilon)\, d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}}. \tag{8}$$

We make a change of variable by the substitution $\varepsilon = \Delta \tan\theta$.

$$1 = \frac{G}{2} \int_{-\tan^{-1}\frac{\mu}{\Delta}}^{\tan^{-1}\frac{\mu}{\Delta}} \rho(\theta) \frac{d\theta}{\cos\theta}. \tag{9}$$

If $\rho(\theta)$ is constant, the integral diverges in the limit of $\mu \to \infty$ (i.e. limits on the integral of $-\pi/2$ and $\pi/2$). However, if $\rho(\theta)$ approaches zero at $-\pi/2$ and $\pi/2$ the integral may be finite. In particular if

$\rho(\theta) = \cos^P\theta$ with any

$P > 0$ we may use for the infinite energy limits

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{P-1}\theta\, d\theta = \pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{P}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{P+1}{2}\right)}. \tag{10}$$

For P an integer greater than zero, the integral can be written in terms of factorials. If $\rho(\theta) = 0$ for $\theta = \pm\pi/2$, we can expand, for example,

[4] HILL, D. L., and J. A. WHEELER: Phys. Rev. **89**, 1102 (1953).

STRUTINSKY's $\rho(\varepsilon)$ curves on a θ scale with a suitable upper energy cut-off, in powers of $\cos\theta$.

$$\rho(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\Delta)\cos^n\theta\,. \tag{11}$$

The expansion coefficients a_n are implicit functions of Δ, which is the scale parameter for transformation of ρ to the θ scale. Then the BCS equation for Δ becomes

$$1=\frac{G\pi^{\frac{1}{2}}}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\Delta)\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,. \tag{12}$$

This equation should lend itself readily to solution by iteration in a computer.

A simpler but less general approximate method to take into account a few sharp fluctuations about an otherwise constant level density can be obtained as a generalization of a formula of BANG et al.[5] for the blocking effect in odd nuclei.

Suppose a single orbital of energy ε_k is removed from the pairing problem for a system with uniform level spacing, either because of blocking or because of a shell or subshell. The modified Eq. (8) reads

$$1=\frac{G\rho}{2}\int_{-\mu}^{\mu}\frac{d\varepsilon}{(\varepsilon^2+\Delta^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{G u_k v_k}{\Delta} \tag{13}$$

where u_k and v_k are BCS parameters the missing level would have had if present, namely,

$$\left.\begin{matrix} v_k^2 \\ u_k^2 \end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left[1\mp\frac{\varepsilon_k}{(\varepsilon_k^2+\Delta^2)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

With this substitution we get

$$1=\frac{G\rho}{2}\int_{-\mu}^{\mu}\frac{d\varepsilon}{(\varepsilon^2+\Delta^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{G}{2(\varepsilon_k^2+\Delta^2)^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{14}$$

Rearranging, we get

$$1=\frac{G\rho}{2\left[1+\frac{G}{2(\varepsilon_k^2+\Delta^2)^{\frac{1}{2}}}\right]}\int_{-\mu}^{\mu}\frac{d\varepsilon}{(\varepsilon^2+\Delta^2)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

We can express the solution as in Eq. (1) but with $G\rho$ replaced by the renormalized value

$$G\rho\left[1+\frac{G}{2(\varepsilon_k^2+\Delta^2)^{\frac{1}{2}}}\right]^{-1}.$$

[5] BANG, J., J. KRUMLINDE, and S. G. NILSSON: Phys. Letters **15**, 55 (1965).

Thus,

$$\Delta \approx 2\mu \exp\left[-\frac{1}{\rho G}-\frac{1}{\rho\, 2(\varepsilon_k^2+\Delta^2)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

That is, a missing level at energy $|\varepsilon_k|$ removed from the chemical potential leads approximately to a reduction in Δ by a factor

$$\Delta \approx \Delta_0 \exp\left[-\frac{1}{2\rho(\varepsilon_k^2+\Delta_0^2)^{\frac{1}{2}}}\right]. \tag{15}$$

A major shell break might be simulated by a product of such factors for several ε_k at the shell break. Likewise, a positive fluctuation in ρ caused by the accidental bunching of several Nilsson orbitals could be represented by such exponential factors with positive arguments at the energies ε_i where extra levels appear. Thus, a general formula might read

$$\Delta \approx \Delta_0 \exp\left[-\sum_k \frac{1}{2\rho(\varepsilon_k^2+\Delta_0^2)^{\frac{1}{2}}}+\sum_i \frac{1}{2\rho(\varepsilon_i^2+\Delta_0^2)^{\frac{1}{2}}}\right]. \tag{16}$$

3. Treatment of Non-Constant Pairing Matrix Elements

If, now, we are to assume the matrix elements $G_{\nu\nu'}$ are no longer constant, then we get a more complicated equation, since Δ will not be a constant but a function of ε.

From BELYAEV's work [1]

$$\Delta_{\nu'}=\frac{1}{2}\sum_\nu \frac{\Delta_\nu G_{\nu\nu'}}{\sqrt{\varepsilon_\nu^2+\Delta_\nu^2}}. \tag{17}$$

Going to the uniform model we get an integral equation for $\Delta(\varepsilon')$

$$\Delta(\varepsilon')\approx\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\varepsilon,\varepsilon')\,\rho(\varepsilon)\,\Delta(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta^2(\varepsilon)}}. \tag{18}$$

It will be a reasonable approximation to replace $\Delta(\varepsilon)$ in the denominator by Δ_0, since the denominator is smallest near $\varepsilon=0$ and since $\Delta(\varepsilon)$ should not be a rapidly varying function of ε.

$$\Delta(\varepsilon')\approx\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\varepsilon,\varepsilon')\,\rho(\varepsilon)\,\Delta(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+\Delta_0^2}}. \tag{19}$$

Then we substitute as before

$$\varepsilon=\Delta_0\tan\theta$$

$$\Delta(\theta')=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(\theta,\theta')\,\rho(\theta)\,\Delta(\theta)\,\frac{d\theta}{\cos\theta}. \tag{20}$$

We may illustrate the nature of this equation by considering a special functional form for the matrix element. Suppose we take $\rho(\varepsilon)$ as a constant and $G(\theta, \theta') = G_0[\cos\theta \cos\theta']^{\frac{1}{2}}$. We try $\Delta(\theta) = \Delta_0 \cos^{\frac{1}{2}}\theta$ and get

$$\Delta_0 \cos^{\frac{1}{2}}\theta' = \frac{1}{2}\cos^{\frac{1}{2}}\theta' \, G_0 \rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta_0 \, d\theta$$

$$\Delta_0 = \frac{\pi}{2} G_0 \rho \, \Delta_0 . \tag{21}$$

That is, we have this solution to the integral equation when $G_0\rho = 2/\pi$.

$$\Delta(\varepsilon) = \Delta_0^{\frac{1}{2}}[\varepsilon^2 + \Delta_0^2]^{-\frac{1}{4}}. \tag{22}$$

More generally, for matrix element dependence

$$G(\theta, \theta') = G_0[\cos\theta \cos\theta']^P, \quad \text{with} \quad P > 0 \tag{23}$$

we get a solution

$$\Delta(\varepsilon) = \Delta_0 \left(\frac{\Delta_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2}}\right)^P \tag{24}$$

if

$$1 = \frac{\rho G_0}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(P)}{\Gamma\left(\frac{2P+1}{2}\right)}.$$

In numerical studies of pairing-type matrix elements for a δ force between Nilsson orbitals MANG et al.[6] observed that the diagonal elements were systematically larger than off-diagonal by a factor of 2–3. They noted also that as a consequence of the large diagonal matrix elements, the solution of the gap equation gave systematically large Δ_ν values for orbitals nearest the Fermi surface. The work of RHO[7] on spherical nuclei with finite-range Gaussian force also showed systematically larger diagonal than off-diagonal matrix elements. This feature is not taken into account properly in the usual constant G treatments of pairing.

Let us examine the consequences of a pairing force in which all off-diagonal elements are equal and diagonal elements are larger, namely

$$G_{\nu\nu'} = \begin{cases} G & \nu \neq \nu' \\ G + F & \nu = \nu' \end{cases}$$

$$\bar{G}_{\nu\nu'} = (G+F)\,\delta_{\nu\nu'}. \tag{25}$$

[6] MANG, H. J., J. K. POGGENBURG, and J. O. RASMUSSEN: Nuclear Phys. **64**, 353 (1965).

[7] RHO, M.: Ph. D. Thesis, Univ. of Calif., Berkeley, U. C. Radiation Laboratory Report (UCRL-11080) 1963.

The expression for the BCS energy of an even system is as follows:

$$\begin{aligned}\langle E\rangle_{\text{even}} &= \sum_{\nu} 2v_\nu^2\left(\varepsilon_\nu - \tfrac{1}{2}\sum_{\nu'}\bar{G}_{\nu\nu'}v_{\nu'}^2\right) - \sum_{\nu\nu'} G_{\nu\nu'}u_\nu v_\nu u_{\nu'}v_{\nu'} \\ &= \sum_{\nu} 2v_\nu^2(\varepsilon_\nu - \tfrac{1}{2}G v_\nu^2) - G\Big(\sum_{\nu} u_\nu v_\nu\Big)^2 - F\cdot\frac{n}{2}\end{aligned} \tag{26}$$

where we have made use of

$$\sum_{\nu} 2v_\nu^2 = n\,.$$

The expression for the BCS energy of the system with $n/2$ pairs $+1$ odd particle is

$$\begin{aligned}\langle E\rangle_{\text{odd}} &= \sum_{\nu\neq k}\left(\varepsilon_\nu - \tfrac{1}{2}\sum_{\nu'\neq k}\bar{G}_{\nu\nu'}v_{\nu'}^2\right)2v_\nu^2 - \sum_{\nu,\nu'\neq k} G_{\nu\nu'}u_\nu v_\nu u_{\nu'}v_{\nu'} + \varepsilon_k - \sum_{\nu\neq k}\bar{G}_{k\nu}v_\nu^2 \\ &= \sum_{\nu\neq k}\left(\varepsilon_\nu - \tfrac{1}{2}G v_\nu^2\right)2v_\nu^2 - G\Big(\sum_{\nu\neq k} u_\nu v_\nu\Big)^2 + \varepsilon_k - G\frac{n}{2} - F\cdot\frac{n}{2}\end{aligned} \tag{27}$$

where the level k is occupied by the odd particle. Note also the substitution from the number equation.

$$\sum_{\nu\neq k} 2v_\nu^2 = n\,.$$

We express the odd-even mass difference as the difference from the average of the two nearest even-even neighbors.

$$\Delta\langle E\rangle_{\text{oe}} = \langle E\rangle_{\text{odd}}^{(n+1)} - \tfrac{1}{2}\left[\langle E\rangle_{\text{even}}^{(n)} + \langle E\rangle_{\text{even}}^{(n+2)}\right] \tag{28}$$

where the superscript indicates the number of particles. It then follows

$$\Delta\langle E\rangle_{\text{oe}} = \Delta\langle E\rangle_{\text{oe}}^{(G)} + \frac{F}{2} \tag{29}$$

where $\Delta\langle E\rangle_{\text{oe}}^{(G)}$ is the ordinary BCS odd-even mass difference that would be obtained with constant pairing G. It is very interesting to see the appearance of an additional term $F/2$. We notice first that the constant term $-F\frac{n}{2}$ in Eqs. (26) and (27) does not change the values of Δ_{even}, λ_{even} and Δ_{odd}, λ_{odd} determined by minimizing $\delta\langle E\rangle_{\text{even}}=0$ and $\delta\langle E\rangle_{\text{odd}}=0$, respectively. It is G which alone determines the above parameters which uniquely determine the configuration mixing. In performing a BCS calculation with constant pairing, the pairing force strength G frequently is fixed by adjusting the theoretical $\Delta\langle E\rangle_{\text{oe}}^{(G)}$ ($\sim\Delta_{\text{even}}$) to match the experimental odd-even mass difference P. It is clear now that one should actually identify the experimental value of P with $\Delta\langle E\rangle_{\text{oe}}$, i.e. $\Delta\langle E\rangle_{\text{oe}}^{(G)}+(F/2)$ rather than $\Delta\langle E\rangle_{\text{oe}}^{(G)}$. The value of G has thus been

systematically overestimated in usual numerical studies by BCS methods with G taken constant. To see the effect more clearly, we may consider a numerical example: For $A=170$ one has $G\simeq 100$ keV, $P\simeq 700$ keV. Assuming $F=G$, i.e. the diagonal elements are two times larger than the off-diagonal ones, one obtains $\Delta_{\text{theo}}\simeq P-(F/2)\simeq 700\,\text{keV}-50\,\text{keV}$, rather than $\Delta_{\text{theo}}\simeq P\simeq 700$ keV; we are thus led to a pairing strength G which is 10% smaller than that determined by the ordinary method. The above estimate is generally true for the rare-earth nuclei. The lowering of G may have some significant practical consequences; for example, the theoretical values of the moments-of-inertia may be affected, as well as spectroscopic factors for stripping reactions, etc.

We therefore suggest using the more realistic semi-constant pairing force indicated in Eq. (25) instead of the constant G. One needs only to replace the relation $\Delta_{\text{theo}}=P$ by

$$\Delta_{\text{theo}}=P-\frac{F}{2} \tag{30}$$

thus lowering the strength G. Otherwise, the whole simple constant-G BCS method still applies without any change. The $F/2$ term in the odd-even mass difference may have special importance near closed shells and subshells where pairing configuration mixing (hence Δ) is especially small.

There have been many detailed numerical studies with BCS equations for discrete orbital energies, but we feel that further studies with the continuous model are of value in exploring general questions of the participation of distant states in pairing and in providing deeper insight into the pairing-superfluidity phenomena in nuclei.

We wish to thank Dr. Gordon Struble for helpful discussions. This work was supported by a grant from the U.S. Atomic Energy Commission.

Zeitschrift für Physik 202, 190–213 (1967)

Messung der Kernradiusdifferenzen von ^{46}Ti, ^{48}Ti und ^{50}Ti durch elastische Elektronenstreuung*

HORST THEISSEN

Institut für Technische Kernphysik der Technischen Hochschule Darmstadt

Eingegangen am 28. Februar 1967

Ratios of differential cross sections for elastic electron scattering from ^{46}Ti, ^{48}Ti and ^{50}Ti have been measured at 29 MeV and 58 MeV. A partial wave analysis, carried out for static Fermi-type nuclear charge distributions, yields differences of the r.m.s. radii R_m of $R_m^{48}-R_m^{46}=(-0{,}00_5\pm 0{,}02_7)$ fm and $R_m^{50}-R_m^{46}=(0{,}00_3\pm 0{,}02_1)$ fm, if the skin thickness parameter z of the charge density is assumed to be constant. If allowance is made for a change in z of $\Delta z/z=\pm 5\%$ and $\pm 10\%$, then the errors increase by $\pm 0{,}01_3$ fm and $\pm 0{,}02_8$ fm, respectively. This indicates a relatively small change in nuclear r.m.s. radii below the magic neutron number $N=28$.

1. Einleitung

Messungen des Wirkungsquerschnittes für die elastische Streuung von Elektronen an Atomkernen ergeben Information über die Kernladungsverteilung (z.B.[1]). Von speziellem Interesse ist dabei die Frage, wie sich die Ladungsverteilung beim Einbau von Neutronen ändert. Erste Aussagen darüber waren aus der optischen Isotopieverschiebung der schweren Elemente abgeleitet worden. Dabei hatte sich gezeigt, daß die quadratisch gemittelten Radien der Kernladungsverteilung bei Isotopen meist nicht proportional zu $A^{\frac{1}{3}}$ anwachsen[2]. Das wurde durch Messungen an Myonen-Atomen bestätigt[3,4].

Daten von Elektronenstreuexperimenten liegen bisher, abgesehen von den sehr leichten Kernen, vor für die Isotope ^{16}O–^{18}O[5], ^{40}Ca–^{44}Ca–^{48}Ca[6,7], ^{58}Ni–^{60}Ni[8] und ^{207}Pb–^{208}Pb[9]. Die Messungen am

* Darmstädter Dissertation (D 17).

[1] HOFSTADTER, R.: Nuclear and nucleon structure. New York: W. A. Benjamin, Inc. 1963.

[2] BRIX, P., u. H. KOPFERMANN: Z. Physik **126**, 344 (1949).

[3] BJORKLAND, J. A., S. RABOY, C. C. TRAIL, R. D. EHRLICH, and R. J. POWERS: Phys. Rev. **136**, B 341 (1964).

[4] COHEN, R. C., S. DEVONS, A. D. KANARIS, and C. NISSIM-SABAT: Phys. Rev. **141**, 48 (1966).

[5] LACOSTE, F., and G. R. BISHOP: Nuclear Phys. **26**, 511 (1961).

[6] HOFSTADTER, R., G. K. NÖLDEKE, K. J. VAN OOSTRUM, L. R. SUELZLE, M. R. YEARIAN, B. C. CLARK, R. HERMAN, and D. G. RAVENHALL: Phys. Rev. Letters **15**, 758 (1965).

[7] OOSTRUM, K. J. VAN, R. HOFSTADTER, G. K. NÖLDEKE, M. R. YEARIAN, B. C. CLARK, R. HERMAN, and D. G. RAVENHALL: Phys. Rev. Letters **16**, 528 (1966).

[8] HAHN, B., R. HOFSTADTER, and D. G. RAVENHALL: Phys. Rev. **105**, 1353 (1957).

[9] PETERSON, G. A., J. F. ZIEGLER, and R. B. CLARK: Phys. Letters **17**, 320 (1965).

Blei wurden bei niedriger Energie durchgeführt. Dabei ergaben sich Unterschiede im Wirkungsquerschnitt der beiden Isotope, die nicht auf die bekannten Kernradiusänderungen zurückgeführt werden konnten. Daraus wurde auf die Möglichkeit von Dispersionseffekten geschlossen. Bei den übrigen Experimenten war die Energie der Elektronen so groß, daß die höheren Momente der Ladungsverteilung stark in den Wirkungsquerschnitt eingehen. Es wurden deshalb in erster Linie Änderungen der Parameter der Ladungsverteilung bestimmt. Daraus lassen sich Differenzen von mittleren quadratischen Radien berechnen. Diese sind von dem angenommenen Modell abhängig.

Einen modellunabhängigen Wert des mittleren quadratischen Radius erhält man bei kleinen Elektronenenergien (<60 MeV)[10]. Die bisher genauesten Messungen[11] zeigen, daß dies mit einem Fehler von etwa 1% möglich ist. Obwohl die Meßgenauigkeit im Fall der Myonen-Atome größer ist, sollte wegen der möglicherweise unterschiedlichen dynamischen Beiträge („Kernpolarisation" bzw. „Dispersionseffekte") an einem Beispiel ein Vergleich der Methoden durchgeführt werden. Ein weitgehend modellunabhängiger Vergleich ist dann möglich, wenn der Anteil, mit dem die höheren Momente der Ladungsverteilung in die Meßgröße eingehen, bei beiden Methoden etwa gleich ist. Mit den bei Elektronenenergien unterhalb 60 MeV erreichbaren Impulsübertragungen ist das ungefähr in der Gegend des Kalziums der Fall[12,13]. Für Kalzium liegen bereits Daten von Messungen an Myonen-Atomen vor. Da jedoch dünne Kalzium-Targets (<20 mg/cm^2) wegen der unvermeidlichen Oxydschichten auf der Oberfläche relativ große Korrekturen aufgrund des Sauerstoffanteils erforderlich machen, erschien dieses Element für die vorgesehenen Elektronenstreuexperimente nicht geeignet. Im Interesse einer möglichst großen Meßgenauigkeit mußten die Flächendichten der Targets sehr genau bekannt sein. Es kamen daher als Targets nur Metallfolien in Frage. Gewählt wurde das Element Titan.

Ein weiterer Grund für die Wahl des Titans war folgender: Das ^{50}Ti enthält die magische Neutronenzahl $N=28$. Die optische Isotopieverschiebung unmittelbar vor den magischen Neutronenzahlen $N=50$, 82 und 126 ist relativ klein[14]. Das deutet auf geringe Radiusänderungen am Ende einer Neutronenschale hin. Da bei leichten Elementen der massenabhängige Effekt der Isotopieverschiebung den der Volumenänderung übertrifft, gibt es für die Umgebung von $N=28$ keine optischen

[10] Elton, L. R. B.: Nuclear sizes. London: Oxford Univ. Press 1961.

[11] Engfer, R.: Z. Physik **192**, 29 (1966).

[12] Engfer, R.: Proc. Scuola Int. di Fisica, «Enrico Fermi». Varenna 1966.

[13] Bentz, H. A., R. Engfer, and W. Bühring: in Vorbereitung.

[14] Brix, P., and H. Kopfermann: Phys. Rev. **85**, 1050 (1952); — Revs. Modern Phys. **30**, 517 (1958).

Daten. Es sollte deshalb interessant sein, diesen Bereich mit Elektronenstreuexperimenten zu untersuchen.

Die Messungen wurden an den Isotopen ^{46}Ti, ^{48}Ti und ^{50}Ti durchgeführt. Über einen Teil der Experimente wurde in einer vorläufigen Mitteilung[15] berichtet.

2. Überlegungen zu den Messungen

Betrachtet man den Atomkern als statische Ladungsverteilung, dann ergibt sich aus der Abweichung des gemessenen vom Punkt-Wirkungsquerschnitt ein Maß für die Ausdehnung der Ladungsverteilung. Bei kleinen Elektronenenergien wird im wesentlichen das zweite Moment der Ladungsverteilung $\rho(r)$:

$$R_m^2=\int \rho(r) r^2 d\tau \quad \text{mit} \quad \int \rho(r) d\tau=1 \tag{1}$$

gemessen. Die Wurzel aus diesem Wert bezeichnet man als quadratisch gemittelten Radius (r.m.s.-Radius, im folgenden oft kurz „Radius" genannt). Für eine Ladungsverteilung vom Typ:

$$\rho(r)=\rho_0\left[1+\exp\left(\frac{r-c}{z}\right)\right]^{-1},$$
$$\rho_0=\frac{3}{4\pi c^3}\left[1+\left(\frac{\pi z}{c}\right)^2\right]^{-1} \tag{2}$$

(„Fermi"-Verteilung) mit den Parametern c und z ergibt sich*:

$$R_m^2=\tfrac{3}{5}(c^2+\tfrac{7}{3}\pi^2 z^2). \tag{3}$$

Der Einfluß der höheren Momente ist bei Energien unterhalb 60 MeV klein, jedoch nicht vernachlässigbar. Der Wirkungsquerschnitt hängt deshalb nicht nur von R_m ab, sondern in geringem Maße auch von der Form der Ladungsverteilung. Für eine Fermi-Ladungsverteilung läßt sich der Beitrag der höheren Momente abschätzen, indem man den Wirkungsquerschnitt bei festgehaltenem R_m für verschiedene Kombinationen c und z berechnet**. Umgekehrt ergeben sich aus einem festen Wert des Wirkungsquerschnittes verschiedene Radien R_m, je nachdem welches c bzw. z vorgegeben wurde.

Beim Vergleich zweier Isotope werden Verhältnisse von Wirkungsquerschnitten gemessen. Legt man der Auswertung Fermi-Verteilungen zugrunde, dann sind die daraus abgeleiteten Radiusdifferenzen ΔR_m je

* Gl. (C.4) in [10]; dabei wurden Terme $<10^{-5}$ vernachlässigt.

** Siehe z. B. Fig. 1 in [11].

[15] THEISSEN, H., R. ENGFER, and G. J. C. VAN NIFTRIK: Phys. Letters **22**, 623 (1966).

nach Vorgabe von Δz verschieden. Rechnungen nach der Partialwellenmethode ergaben für Ti und Impulsübertragungen $q<0{,}57\ \mathrm{fm}^{-1}$, daß für eine vorgegebene Unsicherheit in $\Delta z/z$ die Unsicherheit in $\Delta R_m/R_m$ proportional zu q^2 ist*, wobei:

$$q=(2E_0/\hbar c)\sin\vartheta/2\,. \tag{4}$$

Dabei sind: E_0 die Elektronenenergie, ϑ der Streuwinkel, $\hbar c=197{,}32\ \mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm}$**. Zur Auswertung der Messungen bei kleinen Energien lassen sich Grenzen für den Bereich, innerhalb dessen $\Delta z/z$ variieren kann, aus den Experimenten bei hohen Energien abschätzen. Die Messungen am Kalzium[6,7] legen nahe, daß für $\Delta A=4$ in der Umgebung von $A\approx 40$ als obere Grenze für die Unsicherheit in $\Delta z/z$ etwa $\pm 0{,}1$ gesetzt werden kann. Da für Titan keine Messung von Δz vorliegt, wurde diese Unsicherheit auf die Titanisotope übertragen.

Zu diesem Fehler aufgrund des Beitrags der höheren Momente zum Wirkungsquerschnitt ist die aus dem experimentellen Fehler resultierende Unsicherheit von $\Delta R_m/R_m$ zu addieren. Diese nimmt mit wachsender Impulsübertragung ab, da der Effekt der Kernausdehnung größer wird. Der Gesamtfehler durchläuft daher in Abhängigkeit von q^2 ein Minimum. Bei einem experimentellen Fehler von $\pm 2\%$ im Quotient der Wirkungsquerschnitte zweier Isotope und $\Delta z/z\leqq 0{,}1$ (s.oben) ergibt sich das Minimum etwa bei $q^2=0{,}3\ \mathrm{fm}^{-2}$. Ein Teil der Messungen wurde deshalb bei $q^2=0{,}327\ \mathrm{fm}^{-2}$ ($E_0=58$ MeV, $\vartheta=153{,}2°$) durchgeführt. Für diese Impulsübertragung beträgt der Gesamtfehler von $\Delta R_m/R_m$ etwa $\pm 0{,}013$. Das ist ungefähr die Hälfte des Wertes $\Delta R_m/R_m=0{,}028$, der für $A=48$ und $\Delta A=4$ nach einer $A^{\frac{1}{3}}$-Abhängigkeit erwartet wird.

Es wurden nur Relativmessungen durchgeführt, so daß sich Größen, die bei der absoluten Messung von Wirkungsquerschnitten bekannt sein müssen, wie Spektrometerraumwinkel, absolute Zähleransprechwahrscheinlichkeit und Leckstromverluste des Strahlfängers, herausheben. Außerdem lassen sich, vor allem bei Messungen an Isotopen, die meisten experimentellen Bedingungen so wählen, daß die an den Zählraten anzubringenden Korrekturen fast gleich sind. Damit reduzieren sich auch die Unsicherheiten, mit denen diese Korrekturen behaftet sind. Eine ausführliche Diskussion folgt in Abschnitt 6.

Aus dem Quotient der Zählraten zweier Targets ergibt sich das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte. Dazu muß das Verhältnis der Targetflächendichten (Anzahl der Atome/cm^2) bekannt sein. Über die Messung

* Siehe Fig. 2 in [11].

** Gl. (4) gilt für unendlich große Kernmasse M, andernfalls ist die rechte Seite mit $[1+(2E_0/Mc^2)\sin^2\vartheta/2]^{-\frac{1}{2}}$ zu multiplizieren. Bei der Berechnung der Wirkungsquerschnitte nach der Partialwellenmethode (s. Abschnitt 7, weiter unten) wird die endliche Kernmasse berücksichtigt.

der Flächendichtenverhältnisse wird in Abschnitt 3 berichtet. Diese Messung läßt sich mit Hilfe der Elektronenstreuung prüfen: Bei sehr kleiner Impulsübertragung ist der Effekt der endlichen Kernausdehnung vernachlässigbar. Das Verhältnis der Zählraten wird dann im Fall zweier Isotope gleich dem Verhältnis der Flächendichten. Deshalb wurde an jede Messung bei $E_0 = 58$ MeV und $\vartheta = 153{,}2°$ eine solche bei sehr kleiner Impulsübertragung angeschlossen, entweder bei der gleichen Energie $E_0 = 58$ MeV und $\vartheta = 44{,}8°$ ($q^2 = 0{,}050\ \mathrm{fm}^{-2}$) oder bei $E_0 = 29$ MeV und demselben Streuwinkel $\vartheta = 153{,}2°$ ($q^2 = 0{,}082\ \mathrm{fm}^{-2}$).

Bei allen Messungen wurde darauf geachtet, daß der Elektronenstrahl immer dieselbe Stelle auf dem Target traf und der Strahlfleck dieselbe Ausdehnung hatte (s. Abschnitt 3). Dann sind selbst bei inhomogenen Targets die Verhältnisse der Targetflächendichten bei allen Messungen dieselben. Damit ergibt sich auch ohne Kenntnis der Targetflächendichten aus dem Unterschied des Zählratenverhältnisses bei großer und kleiner Impulsübertragung eine Aussage über die unterschiedliche Kernausdehnung der betreffenden Isotope.

3. Targets

Die Targets bestanden aus Folien, die mit ^{46}Ti bzw. ^{50}Ti angereichert waren; anstelle von ^{48}Ti wurde das natürliche Isotopengemisch verwendet. Die Isotopenzusammensetzung ist aus Tabelle 1 zu entnehmen. In der ersten Spalte sind zur Unterscheidung der Targets in Klammern die Massenzahlen der am häufigsten vorkommenden Isotope angegeben. Diese Art der Kennzeichnung wird im folgenden beibehalten. Der Anteil der Verunreinigungen durch Elemente außer Titan betrug laut Herstellerangaben* in allen Fällen weniger als 0,5%. Da diese sich jedoch meist auf den Zustand des Materials vor der Verarbeitung zu Folien beziehen, muß man damit rechnen, daß z. B. die durch das Walzen hinzukommenden Verunreinigungen nicht berücksichtigt sind. Deshalb wurde von jedem Target ein etwa 1 mm^2 großer Bereich der Oberfläche mit Hilfe einer Elektronenstrahl-Mikrosonde** auf Einschlüsse fremder Materialien untersucht. Es ergab sich, daß keine schwereren Elemente als Fe, Ni und Cu vorhanden waren. Quantitative Angaben konnten nicht gemacht werden.

Von den $^{(46)}$Ti- und $^{(50)}$Ti-Targets standen zwei verschieden dicke Targetpaare (Nr. 1: ca. 8 mg/cm^2 und Nr. 2: ca. 20 mg/cm^2) zur Verfügung. Da die Targets Nr. 1 sehr wellig waren, hätte man deren Flächendichte nur auf etwa 1,5% genau messen können. Das reicht für die

* $^{(46)}$Ti und $^{(50)}$Ti: Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, U.S.A.; $^{(48)}$Ti: W. C. Heraeus GmbH., Hanau.

** Die Messungen wurden von der Firma Kontron GmbH. u. Co., München, an der Elektronenstrahl-Mikrosonde JEOL, Modell JXA-3A durchgeführt.

angestrebte Genauigkeit von $\Delta R_m/R_m$ nicht aus. Deshalb wurde auf eine Messung der Flächendichte verzichtet und bei den mit diesen Targets durchgeführten Streuexperimenten der Unterschied des Zählratenverhältnisses bei großer und kleiner Impulsübertragung ausgewertet.

Die im folgenden beschriebenen Messungen der Targetflächendichten beziehen sich nur auf die ca. 20 mg/cm^2 dicken Targets (Targets Nr. 2), mit denen auch der weitaus größte Teil der Streuexperimente durchgeführt wurde. Messungen mit einem mechanischen Taster zeigten, daß von diesen die $^{(48)}$Ti-Folie innerhalb der Meßgenauigkeit (ca. 1%) an jeder Stelle gleich dick war. Deshalb konnte deren Massenbelegung durch Wiegen und Ausmessen der Fläche bestimmt werden. Es ergab sich der in Tabelle 1 unter ρx angegebene Wert. Die $^{(46)}$Ti- und $^{(50)}$Ti-Folien waren nur in der Mitte in etwa homogen; am Rand fiel die Dicke z.T. bis auf 75% des Wertes in der Mitte ab. Deshalb war es nötig, bei den Streuexperimenten mit dem Elektronenstrahl immer dieselbe Stelle des Targets zu treffen und die Flächendichte an dieser Stelle zu bestimmen. Die Strahlfleckposition konnte mit Hilfe eines Quarz- bzw. ZnS-Targets eingestellt werden, auf dem ein Kreuz markiert war. Dieses wurde während der Justierung des Elektronenstrahls über eine Fernsehkamera beobachtet. Die Reproduzierbarkeit dieser Einstellung wurde auf ca. $\pm 0{,}5$ mm abgeschätzt. Nach jeder Messung (Dauer ca. 2. Std) wurde die Strahlfleckposition kontrolliert. Dabei zeigten sich Abweichungen von maximal $\pm 0{,}5$ mm gegenüber der Anfangslage. Kontrollen der Strahlfleckposition in kürzeren Abständen als der Meßdauer ergaben, daß die Schwankungen der Strahlfleckposition während einer Messung nicht größer waren als die zwischen Anfang und Ende beobachteten Abweichungen. Der Auftreffpunkt des Elektronenstrahls auf dem Target ließ sich daher mit einer Genauigkeit von ca. ± 1 mm angeben. Als Auftreffpunkt wurde die Mitte der Targets gewählt, da hier die Homogenität am größten war. Aus den Tastermessungen konnte abgeschätzt werden, daß sich die Dicke an dieser Stelle bei einer Verschiebung des Strahlfleckes um ± 1 mm um maximal $\pm 0{,}7\%$ änderte. Diese Unsicherheit wurde im Ergebnis als systematischer Fehler berücksichtigt.

Für die eigentliche Bestimmung der Flächendichten am Auftreffpunkt des Elektronenstrahls waren die Tastermessungen zu ungenau. Da wiederum nur Relativwerte interessierten, ließen sich dazu γ-Absorptionsmessungen heranziehen. Dazu wurde die Absorption der 14,4 keV-Linie des ^{57}Fe gemessen. Der γ-Strahl war so kollimiert, daß die Halbwertsbreite der Intensitätsverteilung am Ort des Targets 2 mm betrug. Das entspricht in etwa der Ausdehnung des Elektronenstrahls am Ort des Targets. Alle drei Targets wurden während der Messung jede Minute ausgetauscht, damit sich Schwankungen der Apparatur herausmitteln. Das Ergebnis der Messung zeigt Tabelle 2. Der angegebene Fehler

Tabelle 1. *Targetdaten. (A) Massenzahl des häufigsten Isotops. h_A relative Häufigkeit (Atome/cm³) des Isotops mit der Massenzahl A; h_v relative Häufigkeit der Verunreinigungen [für (46) und (50): Herstellerangaben]. $\bar{A}_r = \sum h_A A_r$ mittleres Atomgewicht, wobei A_r relatives Atomgewicht ($^{12}C = 12{,}0000$) des betreffenden Isotops. ρx Massenbelegung*

(A)	h_{46} [%]	h_{47} [%]	h_{48} [%]	h_{49} [%]	h_{50} [%]	h_v [%]	$\bar{A}_r$	ρx [mg/cm²] Targets Nr. 1	ρx [mg/cm²] Targets Nr. 2
(46)	77,1	2,3	17,3	1,5	1,8	$\leqq 0{,}1$	46,44	≈ 8	19,34 ± 7
(48)	7,9	7,3	73,9	5,5	5,3	$\leqq 0{,}5$	47,90	—	17,93 ± 2
(50)	3,1	2,4	22,8	2,0	69,7	$\leqq 0{,}3$	49,28	≈ 8	20,58 ± 5

resultiert aus der Streuung von 6 Einzelmessungen. Korrekturen aufgrund der Verunreinigungen (zu $\leqq 0{,}08\,\%$ abgeschätzt) wurden vernachlässigt. Mit dem für $^{(48)}$Ti gemessenen Absolutwert und den mittleren Atomgewichten $\bar{A}_r$ (Tabelle 1) ergeben sich daraus die Massenbelegungen ρx der übrigen Targets Nr. 2 in der letzten Spalte von Tabelle 1.

Im Fall des Targetpaares $^{(50)}$Ti – $^{(46)}$Ti wurde die γ-Absorptionsmethode in einer Reihe von weiteren Versuchen mit anderen Verfahren zur Dickenmessung[16] verglichen. Außer den schon erwähnten Tastermessungen wurden dazu β-Absorptionsmessungen durchgeführt. Das Ergebnis dieser Messungen ist in Tabelle 2 getrennt aufgeführt. Im Fall der β-Methode ist der statistische, bei dem Ergebnis der Abtastmethode der Ablesefehler angegeben. Innerhalb der Fehler stimmen die Ergebnisse der verschiedenen Verfahren überein. Für die weitere Auswertung wurde der in der letzten Zeile aufgeführte Mittelwert benutzt.

Tabelle 2. *Gemessenes Verhältnis der Targetflächendichten (Atome/cm²). Targets Nr. 2*

Methode	$\frac{(\rho x/A_r)_{(50)}}{(\rho x/A_r)_{(46)}}$	$\frac{(\rho x/A_r)_{(48)}}{(\rho x/A_r)_{(46)}}$
γ-Absorption	1,0028 ± 18	0,8993 ± 33
β-Absorption	1,0091 ± 92	—
Taster	0,996 ± 24	—
Mittelwert	1,0029 ± 13	

4. Meßanordnung und -methode

Die Messungen wurden am Darmstädter 60 MeV-Elektronen-Linearbeschleuniger[17] durchgeführt. Dabei waren die Schlitze des energie-

[16] THEISSEN, H.: Laborbericht Nr. 28, Institut für Technische Kernphysik der T. H. Darmstadt 1966 (unveröffentlicht).

[17] GUDDEN, F., G. FRICKE, H.-G. CLERC u. P. BRIX: Z. Physik **181**, 453 (1964).

definierenden Magnetsystems stets auf eine relative Energiebreite von 0,3% eingestellt. In der Fokalebene des magnetischen Spektrometers befanden sich fünf nebeneinander angeordnete Detektoren. Dieses System[18] erfaßt insgesamt ein relatives Energieintervall von 1,5% (0,3% je Zähler). Das ist etwa das fünffache der Halbwertsbreite der elastischen Linie, die bei den oben genannten Targetdicken und Schlitzbreiten des Analysiersystems etwa 0,3% beträgt. Aus diesem Grund konnten die elastisch gestreuten Elektronen bei einer einzigen fest eingestellten Spektrometerfeldstärke nachgewiesen werden.

Die Zahl der auf das Target auftreffenden Elektronen wurde durch die vom Strahlfänger aufgesammelte Ladung gemessen. Als Strahlfänger diente ein massiver Aluminiumblock, der sich etwa 5 m hinter der Streukammer befand. Da der Elektronenstrahl im Target durch Vielfachstreuung aufgestreut wird, erreichen nicht alle einfallenden Elektronen den Strahlfänger. Die Aufstreuung wird mit wachsender Targetflächendichte größer und nimmt mit zunehmender Energie ab [Gl. (2.16.9) in[19]]. Bei z.T. unterschiedlichen Flächendichten, wie im vorliegenden Fall, ist deshalb zu berücksichtigen, daß sich die Aufstreuverluste nicht ganz kompensieren. Aus diesem Grund mußten die Aufstreuverluste bzw. deren Verhältnisse bei den beiden Energien $E_0 = 58$ MeV und $E_0 = 29$ MeV gemessen werden. Dazu wurde bei möglichst konstanter Strahlintensität des Beschleunigers die vom Strahlfänger in einer vorgegebenen Zeit aufgesammelte Ladung L für drei verschieden dicke Ti-Targets miteinander verglichen. Schwankungen der Strahlintensität konnten durch schnelles Wechseln der Targets (alle 5 sec) weitgehend ausgeglichen werden. Eins der drei Targets war das bei den Streuexperimenten benutzte $^{(46)}$Ti. Die beiden anderen bestanden aus natürlichem Titan; deren Dicken wurden so gewählt, daß sich möglichst signifikante Unterschiede in den Aufstreuverlusten ergaben. Rechnungen aufgrund der von MOLIÈRE[20] angegebenen Formeln ergaben im Bereich der benutzten Targetflächendichten bis auf vernachlässigbare Abweichungen einen linearen Zusammenhang zwischen dem Quotienten der aufgesammelten Ladung und dem Flächendichtenverhältnis zweier Targets. Die Werte $L_{(50)}/L_{(46)}$ und $L_{(48)}/L_{(46)}$ der bei den Streuexperimenten benutzten Targets (Nr. 2) wurden deshalb durch lineare Interpolation aus den gemessenen gewonnen. Tabelle 3 zeigt die Ergebnisse. Um die Zählratenverhältnisse auf Aufstreuverluste zu korrigieren, müssen diese mit den in Tabelle 3 angegebenen Werten multipliziert werden. Es zeigt sich, daß die Korrek-

[18] STROETZEL, M.: Laborbericht Nr. 19, Institut für Technische Kernphysik der T. H. Darmstadt 1965 (unveröffentlicht).

[19] ROSSI, B.: High-energy particles. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall, Inc. 1952.

[20] MOLIÈRE, G.: Z. Naturforsch. **3a**, 78 (1948).

tur praktisch nur das Zählratenverhältnis des Targetpaares $^{(48)}$Ti – $^{(46)}$Ti beeinflußt. Für die Targets Nr. 1 wurden keine Flächendichtenverhältnisse bestimmt; die Aufstreukorrektur konnte deshalb nur abgeschätzt werden. Da die Flächendichten im Vergleich zu den Targets

Tabelle 3. *Aufstreuverluste. Messung und interpolierte Werte für Targets Nr. 2.* $(\rho x/A_r)/(\rho x/A_r)_{(46)}$ *Verhältnis der Flächendichten.* $L/L_{(46)}(E_0)$ *Verhältnis der vom Strahlfänger bei gleicher Stromstärke und Zeit aufintegrierten Ladungen bei der Energie* E_0

$\frac{(\rho x/A_r)}{(\rho x/A_r)_{(46)}}$	$\frac{L}{L_{(46)}}$ (58 MeV)	$\frac{L}{L_{(46)}}$ (29 MeV)	
0,6619	1,0176	1,0715	(gemessen)
± 13	± 34	± 12	
0,8993	1,0048	1,0199	(interpoliert)
	± 3	± 10	
1,0029	0,9999	0,9994	(interpoliert)
	± 1	± 1	
1,3151	0,9860	0,9418	(gemessen)
± 21	± 28	± 10	

Nr. 2 etwa um einen Faktor 0,4 kleiner sind, werden auch die Aufstreuverluste entsprechend geringer. Aus der Messung der mittleren Massenbelegung (Wiegen und Ausmessen der Targetfläche) und den Atomgewichten der Targets Nr. 1 ergibt sich ein Unterschied der Flächendichten von ca. 2%. Daraus lassen sich die Aufstreukorrekturen zu ca. 0,1% bei 29 MeV und 0,04% bei 58 MeV abschätzen, was sich im Quotient der Zählratenverhältnisse bei 58 MeV und 29 MeV auf 0,06% reduziert. Das ist weniger als 10% des statistischen Fehlers und wurde deshalb vernachlässigt.

Die Targets waren immer senkrecht zur Strahlrichtung aufgestellt, um den Einfluß unterschiedlicher Neigungen der Folien untereinander, d.h. Abweichungen des Flächendichtenverhältnisses vom gemessenen Wert, so weit wie möglich zu reduzieren. Schätzt man den maximal auftretenden Unterschied in den Neigungswinkeln zu ±2° ab, dann beträgt die entsprechende Dickenunsicherheit ±0,06%. Zusammen mit der in Abschnitt 3 abgeschätzten Unsicherheit aufgrund der Reproduzierbarkeit der Strahlfleckposition von ±0,7% ergibt sich damit ein systematischer Fehler des Flächendichtenverhältnisses von insgesamt ca. ±0,8%.

Auch bei den Streuexperimenten wurden die Targets während der Messung in Abständen von etwa einer Minute ausgetauscht. Dadurch sollten sich Schwankungen der Zählrate, vor allem aufgrund von kleinen Änderungen der Strahlfleckposition und der Elektronenenergie, herausmitteln.

Das Magnetfeld im Spektrometer wurde so eingestellt, daß das Maximum der elastischen Linie in den mittleren der fünf Zähler fiel. Die Lage der elastischen Linien war bei allen Targets bis auf die praktisch vernachlässigbare Verschiebung infolge des unterschiedlichen Rückstoßes

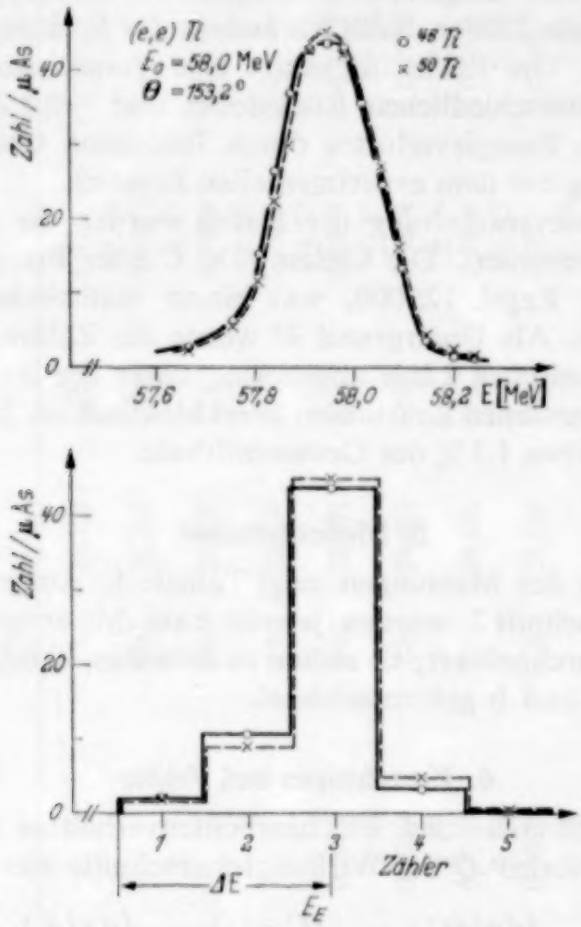


Fig. 1. Spektrum der elastisch gestreuten Elektronen. Targets $^{(46)}$Ti und $^{(50)}$Ti (Nr. 2). $E_0 = 58{,}0$ MeV, $\vartheta = 153{,}2°$. Oben: Ein Zähler, Spektrometerfeld variiert. Ordinate: Zahl der gestreuten Elektronen pro µAs vom Strahlfänger aufintegrierter Ladung, Abszisse: Energie der Elektronen. Unten: Fünf Zähler, Spektrometerfeld fest (Messung Nr. 9a). Ordinate wie oben, Abszisse: Nr. des Zählers. E_E Energie des Maximums der elastischen Linie, ΔE Abstand der unteren Abschneideenergie von E_E

($\leqq$12 keV) und der unterschiedlichen Energieverluste aufgrund von Ionisation und Anregung ($\leqq$2 keV) dieselbe. Das Spektrometerfeld brauchte deshalb beim Targetwechsel nicht geändert zu werden. Dadurch war es möglich, bei allen Targets unter identischen Bedingungen zu messen.

Ein Beispiel für die Verteilung der Zählrate auf die fünf Zähler zeigt Fig. 1 (untere Hälfte, Messung Nr. 9a von Tabelle 4). Eingetragen ist

die Zahl der gestreuten Elektronen pro μAs vom Strahlfänger aufintegrierter Ladung für die Targets $^{(46)}$Ti und $^{(50)}$Ti. Die statistischen Fehler sind kleiner als die Größe der eingezeichneten Kreise bzw. Kreuze. Die elastischen Linien sind um (10 ± 4) keV verschoben. Das zeigt sich auch in den darüber eingezeichneten Spektren, die bei derselben Messung mit nur einem Zähler durch Verändern der Spektrometerfeldstärke erhalten wurden. Die Rechnung ergibt eine Verschiebung von 12 keV aufgrund des unterschiedlichen Rückstoßes und $-0{,}1$ keV infolge des unterschiedlichen Energieverlustes durch Ionisation und Anregung, in Übereinstimmung mit dem experimentellen Ergebnis.

Für die Weiterverarbeitung der Daten wurden die Zählraten aller fünf Zähler aufsummiert. Die Gesamtzahl C aller Ereignisse betrug je Messung in der Regel 125000, was einem statistischen Fehler von 0,28% entspricht. Als Untergrund U wurde die Zählrate etwa 2 MeV oberhalb der elastischen Linie abgezogen, unter der Annahme, daß er mit dem dort gemessenen konstanten Wert identisch ist. Der Untergrund betrug maximal etwa 1,2% der Gesamtzählrate.

5. Meßergebnisse

Das Ergebnis der Messungen zeigt Tabelle 4. Aufgrund der Überlegungen in Abschnitt 2 wurden jeweils zwei Messungen unmittelbar hintereinander durchgeführt; sie stehen in derselben Zeile und sind durch die Buchstaben a und b gekennzeichnet.

6. Korrekturen und Fehler

Aus dem Zählraten- und Flächendichtenverhältnis zweier Targets ergibt sich der Quotient Q der Wirkungsquerschnitte zu:

$$Q^{(A_2)-(A_1)} = \frac{(d\sigma/d\Omega)_{(A_2)}}{(d\sigma/d\Omega)_{(A_1)}} = \frac{(C-U)_{(A_2)}}{(C-U)_{(A_1)}} \cdot \frac{(\rho x/A_r)_{(A_1)}}{(\rho x/A_r)_{(A_2)}} \cdot K. \qquad (5)$$

Dabei bedeuten (A_1) und (A_2) wiederum die Massenzahlen der jeweils häufigsten Isotope. Im Faktor K ist der in Q verbleibende Rest der Korrekturen zusammengefaßt. Eine Aufstellung der einzelnen Beiträge für ein Beispiel ($Q^{(50)-(46)}$, Messung Nr. 9a von Tabelle 4) zeigt Tabelle 5. Im folgenden werden die zur Berechnung der Korrekturen benutzten Formeln zitiert und die daraus resultierenden Maximalwerte angegeben (s. auch [21]).

An Korrekturen sind zunächst zu berücksichtigen: Zählverlustkorrektur, Umrechnung auf konstantes Energieintervall (Dispersionskorrektur) und die Korrektur wegen unterschiedlicher Zähleransprechwahrscheinlichkeiten. Diese betrugen zusam-

[21] THEISSEN, H.: Laborbericht Nr. 30, Institut für Technische Kernphysik der T. H. Darmstadt 1967 (unveröffentlicht).

Tabelle 4. *Elastische Elektronenstreuung an ^{46}Ti, ^{48}Ti und ^{50}Ti. Ergebnis der Messungen. E_0 Energie der Elektronen, $E_0=(E_E+E_i)\,[1-(E_E+E_i)\cdot(1-\cos\vartheta)/Mc^2]^{-1}$, wobei E_E= Energie des Maximums der elastischen Linie, E_i= mittlerer Ionisationsverlust nach der Streuung, Mc^2 Ruheenergie des Targetkerns. $(C-U)_{(A_2)}/(C-U)_{(A_1)}$ Verhältnis der Zahl der elastisch gestreuten Elektronen nach Abzug des Untergrundes, bezogen auf die vom Strahlfänger aufintegrierte Ladung. Die Indizes (A_2) und (A_1) sind die Massenzahlen der in den betreffenden Targets am häufigsten vorkommenden Isotope. Es ist der einfache statistische Fehler angegeben*

Messung Nr.	E_0 [MeV]	ϑ [Grad]	$\frac{(C-U)_{(50)}}{(C-U)_{(46)}}$	$\frac{(C-U)_{(48)}}{(C-U)_{(46)}}$	Messung Nr.	E_0 [MeV]	ϑ [Grad]	$\frac{(C-U)_{(50)}}{(C-U)_{(46)}}$	$\frac{(C-U)_{(48)}}{(C-U)_{(46)}}$	Targets Nr.
1a	58,128	153,2	1,0283 ± 69	—	1b	29,121	153,2	1,0316 ± 46	—	1
2a	58,165	153,2	1,0058 ± 76	—	2b	29,149	153,2	1,0135 ± 45	—	1
3a	58,157	153,2	0,9874 ± 48	—	3b	29,137	153,2	0,9900 ± 42	—	2
4a	58,159	153,2	1,0089 ± 52	—	4b	29,134	153,2	0,9925 ± 57	—	2
5a	57,996	153,2	0,9996 ± 40	0,8942 ± 37	5b	28,971	153,2	0,9829 ± 37	0,8825 ± 34	2
6a	57,996	153,2	1,0099 ± 40	0,9018 ± 37	6b	28,985	153,2	0,9884 ± 36	0,8929 ± 34	2
7a	57,997	153,2	1,0276 ± 41	0,9150 ± 38	7b	29,090	153,2	0,9885 ± 35	0,8841 ± 34	2
8a	58,027	153,2	1,0159 ± 38	0,9050 ± 35	8b	29,110	153,2	1,0379 ± 39	0,9189 ± 36	2
9a	58,095	153,2	0,9969 ± 40	0,8945 ± 37	9b	58,079	44,8	1,0183 ± 46	0,8959 ± 42	2
10a	58,094	153,2	0,9818 ± 39	0,8908 ± 40	10b	58,059	44,8	0,9916 ± 30	0,8780 ± 28	2
11a	57,995	153,2	0,9877 ± 34	0,8808 ± 31	11b	58,004	44,8	1,0021 ± 33	0,8911 ± 31	2
12a	57,975	153,2	0,9916 ± 37	0,8865 ± 34	12b	57,958	44,8	0,9945 ± 36	0,8880 ± 33	2

men ca. $(0{,}5 \pm 1{,}0)\%$. In Gl. (5) hoben sie sich bis auf $(0{,}1 \pm 0{,}2)\%$ heraus. Die zugehörigen Unsicherheiten resultieren im wesentlichen aus den nicht genau bekannten Zählertotzeiten und relativen Ansprechwahrscheinlichkeiten. Sie wurden im systematischen Fehler berücksichtigt.

Tabelle 5. *Zusammenstellung der Korrekturen und Fehler, die in Q [Gl. (5) des Textes] eingehen, für ein Beispiel (Messung Nr. 9a von Tabelle 4, $E_0 = 58{,}0$ MeV und $\vartheta = 153{,}2°$)*

Korrektur bzw. Fehler	% von $(d\sigma/d\Omega)_{(50)}$	% von $Q^{(50)-(46)}$
1. Zählrate		
Statistischer Fehler	$\pm 0{,}28$	$\pm 0{,}40$ (×)
Zählverlustkorrektur	$0{,}60 \pm 0{,}60$	$0{,}015 \pm 0{,}015$ (+)
Dispersionskorrektur	$0{,}036 \pm 0{,}006$	$-0{,}016 \pm 0{,}003$ (+)
Relatives Zähleransprechvermögen	$-0{,}04 \pm 0{,}21$	$0{,}12 \pm 0{,}16$ (+)
Untergrund	$1{,}1 \pm 0{,}06$	$0{,}05 \pm 0{,}05$ (+)
Schwingerkorrektur	20,0	−0,11
Bremsstrahlungskorrektur	0,9	−0,044
Landaukorrektur	0,4	0,009
Verunreinigungen	−0,10	0,040
Unelastische Prozesse (0,160 MeV ^{47}Ti)	0,005	−0,0002
Doppelstreuung	−0,013	−0,00003
Vielfachstreuung	−0,02	0,0002
Raumwinkelmittelung	−0,46	0,043
Aufstreuverluste	$3{,}5 \pm 0{,}7$	$-0{,}014 \pm 0{,}001$ (+)
2. Flächendichte		
Statistischer Fehler		$\pm 0{,}2$ (×)
Verschiebung der Strahlfleckposition ($\pm$ 1 mm)		$\pm 0{,}7$ (+)
Verschiedene Neigungen der Targets ($\leqq 2°$)		$\pm 0{,}06$ (+)
Verunreinigungen	−0,13	−0,080
		$+0{,}01 \pm 1{,}44$

(×) quadratisch addiert, (+) linear addiert.

Die Schwingerkorrektur wurde nach Gl. (I.4) in [22] berechnet. Sie betrug maximal 20%. Im Zählratenverhältnis hob sie sich nicht exakt weg, da sowohl die Differenz ΔE der Abschneidegrenze von E_E (s. Fig. 1) als auch die Massenzahlen der Isotope verschieden waren. Daraus resultierte eine verbleibende Korrektur von maximal $-0{,}11\%$. Da die Schwingerkorrektur in Bornscher Näherung berechnet ist, wird die bei einer exakten Rechnung erwartete Abhängigkeit von der Kernladungszahl und der Kernausdehnung nicht berücksichtigt. Bei gleicher Ordnungszahl und Radiusunterschieden von höchstens einigen Prozent, wie im vorliegenden Fall, sollte sich aber auch dieser Effekt in Gl. (5) so weit kompensieren, daß er keine nennenswerte zusätzliche Unsicherheit bedingt.

Zur Berechnung der Bremsstrahlungskorrektur wurde Gl. (5) in [23] benutzt. Sie ergab Korrekturen von maximal 0,9%, im Zählratenverhältnis weniger als 0,09%.

[22] TSAI, Y.-S.: Phys. Rev. **122**, 1898 (1961).
[23] CRANNELL, H.: Phys. Rev. **148**, 1107 (1966).

Die Ionisationskorrektur wurde nach Gl. (25) in [24] berechnet und ergab im ungünstigsten Fall 0,4%, was sich in Gl. (5) auf maximal 0,05% reduzierte.

Der Einfluß der Verunreinigungen wurde in Bornscher Näherung abgeschätzt. Die Parameter der den einzelnen Nukliden zugrundegelegten Ladungsverteilungen wurden der Literatur entnommen oder, unter der Annahme einer Fermi-Verteilung, nach der von ELTON[10] angegebenen Interpolationsformel berechnet. Im ungünstigsten Fall ergab sich eine Korrektur von −0,1%, im Quotienten verblieb davon maximal 0,06%.

Da die ersten angeregten Niveaus der Isotope ^{46}Ti, ^{48}Ti, ^{49}Ti und ^{50}Ti bei 0,887 MeV 0,99 MeV, 1,38 MeV und 1,56 MeV und damit außerhalb der unteren Abschneidegrenze der elastischen Linie liegen, liefern diese Isotope keinen Beitrag unelastischer Streuprozesse. Der Beitrag des 0,160 MeV-Niveaus des ^{47}Ti, dessen Anregungsenergie nicht zur Trennung von der elastischen Linie ausreichte, wurde zu weniger als 0,015% abgeschätzt ($E_0 = 58$ MeV, $\vartheta = 153{,}2°$). In Gl. (5) reduziert sich dieser Anteil auf maximal −0,01%. Die Übergangswahrscheinlichkeit wurde in Punktkern-Näherung abgeschätzt. Dabei wurde angenommen, daß es sich um einen reinen $M1$-Übergang handelt.

Der Anteil der Doppelstreuprozesse wurde auf der Grundlage der Rechnungen in [25] abgeschätzt. Es ergab sich eine Korrektur von maximal −0,05%, im Zählratenverhältnis weniger als 0,005%.

Die Korrektur infolge Vielfachstreuung im Target wurde nach Gl. (22) in [26] abgeschätzt. Es ergab sich im ungünstigsten Fall ein Wert von −0,1%, was sich in Gl. (5) auf maximal −0,05% reduzierte.

Die Mittelung des Wirkungsquerschnittes über den vom Spektrometer erfaßten Raumwinkel nach den in [27] angegebenen Formeln ergab eine Korrektur von maximal −0,5%. In Q verblieben davon weniger als 0,04%.

Ein großer Teil der aufgeführten Korrekturen kompensiert sich wegen unterschiedlicher Vorzeichen. Der verbleibende Rest betrug maximal 0,1% und wurde deshalb gegenüber den systematischen Fehlern vernachlässigt. Nicht vernachlässigt werden konnte dagegen die, zumindest bei $E_0 = 29$ MeV, auch im Wirkungsquerschnittsverhältnis bis zu 2% große Korrektur aufgrund der Aufstreuverluste. Es wurde deshalb in Gl. (5) gesetzt:

$$K = L_{(A_2)}/L_{(A_1)}. \tag{6}$$

An systematischen Fehlern mußten berücksichtigt werden: 1. die Unsicherheit des Flächendichtenverhältnisses aufgrund der nicht genau reproduzierbaren Strahlfleckposition und möglicher Targetneigungen, ±0,8%, 2. die aus den nicht exakt bekannten Zählertotzeiten und relativen Ansprechwahrscheinlichkeiten resultierenden Unsicherheiten des Zählratenverhältnisses, ±0,2%, und 3. der Fehler der Aufstreukorrektur, maximal ±0,1% (s. Tabelle 3).

---

[24] LANDAU, L.: J. Phys. U.S.S.R. **8**, 201 (1944).
[25] GOERTZEL, G., and R. T. COX: Phys. Rev. **63**, 37 (1943).
[26] BOTHE, W.: Sitzber. heidelb. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl. **1951**, 7.
[27] DAYTON, I. E., and G. SCHRANK: Phys. Rev. **101**, 1358 (1956).

7. Auswertung

7.1. Berechnung der Wirkungsquerschnitte nach der Partialwellenmethode

Zur Auswertung der Messungen wurde eine Reihe numerischer Rechnungen nach der Partialwellenmethode durchgeführt. Das benutzte Programm stammt von RAWITSCHER[28]. Die numerischen Lösungen der Dirac-Gleichung wurden im Abstand $r_0 = 12$ fm vom Kernmittelpunkt an

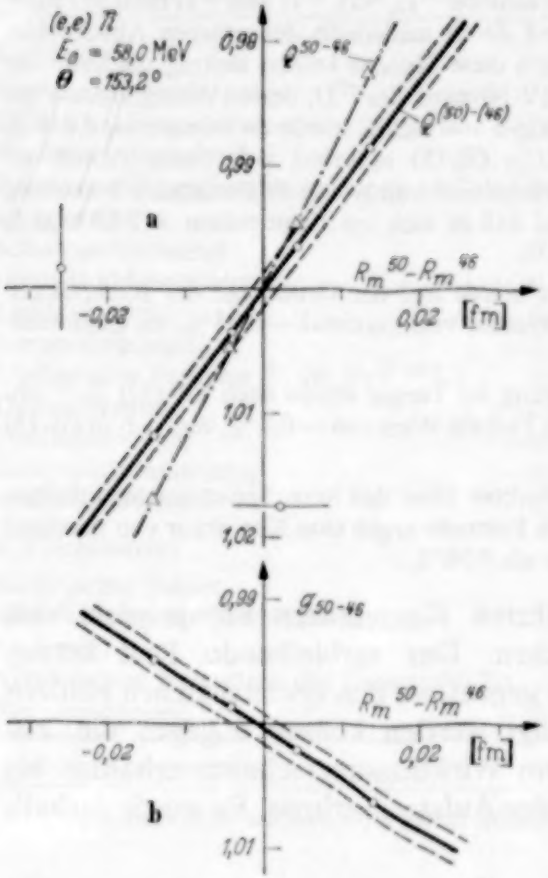


Fig. 2. a Verhältnis Q der Wirkungsquerschnitte als Funktion der Radiusdifferenz. Ergebnis der Rechnungen nach der Partialwellenmethode für $E_0 = 58{,}0$ MeV und $\vartheta = 153{,}2°$. Q^{50-46}: Für Reinisotope ^{50}Ti und ^{46}Ti (Rechenpunkte: Dreiecke; strichpunktiert: Interpolationsgerade). $Q^{(50)-(46)}$: Für die Targets $^{(50)}$Ti—$^{(46)}$Ti mit der in Tabelle 1 des Textes angegebenen Isotopenhäufigkeit (Rechenpunkte: Kreise; Interpolationsgerade: ausgezogene Linie). Punkt links mit Fehlerbalken: Meßpunkt $Q^{(50)-(46)} = 0{,}9984 \pm 0{,}0049$; Punkt unten: Daraus folgende Radiusdifferenz $R_m^{50} - R_m^{46} = (0{,}002 \pm 0{,}006)$ fm (s. Tabelle 7 des Textes). b g_{50-46} nach Gl. (8) des Textes. Die Rechenpunkte $Q^{(50)-(46)}$ in Fig. 2a ergeben sich durch Multiplikation von Q^{50-46} mit g_{50-46}. Gestrichelt in Fig. 2a und b: Fehlerbereich von $Q^{(50)-(46)}$ bzw. g_{50-46}

die Coulombfunktionen angepaßt. An dieser Stelle war die Kernladungsdichte $\rho(r)$ nach Gl. (2) auf $5 \cdot 10^{-7}$ des Wertes in der Mitte abgefallen. Die Schrittweite bei der numerischen Integration betrug $\Delta r = 0{,}05\, \hbar c/E_0$; es wurden 20 Partialwellen berücksichtigt. Testrechnungen ergaben, daß die numerische Genauigkeit des Verfahrens im Bereich $35° \leqq \vartheta \leqq 165°$ etwa 0,1% beträgt. Die im Laborsystem gegebenen Werte Energie E_0 und Streuwinkel ϑ wurden vor der Rechnung in das Schwerpunktsystem übertragen, die resultierenden Wirkungsquerschnitte anschließend wieder in das Laborsystem zurücktransformiert. Die dazu benutzten Formeln sind in [29] aufgeführt.

[28] RAWITSCHER, G. H.: Phys. Rev. **112**, 1274 (1958).
[29] DEDRICK, K. G.: Revs. Modern Phys. **34**, 429 (1962).

Als Ladungsverteilung wurde die Fermi-Verteilung Gl. (2) zugrunde gelegt. Das bedeutet wegen der geringen Modellabhängigkeit des mittleren quadratischen Radius bei kleinen Impulsübertragungen keine Einschränkung der daraus abgeleiteten Resultate. Für ^{48}Ti wurde der Parameter c so gewählt, daß bei $z=0{,}567$ fm der von ENGFER[13] für das natürliche Isotopengemisch ermittelte Radius $R_m=3{,}564$ fm herauskommt. Die Wirkungsquerschnitte für die Isotope ^{50}Ti und ^{46}Ti wurden im Bereich $3{,}53\text{ fm} \leqq R_m \leqq 3{,}60$ fm für drei verschiedene Werte von z berechnet: $z=0{,}538$, 0,567 und 0,595 fm. Im Fall ^{50}Ti$-^{46}$Ti läßt sich daraus das Wirkungsquerschnittsverhältnis Q^{50-46} für die Fälle $\Delta z/z=-10\%$, 0% und $+10\%$ bilden, im Fall ^{48}Ti$-^{46}$Ti entsprechend für $\Delta z/z=-5\%$, 0% und $+5\%$. Als Beispiel ist in Fig. 2a Q^{50-46} für $E_0=58$ MeV und $\vartheta=153{,}2°$ als Funktion der Radiusdifferenz $R_m^{50}-R_m^{46}$ aufgetragen. Dabei war $\Delta z/z=0$. Verbindet man die einzelnen Rechenpunkte (Dreiecke), dann ergibt sich für kleine Radiusdifferenzen ein fast linearer Zusammenhang (strichpunktierte Kurve). Für $\Delta z/z=\pm 10\%$ liegen die Kurven um $\Delta R_m=\pm 0{,}0267$ fm parallel zur eingezeichneten verschoben. Sie sind der Übersichtlichkeit halber nicht eingetragen.

7.2. *Berücksichtigung der Isotopenzusammensetzung*

Zum Vergleich mit den experimentellen Resultaten mußte die Isotopenhäufigkeit der Targets berücksichtigt werden. Dazu wurde auf die vom Hersteller angegebenen relativen Häufigkeiten (Tabelle 1) zurückgegriffen und eine Annahme über die Radien der Isotope ^{47}Ti und ^{49}Ti gemacht. Die resultierenden Korrekturen wurden an den theoretischen Wirkungsquerschnitten bzw. deren Verhältnissen angebracht, um die experimentellen Daten nicht unnötig zu modifizieren.

Um Mißverständnisse bei der Zuordnung der Indizes bei den jetzt folgenden Formeln zu vermeiden, sind diese gleich auf das Beispiel $^{(50)}$Ti$-^{(46)}$Ti zugeschnitten. Sie gelten analog für den Fall $^{(48)}$Ti$-^{(46)}$Ti. Eingeklammerte Massenzahlen bedeuten, wie bisher, das jeweils häufigste Isotop. Bezeichnet man mit $h_k^{(50)}$ und $h_k^{(46)}$ die relative Häufigkeit des Isotops Nr. k im Target $^{(50)}$Ti bzw. $^{(46)}$Ti und mit $(d\sigma/d\Omega)_k$ den zugehörigen differentiellen Wirkungsquerschnitt, dann gilt:

$$Q^{(50)-(46)}=\sum_k (d\sigma/d\Omega)_k h_k^{(50)} / \sum_k (d\sigma/d\Omega)_k h_k^{(46)}. \tag{7}$$

Die Summe läuft über alle vorkommenden stabilen Isotope. Das Verhältnis des dem Meßwert entsprechenden Quotienten $Q^{(50)-(46)}$ zu demjenigen für Reinisotope Q^{50-46} sei g_{50-46} genannt:

$$g_{50-46}=Q^{(50)-(46)}/Q^{50-46}. \tag{8}$$

Zum Vergleich mit den experimentellen Werten sind die berechneten Verhältnisse Q^{50-46} mit g_{50-46} zu multiplizieren. Der Faktor g_{50-46} ist eine Funktion von Q^{50-46}, hängt bei den hier vorgegebenen $h_k^{(50)}$ und $h_k^{(46)}$ jedoch auch noch schwach von den Wirkungsquerschnitten der Isotope ^{47}Ti, ^{48}Ti und ^{49}Ti ab. Der Beitrag des Isotops

^{48}Ti, d.h. $(d\sigma/d\Omega)_{48}$ bzw. Q^{48-46}, kann aus der Messung des Verhältnisses $Q^{(48)-(46)}$ entnommen werden. Der Fehler, der dadurch entsteht, daß statt Q^{48-46} der tatsächlich gemessene Wert $Q^{(48)-(46)}$ eingesetzt wird, ist als Korrektur an der Korrektur vernachlässigbar. Bezüglich der Radien von ^{47}Ti und ^{49}Ti wurde zunächst angenommen, daß diese mit dem des ^{48}Ti übereinstimmen (wobei auch der Fermi-Parameter z gleich sein soll). Dann ergibt sich für g_{50-46} im Fall $E_0 = 58$ MeV und $\vartheta = 153{,}2°$ der in Fig. 2b dargestellte Verlauf (durchgezogene Linie). Multipliziert man die berechneten Quotienten Q^{50-46} mit den jeweils zugehörigen g_{50-46}, dann erhält man als $Q^{(50)-(46)}$ die Kreise in Fig. 2a, die durch die ausgezogene Linie miteinander verbunden wurden. Die gestrichelten Linien in Fig. 2a und b stellen die Fehlergrenzen von $Q^{(50)-(46)}$ bzw. g_{50-46} dar. Im Fehler wurden berücksichtigt: 1. die vom Hersteller angegebenen Unsicherheiten in den Isotopenhäufigkeiten, 2. mögliche Radiusdifferenzen zwischen ^{47}Ti und ^{48}Ti bzw. ^{49}Ti und ^{48}Ti. Zur Abschätzung wurde angenommen, daß diese nicht größer sind als $\pm 0{,}7\%$ ($\pm A^{\frac{1}{3}}$-Wert) und $|\Delta z/z| \leqq 5\%$ ist. Unter diesen Voraussetzungen beträgt die Genauigkeit, mit der g_{50-46} im vorliegenden Beispiel angegeben werden kann, ca. $\pm 0{,}12\%$.

Wenn später Werte für $R_m^{47} - R_m^{48}$ und $R_m^{49} - R_m^{48}$ aus anderweitigen Messungen bekannt sein sollten, kann der Einfluß auf die Radiusdifferenzen $R_m^{50} - R_m^{46}$ und $R_m^{48} - R_m^{46}$ über die Verhältnisse der zugehörigen Wirkungsquerschnitte berechnet werden. Nach Gl. (7) ergibt sich für kleine Abweichungen ΔQ von den angenommenen Werten $Q^{47-48} = Q^{49-48} = 1$:

$$\begin{aligned} \Delta Q^{50-46} &= -0{,}001\,\Delta Q^{47-48} - 0{,}008\,\Delta Q^{49-48} \\ \Delta Q^{48-46} &= -0{,}076\,\Delta Q^{47-48} - 0{,}061\,\Delta Q^{49-48}. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Größen ΔQ sind mit den zugehörigen Radiusänderungen und Änderungen in dem Randzonenparameter der Ladungsverteilung durch die Gleichung:

$$\Delta Q^{A_2-A_1} = Q^{A_2-A_1} - 1 \approx a(R_m^{A_2} - R_m^{A_1})/R_m + b(z^{A_2} - z^{A_1})/z \tag{10}$$

verknüpft. Dabei ist $R_m = 3{,}564$ fm und $z = 0{,}567$ fm. Die Koeffizienten a und b hängen von der Energie E_0 und dem Streuwinkel ϑ ab; für die benutzten Energie-Streuwinkel-Kombinationen 58,0 MeV – 44,8°, 58,0 MeV – 153,2° und 29,0 MeV – 153,2° ergibt sich: $a = -0{,}53$; $-4{,}3$; $-0{,}95$ und $b = 0{,}0084$; 0,32 und 0,021*.

7.3. Auswertung ohne Einbezug der Targetflächendichten

Die experimentellen Daten lassen sich jetzt mit den Ergebnissen der Rechnung vergleichen. Die Auswertung erfolgte zunächst ohne Einbezug der direkt gemessenen Targetflächendichtenverhältnisse. Dazu wurden die jeweils aufeinanderfolgenden Messungen bei großer und kleiner Impulsübertragung, in Tabelle 4 mit a und b bezeichnet, zusammengefaßt. Dividiert man die Zählratenverhältnisse a durch die Zählratenverhältnisse b und bildet aus den Mittelwerten mit Hilfe von Gl. (5) die Quotienten der Wirkungsquerschnittsverhältnisse, dann erhält man die in Tabelle 6 unter $Q_a^{(A_2)-(A_1)}/Q_b^{(A_2)-(A_1)}$ angegebenen Werte. Die beiden Meßreihen $\vartheta = $ konst. und $E_0 = $ konst. wurden getrennt ausgewertet, um

* In [15] muß es richtig heißen: $\Delta\sigma/\sigma$ (58 MeV, 153°) $= -4{,}66(\Delta R_m/R_m) + 0{,}315(\Delta t/t)$ und $\Delta\sigma/\sigma$ (29 MeV, 153°) $= -1{,}02\,(\Delta R_m/R_m) + 0{,}023\,(\Delta t/t)$.

mögliche systematische Fehler aufzudecken. Im Fall E_0 = konst. heben sich außer den Flächendichtenverhältnissen auch die Aufstreukorrekturen heraus. Als Fehler ist die mittlere Streuung des Mittelwertes der Einzelmessungen angegeben. Im Fall ϑ = konst. wurde dazu der Fehler der

Tabelle 6. *Auswertung der Ergebnisse (Tabelle 4) ohne Einbezug der gemessenen Targetflächendichtenverhältnisse, s. Text.* E_0 *Elektronenenergie,* ϑ *Streuwinkel.* $Q^{(A_2)-(A_1)}$ *Verhältnis der differentiellen Wirkungsquerschnitte für die Targets mit* (A_2) *und* (A_1). (A_2) *bzw.* (A_1) *Massenzahlen der am häufigsten vorkommenden Isotope.* $R_m^{A_2} - R_m^{A_1}$ *Differenz der quadratisch gemittelten Radien (r.m.s.-Radien)*

$A_2 - A_1$	E_0^a [MeV]	ϑ^a [Grad]	E_0^b [MeV]	ϑ^b [Grad]	$\frac{Q_a^{(A_2)-(A_1)}}{Q_b^{(A_2)-(A_1)}}$	$R_m^{A_2} - R_m^{A_1}$ [fm]	Targets Nr.
48 − 46	58	153	29	153	0,9963 ± 0,0107	0,006 ± 0,018	2
	58	153	58	45	0,9992 ± 0,0058	0,008 ± 0,016	2
50 − 46	58	153	29	153	0,9948 ± 0,0083	0,007 ± 0,014	1
	58	153	29	153	1,0126 ± 0,0090	−0,021 ± 0,014	2
	58	153	58	45	0,9887 ± 0,0036	0,016 ± 0,005	2

Aufstreukorrektur hinzuaddiert. Analog den berechneten Wirkungsquerschnittsverhältnissen lassen sich auch deren Quotienten als Funktion der Radiusdifferenz auftragen. Mit diesen Kurven ergeben sich aus $Q_a^{(A_2)-(A_1)}/Q_b^{(A_2)-(A_1)}$ die unter $R_m^{A_2} - R_m^{A_1}$ aufgeführten Radiusdifferenzen mit den zugehörigen Fehlern.

7.4. Auswertung mit Berücksichtigung der Targetflächendichten

Bei der in Tabelle 7 zusammengestellten endgültigen Auswertung wurden die Flächendichtenverhältnisse der Targets Nr. 2 berücksichtigt. Mittelt man die bei gleicher Energie und gleichem Streuwinkel erhaltenen Zählratenverhältnisse und bildet aus den Mittelwerten nach Gl. (5) die zugehörigen Wirkungsquerschnittsquotienten, dann erhält man die in Tabelle 7 unter $Q^{(A_2)-(A_1)}$ aufgeführten Werte. Im statistischen Fehler wurde dabei berücksichtigt: Die mittlere Streuung des Mittelwertes der Zählratenverhältnisse und der Fehler des Flächendichtenverhältnisses (s. Tabelle 2). Diese wurden quadratisch addiert. Die systematischen Fehler sind getrennt nach ihrer Herkunft angegeben.

Fig. 3 zeigt die in Tabelle 7 aufgeführten Werte $Q^{(50)-(46)}$, aufgetragen über dem Quadrat der Impulsübertragung. Zum Vergleich ist der nach einer $A^{\frac{1}{3}}$-Abhängigkeit erwartete Verlauf eingezeichnet. Das schraffierte Gebiet entspricht einer Unsicherheit in dem Randzonenparameter der Ladungsverteilung von $|\Delta z/z| \leqq 10\%$ und deutet den mit der Impulsübertragung anwachsenden Einfluß der höheren Momente an. Die Kurven wurden nach der Partialwellenmethode berechnet. Für

Tabelle 7. *Auswertung der Ergebnisse Tabelle 4, Targetflächendichtenverhältnisse der der differentiellen Wirkungsquerschnitte, (A_2) und (A_1) Massenzahlen der häufigsten*

A_2-A_1	E_0 [MeV]	ϑ [Grad]	$Q^{(A_2)-(A_1)}$	stat. Fehler	syst. Fehler		
					$\frac{(C-U)_{(A_2)}}{(C-U)_{(A_1)}}$	$\frac{(\rho x/A_r)_{(A_1)}}{(\rho x/A_r)_{(A_2)}}$	$\frac{L_{(A_2)}}{L_{(A_1)}}$
48−46	58	44,8	0,9940	±0,0055	±0,0020	±0,0079	±0,0003
	29	153,2	1,0159	±0,0101	±0,0020	±0,0081	±0,0011
	58	153,2	1,0033	±0,0058	±0,0020	±0,0080	±0,0003
				Mittelwert			$R_m^{48}-R_m^{46}$ [fm]=
50−46	58	44,8	0,9974	±0,0050	±0,0020	±0,0080	±0,0000
	29	153,2	0,9933	±0,0087	±0,0020	±0,0079	±0,0000
	58	153,2	0,9984	±0,0049	±0,0020	±0,0080	±0,0000
				Mittelwert			
				aus Tabelle 6			
				Mittelwert			$R_m^{50}-R_m^{46}$ [fm]=

* In den unter „syst. Fehler, Messung" aufgeführten Wert einbezogen.

$E_0 < 60$ MeV ist deren Verlauf praktisch nur von der Impulsübertragung abhängig.

Die Radiusdifferenzen $R_m^{A_2}-R_m^{A_1}$ in Tabelle 7 ergeben sich aus den Kurven, die für $Q^{(A_2)-(A_1)}$ als Funktion von $R_m^{A_2}-R_m^{A_1}$ berechnet wurden.

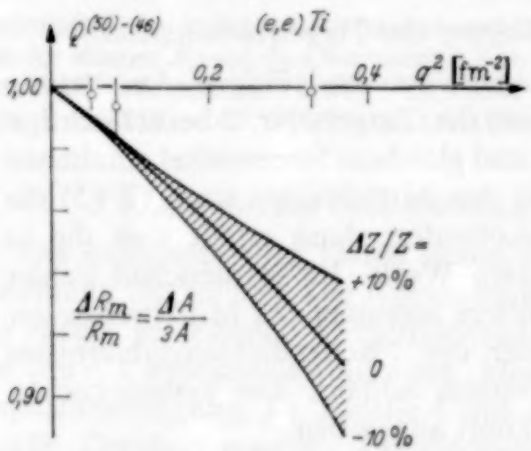


Fig. 3. Verhältnis der Wirkungsquerschnitte $Q^{(50)-(46)}$ als Funktion des Quadrats der Impulsübertragung. Targets Nr. 2. Eingetragene Punkte: Mittelwerte aus den Messungen Nr. 5 bis 12. Die Fehlerbalken entsprechen den statistischen Fehlern. Schraffiert: Nach einer $A^{\frac{1}{3}}$-Proportionalität von R_m erwarteter Verlauf für $|\Delta z/z| \leqq 10\%$

In Fig. 2a ist das für den Fall des Targetpaares $^{(50)}$Ti−$^{(46)}$Ti angedeutet. Der Punkt links entspricht dem Tabelle 7 entnommenen Meßwert $Q^{(50)-(46)}=0{,}9984\pm0{,}0049$ bei $E_0=58$ MeV und $\vartheta=153{,}2°$; die daraus resultierende Radiusdifferenz $R_m^{50}-R_m^{46}=(0{,}002\pm 0{,}006)$ fm ist am unteren Ende der Figur eingezeichnet.

Die Fehler von $R_m^{A_2}-R_m^{A_1}$ (Tabelle 7) sind wiederum aufgeteilt: Der statistische Fehler geht aus dem entsprechenden Wert von $Q^{(A_2)-(A_1)}$ hervor. Im systematischen Fehler der Messung wurden die Beiträge der drei bei $Q^{(A_2)-(A_1)}$ getrennt aufgeführten Werte zusammengefaßt. In den

Targets Nr. 2 berücksichtigt. E_0 Elektronenenergie, ϑ Streuwinkel. $Q^{(A_2)-(A_1)}$ Verhältnis Isotope. $R_m^{A_2}-R_m^{A_1}$ Differenz der quadratisch gemittelten Radien (r.m.s.-Radien)

$R_m^{A_2}-R_m^{A_1}$ [fm]	stat. Fehler	syst. Fehler				Targets Nr.
		Messung	Isotopen-Häufigkeit	R_m^{47}, R_m^{49}	Höhere Momente	
0,061	±0,057	±0,102	±0,000	±0,004	±0,003	2
−0,093	±0,057	±0,064	±0,000	±0,004	±0,004	2
−0,0042	±0,0074	±0,0126	±0,0000	±0,0053	±0,0133	2
−0,005	±0,007	±0,020	*	*	±0,013	2
0,024	±0,050	±0,100	±0,005	±0,000	±0,006	2
0,044	±0,049	±0,056	±0,002	±0,000	±0,008	2
0,0020	±0,0060	±0,0124	±0,0006	±0,0004	±0,0267	2
0,003	±0,006	±0,015	*	*	±0,027	2
0,007	±0,014	±0,012			±0,031	1
0,003	±0,006	±0,015			±0,028	1 u. 2

folgenden Spalten sind die Fehler angegeben, die durch die Auswertung hineinkommen. Die numerische Genauigkeit des benutzten Rechenprogramms entspricht einem Fehler in $R_m^{A_2}-R_m^{A_1}$ von weniger als ±0,001 fm. Dieser wurde vernachlässigt.

Aus den drei unabhängig voneinander bestimmten Radiusdifferenzen folgen die darunter aufgeführten Mittelwerte. Bei der Berechnung des Mittelwertes wurden die einzelnen Punkte entsprechend ihren statistischen Fehlern gewichtet. Es geht praktisch nur der bei der höchsten Impulsübertragung ($E_0=58$ MeV, $\vartheta=153{,}2°$) gemessene Wert ein. Der systematische Fehler des Mittelwertes ergab sich, indem alle Punkte einmal nach oben, das andere Mal nach unten verschoben und dann gemittelt wurden. Als Fehler aufgrund des Beitrags der höheren Momente wurde der Wert für den Punkt bei $E_0=58{,}0$ MeV und $\vartheta=153{,}2°$ angegeben.

7.5. Vergleich der Auswertemethoden und Endergebnis

Vergleicht man die mit und ohne Berücksichtigung der Targetflächendichten erhaltenen Radiusdifferenzen für die Targets Nr. 2, dann zeigt sich, daß die Werte der Tabelle 6 mit denen der Tabelle 7 innerhalb der dort angegebenen systematischen Fehler übereinstimmen. Das unterstützt die Annahme, daß diese nicht zu klein abgeschätzt wurden.

Die in Tabelle 7 aufgeführte Radiusdifferenz $R_m^{50}-R_m^{46}$ für die Targets Nr. 1 wurde aus Tabelle 6 übernommen, da hier die genauen Flächendichtenverhältnisse aus den angegebenen Gründen nicht ermittelt werden konnten. Dabei wurde zusätzlich zu dem statistischen Fehler

in Tabelle 6 ein systematischer Fehler von $\pm 0{,}8\%$ (Reproduzierbarkeit der Strahlfleckposition und Targetneigungen) eingesetzt. Die von den höheren Momenten herrührende Unsicherheit in $R_m^{50} - R_m^{46}$ beträgt hier $\pm 0{,}031$ fm. Der Mittelwert der Messungen mit den Targets Nr. 1 und 2 ist in der letzten Zeile aufgeführt.

Damit folgt als Ergebnis aller Messungen:

$$R_m^{48} - R_m^{46} = (-0{,}00_5 \pm 0{,}04_0)\,\text{fm} \qquad (\Delta z/z = \pm\ 5\%)$$

$$R_m^{50} - R_m^{46} = (+0{,}00_3 \pm 0{,}04_9)\,\text{fm} \qquad (\Delta z/z = \pm 10\%),$$

wobei im Fehler die Summe der in Tabelle 7 angegebenen Unsicherheiten berücksichtigt wurde.

8. Diskussion

Die Auswertung der Messung erfolgte unter der Annahme, daß der Kern als statische Ladungsverteilung behandelt werden kann, d.h. Dispersionseffekte wurden vernachlässigt. Soweit bisher theoretische Abschätzungen (z.B. [30]) vorliegen, spielen Dispersionseffekte nur bei großen Impulsübertragungen eine Rolle. Für die am Blei[9] auch bei kleiner Impulsübertragung beobachteten Anomalien gibt es beim Titan keine Hinweise: Die beiden bei sehr kleiner Impulsübertragung gemessenen Wirkungsquerschnittsverhältnisse stimmen innerhalb der Fehler mit dem erwarteten Wert $Q=1$ überein (siehe z.B. Fig. 3). Fehler bei der Messung der Targetflächendichtenverhältnisse sind, zumindest im Fall $^{(50)}\text{Ti} - {}^{(46)}\text{Ti}$, wegen der dabei durchgeführten Tests[16] mit großer Sicherheit auszuschließen.

In Tabelle 8 sind die erhaltenen Radiusdifferenzen den nach einer $A^{\frac{1}{3}}$-Abhängigkeit erwarteten gegenübergestellt. Es zeigt sich, daß die experimentellen Werte außerhalb der Fehlergrenzen kleiner sind. Qualitativ stimmt dieses Verhalten mit demjenigen überein, das die optische Isotopieverschiebung unmittelbar vor den magischen Neutronenzahlen $N=50$, 82 und 126 zeigt[14, 31]. Die direkte Messung der Differenzen quadratisch gemittelter Radien mit Hilfe der Elektronenstreuung bei kleinen Energien ergibt somit einen ganz entsprechenden Sachverhalt unterhalb $N=28$.

Die optischen Messungen zeigen weiterhin, daß Radiusdifferenzen zwischen Kernen mit derselben Neutronenzahl, unabhängig von deren Ordnungszahl, angenähert gleich sind. Im Fall der Elektronenstreuung wären die Paare $^{50}\text{Ti} - {}^{46}\text{Ti}$ und $^{48}\text{Ca} - {}^{44}\text{Ca}$ vergleichbar. Da für

---

[30] RAWITSCHER, G. H.: Phys. Rev. **151**, 846 (1966).

[31] HEILIG, K.: Z. Physik **161**, 252 (1961).

$^{48}Ca-{}^{44}Ca$ jedoch bisher nur Messungen bei hoher Energie vorliegen[7], kann die Differenz der mittleren quadratischen Radien nicht modellunabhängig bestimmt werden. Die Differenz der Halbwertsradien $r_{0,5}$ der Ladungsdichte für das zugrunde gelegte Modell weicht jedenfalls in derselben Richtung wie die Radiusdifferenz ΔR_m des Titans von dem $A^{\frac{1}{3}}$-Wert ab: Für $^{48}Ca-{}^{44}Ca$ ergab sich $\Delta r_{0,5}/r_{0,5}=1{,}9\%$, während man bei einer $A^{\frac{1}{3}}$-Proportionalität 2,9% erwartet.

Tabelle 8. *Vergleich der experimentellen Radiusänderungen mit den nach einer $A^{\frac{1}{3}}$-Abhängigkeit erwarteten. Umrechnung auf Differenz der $(2p-1s)$-Übergangsenergie im Ti−μ-Atom. $R_m^{A_2}-R_m^{A_1}$ Differenz der quadratisch gemittelten Radien der Isotope mit den Massenzahlen A_2 und A_1. $E^{A_2}-E^{A_1}$ daraus berechnete $(2p-1s)$-Energiedifferenz, in Klammern: Masseneffekt. Der Rechnung wurde die Fermi-Verteilung zugrundegelegt. $\Delta z/z$ maximale vorgegebene relative Änderung des Randzonenparameters*

	A_2-A_1	$R_m^{A_2}-R_m^{A_1}$ [fm]	$E^{A_2}-E^{A_1}$ [keV]	$\Delta z/z$ [%]
Experiment	48−46	$-0{,}00_5\pm0{,}02_7$	$0{,}2_7\,(+0{,}1)\pm1{,}2$	0
		$\pm0{,}04_0$	$\pm1{,}6$	±5
$R_m\sim A^{\frac{1}{3}}$		0,05	−2,0 (+0,1)	
Experiment	50−46	$0{,}00_3\pm0{,}02_1$	$0{,}0_6\,(+0{,}2)\pm0{,}9$	0
		$\pm0{,}04_9$	$\pm1{,}7$	±10
$R_m\sim A^{\frac{1}{3}}$		0,10	−4,0 (+0,2)	

Die Abweichung der quadratisch gemittelten Radien der Kernladungsverteilung von der Proportionalität zu $A^{\frac{1}{3}}$ wurde inzwischen theoretisch untersucht[32-34]. Die Rechnungen gehen aus von Einteilchen-Wellenfunktionen in einem kugelsymmetrischen Woods-Saxon-Potential, das einen isospin-abhängigen Term[35] (proportional $(N-Z)/A$) enthält. Für die Protonen werden die Potentialparameter so bestimmt, daß die aus $(p, 2p)$-, $(e, e'p)$-Reaktionen und Massendifferenzen bekannten Bindungsenergien richtig herauskommen. Für Kalzium ergeben sich dann nach PEREY und SCHIFFER[32] quadratisch gemittelte Radien der Kernladungsverteilung, die weniger als proportional zu $A^{\frac{1}{3}}$ ansteigen. GIBSON und VAN OOSTRUM[34] konnten unter diesen Voraussetzungen die Elektronenstreudaten für $^{40}Ca-{}^{44}Ca-{}^{48}Ca$ richtig wiedergeben. SWIFT und ELTON[33] gelangten zu demselben Ergebnis. Von ELTON[36] wurde außerdem das zugehörige Neutronenpotential und die Neutronendichte-

[32] PEREY, F. G., and J. P. SCHIFFER: Phys. Rev. Letters **17**, 324 (1966).
[33] SWIFT, A., and L. R. B. ELTON: Phys. Rev. Letters **17**, 484 (1966).
[34] GIBSON, B. F., and K. J. VAN OOSTRUM: Nuclear Phys. A **90**, 159 (1967).
[35] LANE, A. M.: Phys. Rev. Letters **8**, 171 (1962).
[36] ELTON, L. R. B.: Preprint.

verteilung bestimmt. Dabei zeigte sich, daß der quadratisch gemittelte Radius der Nukleonenverteilung (Protonen und Neutronen) im Fall des Kalziums fast exakt proportional zu $A^{\frac{1}{3}}$ ist. Für Titan liegen derartige Rechnungen bisher nicht vor.

Abweichungen von der $A^{\frac{1}{3}}$-Proportionalität des Kernradius ergeben sich auch dann, wenn man die Kerne als deformiert betrachtet[2]. Mit Hilfe der von FRADKIN[37] angegebenen Formel (dort (Gl. 18)) für die mittleren quadratischen Radien deformierter Kerne und den der Literatur[38] entnommenen Deformationsparametern läßt sich dieser Effekt abschätzen. Da die Deformation in Richtung auf das Isotop ^{50}Ti abnimmt, werden die Radiusdifferenzen kleiner als nach der $A^{\frac{1}{3}}$-Abhängigkeit erwartet. Der Effekt beträgt jedoch nur etwa 20% des $A^{\frac{1}{3}}$-Wertes, so daß die experimentellen Daten nicht allein auf diese Art erklärt werden können.

Um die aufgrund der vorliegenden Daten erwartete Isotopieverschiebung für das Titan-Myon-Atom anzugeben, wurden die erhaltenen Radiusänderungen auf Differenzen der $(2p-1s)$-Übergangsenergie im Titan-Myon-Atom umgerechnet. Die Rechnungen wurden numerisch durchgeführt*; das Ergebnis ist in Tabelle 8 unter $E^{A_2}-E^{A_1}$ aufgeführt. In Klammern ist der jeweils einbezogene Masseneffekt angegeben. Als Ladungsverteilung wurde, wie bei der Auswertung der Elektronenstreudaten, die Fermi-Verteilung zugrunde gelegt. Der für $\Delta z/z=0$ angegebene Fehler ist die auf die Energiedifferenz umgerechnete Meßgenauigkeit der Elektronenstreuexperimente. Im Fall $\Delta z \neq 0$ wurden die Energiedifferenzen aus den Radiusänderungen für dasselbe vorgegebene Δz berechnet. Ist der Einfluß der höheren Momente in beiden Fällen gleich, dann kompensiert sich die dadurch hervorgerufene Unsicherheit der Radiusdifferenz in der Energieverschiebung gerade zu Null. Da die Elektronenstreuexperimente jedoch bei Impulsübertragungen durchgeführt wurden, bei denen die höheren Momente stärker eingehen als im Fall der Myonen-Atome, ergibt sich bei der Umrechnung ein zusätzlicher Fehler.

Die Isotopieverschiebung am Titan-Myon-Atom wurde bisher noch nicht gemessen. Ein Vergleich der dabei beobachteten mit den hier aus Elektronenstreuexperimenten umgerechneten Energiedifferenzen würde, wie eingangs erwähnt, Hinweise auf eventuelle Unterschiede der

---

* Das Rechenprogramm stellte H. L. ACKER zur Verfügung.

[37] FRADKIN, E. E.: J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.) **42**, 787 (1962); — Soviet Phys. JETP **15**, 550 (1962); Formel (18).

[38] Zum Beispiel: BUSSIERE DE NERCY, A., J. C. FAIVRE, and G. VALLOIS: Proc. Conf. Nuclear Spin and Parity Assignments, Gatlinburg 1965. New York and London: Academic Press 1966.

dynamischen Beiträge liefern. Eine Messung der Isotopieverschiebung am Titan-Myon-Atom wäre daher wünschenswert.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und das stetige Interesse daran bin ich Herrn Prof. Dr. P. BRIX zu großem Dank verpflichtet. Mein Dank gilt ferner den Herren Prof. Dr. G. H. RAWITSCHER und Dr. H. L. ACKER, die ihre Rechenprogramme zur Verfügung stellten. Außerdem möchte ich den Herren Dr. F. GUDDEN, Dr. R. ENGFER, H. A. BENTZ und G. J. C. VAN NIFTRIK danken, mit denen ich zahlreiche klärende Diskussionen führte, und den Mitgliedern der DALINAC-Gruppe, die mir beim Betrieb des Beschleunigers halfen. Herr Dr. H. HANTSCHE (Firma Kontron, München) ermöglichte die Messungen an der Elektronenstrahl-Mikrosonde, die Herr T. KOSUGE ausführte. Beiden Herren gilt mein besonderer Dank. Die numerischen Rechnungen wurden am Rechenzentrum der Technischen Hochschule Darmstadt und am Deutschen Rechenzentrum in Darmstadt durchgeführt.

Die Arbeit wurde mit Mitteln des Bundesministeriums für wissenschaftliche Forschung unterstützt.

Zeitschrift für Physik 202, 214–219 (1967)

Interpretation of the Experimental Evidence Concerning the Quadrupole Moment of Bi^{209} — A Test of the Shell Model

R. J. POWERS and V. L. TELEGDI

The Enrico Fermi Institute for Nuclear Studies and Department of Physics, University of Chicago, Chicago, Illinois

Received March 3, 1967

Attempts are made to construct a model of the quadrupole moment of Bi^{209} which will be consistent with the hfs interaction constant and the $Bi^{209}-Pb^{208}$ isotone shift observed in muonic x-rays. We achieve good agreement by postulating that the Bi^{209} quadrupole moment is due to a single proton in an $h_{\frac{9}{2}}$ state and to a distorted Pb^{208} core which has a deformation of about 1%. The inferred quadrupole moment is found to be 0.37 barns of which 0.12 barns is due to the distorted core.

The ground state of Bi^{209}_{83} is described in the shell model as a Pb^{208}_{82} core with an $h_{9/2}$ "valence proton" bound to it. Inasmuch as the core is doubly magic, the model should give reasonable predictions for the electromagnetic properties of this state, viz. (a) the magnetic moment μ (and the distribution of magnetization, $\boldsymbol{M}(r)$), and (b) the quadrupole moment Q (as well as its distribution, $\rho_2(r)$). MAYER and JENSEN[1] have given a lucid discussion of Bi^{209} in terms of the Rainwater model.

The Table summarizes our present knowledge of these properties, including some very recent data[2,3] from muonic x-ray spectroscopy, and lists the single particle predictions. We shall not concern ourselves further with the magnetic moment. While the departure of its magnitude from the Schmidt value can be attributed to configuration mixing, the accuracy of the muonic h.f.s. measurements is as yet insufficient to reveal the details of $\boldsymbol{M}(r)$, i.e. to reveal a true Bohr-Weisskopf effect.

The information concerning the quadrupole moment is both confused and confusing[4]. Several values obtained by atomic spectroscopy

[1] MAYER, M. G., and J. H. D. JENSEN: Elementary theory of nuclear shell structure, p. 115. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1955.

[2] EHRLICH, R. D., D. FRYBERGER, D. A. JENSEN, C. NISSIM-SABAT, R. J. POWERS, B. A. SHERWOOD, and V. L. TELEGDI: Phys. Rev. Letters **16**, 425 (1966).

[3] BARDIN, T. T., R. BARRETT, R. C. COHEN, S. DEVONS, D. HITLIN, E. MACAGNO, C. NISSIM-SABAT, J. RAINWATER, K. RUNGE, and C. S. WU: Phys. Rev. Letters **16**, 429 (1966).

[4] I. I. RABI has reportedly offered twenty years ago a free steak dinner to anyone who can determine the quadrupole moment of any nucleus to better than 10%. According to a private communication to one of the authors (V.L.T.), this offer is still outstanding.

(using optical[5] and beam techniques[6]) disagree with each other; furthermore, the reduction of the observed splittings to Q-values is hampered by serious uncertainties about the properties of the electronic cloud (proper value of $\langle 1/r^3 \rangle$, Sternheimer effect etc.). In this respect muonic spectroscopy appears, even in its present infancy, more reliable: the properties

Table

Quantity	Value	Single particle value[f]
μ	4.0802 nm[a]	2.624 nm 3.5 nm[g]
$M(r)$	Consistent with[d e] $M(r) \sim \rho(r)$	—
Q	−0.30(−0.34) b[b] −0.35(−0.40) b[c]	−0.25 b
A_2 (muonic K)	−4.5 keV[d] −3.8 keV[e]	−2.3 keV −2.7 keV[h]
(muonic L)	−4.0 keV[d]	
Isotone shift ($K_{\alpha 1}$)	72.4 ± 2.0 keV[f]	71.3 keV
($K_{\alpha 2}$)	63.1 ± 2.0[f]	64.8 keV

a) Flynn, C. P., and E. F. W. Seymour: Proc. Phys. Soc. (London) **73**, 945 (1959).
b) Refs. [5] and [12].
c) Refs. [6] and [12].
d) Ref. [2].
e) Ref. [3].
f) Ref. [9]. The value $Q = -0.25$ b corresponds to an oscillator wave function parameter $\alpha = 0.44$ Fm^{-1}.
g) With configuration mixing; Noya, H., A. Arima, and H. Horie: Progr. Theoret. Phys. (Kyoto) **8** (Suppl.), 33 (1959).
h) Ref. [8]; Le Bellac assumes $Q = -0.4$ b.

of the muon cloud can be computed by simple quadratures. Furthermore, muonic $E2$ h.f.s. splittings are very sensitive to the extension (form-factor) of the quadrupole distribution[7], while ordinary hfs gives at best only Q itself.

The theoretical situation is quite complementary. Even if atomic spectroscopy did provide a reliable value of Q, it could not be compared with a *unique* single-particle prediction, say Q_{SP}. Any Q_{SP} depends on a "length parameter" assumed for the wave-function of the lone proton, and can be adjusted while keeping this parameter within "reasonable" limits. On the other hand, once this parameter is fixed, the shell model gives a unique prediction for both and its spatial distribution $\rho_2(r)$. Thus the muonic $E2$ h.f. splitting is particularly relevant as a test of this

[5] Schuler, H., u. T. Schmidt: Z. Physik **98**, 430 (1935).
[6] Title, R. S., and K. F. Smith: Phil. Mag. **5**, 1281 (1960).
[7] Wheeler, J. A.: Phys. Rev. **92**, 812 (1953).

model. However, precisely because this splitting (measured for a single muon state, $2p_{3/2}$) depends on *both* the magnitude and the distribution of the $E2$ distribution, its interpretation requires *independent* information about either Q, or about the "length parameter".

In Fig. 1, the curve with the soft maximum represents the muonic $E2$ h.f.s. interaction constant A_2 [8] as a function of the single-particle

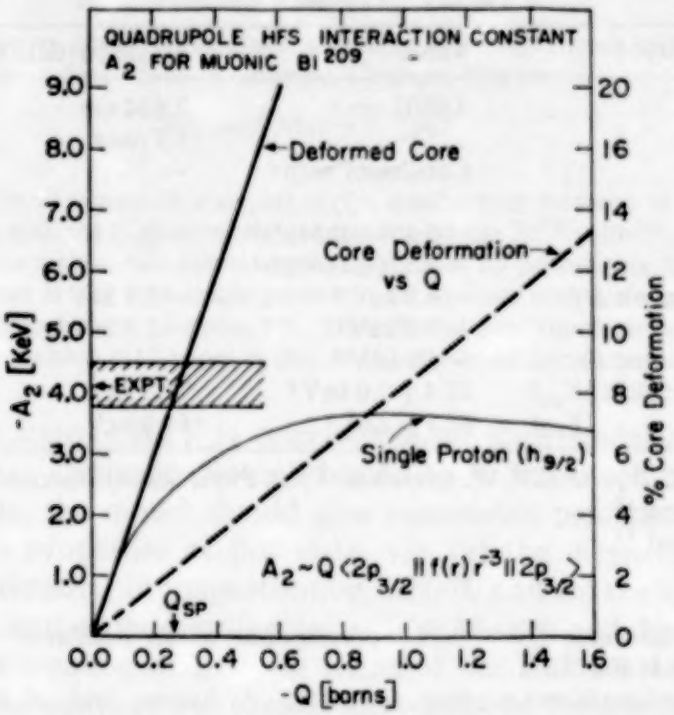


Fig. 1. Plots of A_2 as a function of the quadrupole moment Q of Bi^{209} for two opposite assumptions: (a) that Q is entirely due to the lone proton, (b) that it is entirely due to a deformed Pb^{208} core. The hatched strip indicates the experimental values[2, 3] of A_2. The right hand scale gives the percentage core deformation vs. Q for the case (b)

quadrupole moment, i.e. essentially as a function of the "length parameter". It is physically clear why A_2 decreases with increasing Q after going through a maximum. As the "radius" of the lone proton orbit is increased, the muon finds itself a larger and larger fraction of the time "inside the quadrupole moment", where its $E2$ interaction is greatly reduced. In other words, the form-factor reduces the interaction, although the magnitude of Q – as seen from far away, say by an atomic electron – is increasing. In Fig. 1 we also indicate, by a hatched band, the experimental value of A_2. It is striking that *no Q due to a single proton is compatible with the large observed interaction constant*! This fact is, at least at first sight, surprising, because the Q values from atomic

[8] For an exact definition of A_2 see: Le Bellac, M.: Nuclear Phys. **40**, 645 (1963).

data (Table) are quite compatible with the shell model predictions; the point "Q_{SP}" on the abscissa of Fig. 1 represents a typical single proton value.

It is reasonable to attribute at least part of the observed Q to a deformation of the Pb^{208} core[9]. The curve marked "deformed core" in Fig. 1 gives the $A2$ produced by a core of given Q; this curve is essentially a straight line, because the quadrupole form factor is practically constant for small deformations. The dashed line marked "core deformation", to be used with the r.h. scale, gives the percentage deformation [defined as $\beta \equiv [(4/3\,(\pi/5)^{\frac{1}{2}}\,(\Delta R/R_0)]$ required to produce that Q. From these two curves one sees that (a) a Q of ~ -0.25 barns, if it were entirely due to the core, would be needed to explain the observed $A2$, and (b) that such a Q corresponds to a deformation of only 2%. Our idea is then to assume that *some fraction of the total quadrupole moment is due to core polarization* (while the bulk is contributed by the lone proton!), and to determine this fraction.

For this determination, we turn to Fig. 2. In this figure, the total Q values corresponding to the observed muonic $A2$ values are plotted vs. their single proton part; the two lines correspond to the fact that slightly different $A2$-values[2] are extracted from the K and L transitions in muonic Bi^{209}, and are appropriately labelled. If the total Q were known experimentally – say if we accepted the value $Q=-0.35$ barns (indicated in Fig. 2 as ABG) – then we could determine the contribution of the lone proton to Q within certain narrow limits. Thus $Q=-0.35$ barns corresponds to single proton Q between -0.20 (from the K-line) and -0.25 (from the L-line). Taking -0.225 barns as the "true" value, one sees that the core contributes $-(0.35-0.225)\simeq -0.13$ barns to the total Q. This corresponds, from Fig. 1, to an induced core deformation of $\simeq 1\%$. Unfortunately, a reliable value of the total Q does not appear to be available. We must therefore turn to other information concerning the charge distribution of the lone proton; such information is provided by the muonic *isotone shift*, viz. the observed energy difference between equivalent transitions say ($K_{\alpha 1}$ or $K_{\alpha 2}$) in muonic Pb^{208} and Bi^{209}. This shift, which has been discussed in some detail by GREINER and SCHECK[10] as well as by QUITMANN[11], is attributed to the Coulomb interaction between the muon and the lone $h_{9/2}$ proton, assuming that the Pb^{208} core is essentially unaffected by adding this particle. Its

[9] For the Pb^{208} charge distribution we have assumed a Fermi distribution with measured parameters $c=1.132$ Fm and $s=0.47$ Fm (determined from muonic x-rays). See POWERS, R. J.: University of Chicago thesis (to be published).

[10] GREINER, W., and F. SCHECK: Nuclear Phys. **41**, 424 (1963).

[11] QUITMANN, D.: Die Kernradiusänderung beim Einbau von Protonen. Habil.-Schrift Darmstadt, Juli 1966.

magnitude obviously depends on the "length parameter" which in turn governs the quadrupole moment and its distribution. The two dashed, downward sloping lines in Fig. 2 represent the connection, for $K_{\alpha 1}$ and $K_{\alpha 2}$ transitions respectively, of the isotone shift (r.h. ordinate) on the single proton Q (abscissa). The *observed* isotone shifts* are indicated

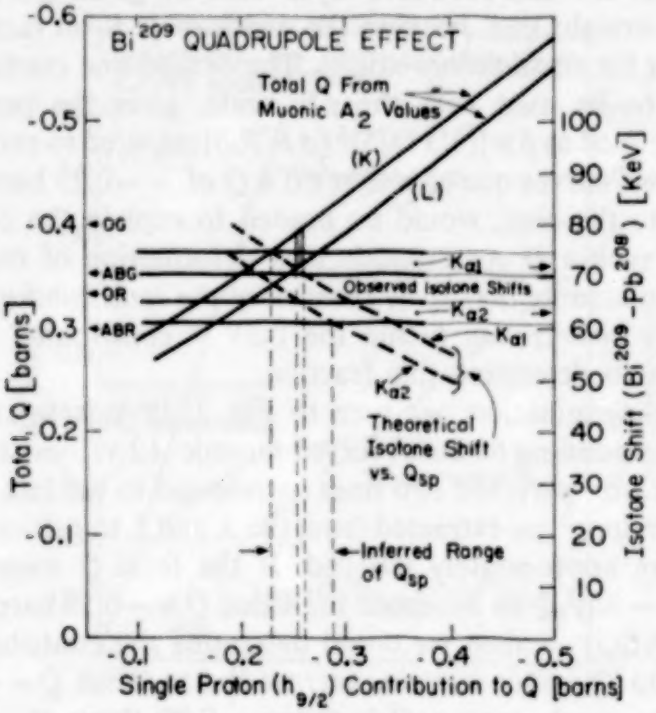


Fig. 2. Left hand scale: Total Q of Bi, as determined from the experimental muonic A_2 values, as a function of its single proton part, Q_{SP}. The pairs of horizontal lines represent the observed isotone shift (right hand scale) for the $K_{\alpha 1}$ and $K_{\alpha 2}$ transitions. The dashed curves show the dependence of the isotone shift on Q_{SP}. The vertical lines indicate the range of Q_{SP} consistent with the observed isotone shifts. The hatched area indicates the ranges of total Q and Q_{SP} consistent with both the A_2 values and the isotone shifts

in Fig. 2 by pairs of parallel horizontal lines; two lines are drawn for each transition in order to reflect the measurement errors. The intercepts of the horizontal lines with the theoretical curves define the inferred ranges of single proton Q-values, indicated by dashed vertical bands. Accepting this inference, we now "know" the magnitude of the single proton Q (viz. -0.25 barns), and can read off the approximate curves the total Q compatible with muonic $E2$ h.f.s.: The area of compatibility is indicated by a shaded diamond. The inferred total Q is $-(0.37\pm0.02)$ barns; this correspond to a core contribution of $-(0.37-0.25)=-0.12$

* See Ref. in [9].

barns, i.e. to an induced core deformation of $\sim 1\%$. This small value appears reasonable even for a core as rigid as Pb^{208}.

There remains the question of the compatibility of the *derived* value $Q = -0.37$ barns with the existing determinations of electronic $A2$ values, and their differing interpretations in terms of Q. Our derived value lies midpoint between the optical[5] and atomic beam[6] determinations, if these are interpreted in a conventional, German fashion[5] (points OG and ABG in the Figure). If these measurements are interpreted as recently advocated by Russian authors[12], then the optical value (OR) is compatible, while the atomic beam value (ABR) is not. We do not feel qualified to settle this delicate point in atomic spectroscopy[4], but rather think that muonic spectroscopy is likely to become the best source of reliable Q values.

In conclusion, we believe to have shown that the data on muonic $E2$ h.f. splitting in Bi^{209}, the muonic isotone shift $Bi^{209} - Pb^{208}$ and (with some qualifications) the quadrupole moment of Bi^{209} are all compatible with a weak surface coupling description of this nucleus, viz. one where the core has an induced deformation of $\sim 1\%$ and contributes about 30% of the total quadrupole moment. This conclusion is corroborated by the early work of TRUE[13], who has evaluated the Rainwater parameters from observed electromagnetic transition rates.

There are many simplifications in our discussion. Although we do not feel that these would vitiate our main argument, we think it best to list those of which we are aware: 1. Uncertainties in the shape of the radial wave function of the lone proton, especially neglect of configuration mixing and relativistic effects; 2. Uncertainties in the polarization effects[14] in the computation of the isotone shift; 3. Neglect, in muonic Bi^{209}, of vacuum polarization effects on the $E2$ h.f. splitting (for the $M1$ h.f.s., see the work of STERNHEIM[15]).

We wish to thank Dr. D. KURATH of Argonne National Laboratory for a helpful discussion.

[12] KORALKOV, V. S., and A. G. MAKHANEK: Optics and Spectroscopy **12**, 87 (1962).
[13] TRUE, W. W.: Phys. Rev. **101**, 1342 (1956).
[14] SCHECK, F.: Z. Physik **172**, 239 (1963).
[15] STERNHEIM, M.: Phys. Rev. **130**, 211 (1963).

Zeitschrift für Physik 202, 220–235 (1967)

Zur Abspaltung der Schwerpunktsbewegung in der Schalenmodellbeschreibung von Kernreaktionen

WOLFGANG WILD
Physik-Department der Technischen Hochschule München

Eingegangen am 25. Februar 1967

The generalized Hartree-Fock-Method of KERMAN and KLEIN is given in a modified version, which allows its application to the theory of Nuclear Reactions. It is possible to split off the effect of the center of mass motion rigorously.
The remaining equations show a close analogy to those of the shell model theory of Nuclear Reactions and can be treated by similar methods.

1. Einleitung

In den letzten Jahren wurde von mehreren Autoren[1] eine dynamische Theorie der Kernreaktionen entwickelt, welche darauf beruht, daß die in der Theorie der Kernstruktur so erfolgreiche Schalenmodellvorstellung auch für die Beschreibung von Kernreaktionen herangezogen wird. Auf diese Weise gelang es, Partialbreiten und Resonanzenergien über im Prinzip einfache Rechnungen – die Diagonalisierung symmetrischer komplexer Matrizen – zu gewinnen und dabei mit Kenntnissen der Kernstruktur in Zusammenhang zu bringen.

Allerdings läßt sich die Theorie nur dann mit Aussicht auf Erfolg anwenden, wenn der Zielkern in guter Näherung durch das Schalenmodell beschrieben wird; außerdem enthält die Schalenmodellbeschreibung von Kernreaktionen die dem Schalenmodell inhärente Verletzung der Translationsinvarianz. Die Theorie ist deshalb in ihrer heutigen Form nur sinnvoll, wenn bei den betrachteten Prozessen die Masse des Geschoßteilchens viel kleiner ist als die des Zielkerns.

Auf der anderen Seite sind in neuerer Zeit in der Theorie der Kernstruktur mit großem Erfolg feldtheoretische Methoden angewandt worden[2]. Man betrachtet dabei Grundzustandserwartungswerte von

[1] BLOCH, C.: An introduction to the many-body theory of nuclear reactions. Service de Physique Théorique, C.E.N. de Saclay. – BLOCH, C., and V. GILLET: Phys. Letters **16**, 62 (1965); **18**, 58 (1965). – WEIDENMÜLLER, H. A.: Nuclear Phys. **75**, 189 (1966). – WEIDENMÜLLER, H. A., and K. DIETRICH: Nuclear Phys. **83**, 332 (1966). – BLOCK, B., and H. FESHBACH: Ann. Phys. (N.Y.) **23**, 47 (1963).

[2] MIGDAL, A. B.: Nuclear Phys. **57**, 29 (1964). – MIGDAL, A. B., and A. I. LARKIN: Nuclear Phys. **51**, 561 (1964). – GUMAN, V. N., and B. L. BIRBRAIN: Nuclear Phys. **70**, 545 (1965). – MEDVEDEV, B. I., u. S. V. KHUDYAKOV: Soviet J. Nuclear Phys. **3**, No. 1 (1966). – MIGDAL, A. B.: Teoriya konechnykh fermi-system. Fizmatgiz 1965.

zeitgeordneten Produkten aus Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, sog. Greensche Funktionen. Die Bewegungsgleichung dieser Greenschen Funktionen kann man so umformen oder renormieren, daß sich viele beobachtbare Größen (z.B. β und γ Matrixelemente, magnetische Momente etc.) in Strenge – oder zumindest in sehr guter Näherung – zurückführen lassen auf Quasiteilchenenergien, die direkt dem Experiment entnommen werden können, und eine effektive Wechselwirkung, die von Kern zu Kern nur wenig variiert. Quasiteilchenenergien und effektive Wechselwirkung sind implizit durch Funktionalgleichungen definiert, ihre explizite Berechnung aus der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung erscheint aber in der Praxis kaum möglich. Es ist darum zwar nicht möglich, die beobachtbaren Größen in guter Näherung aus den Kernkräften zu berechnen, dafür aber erhält man einen mikroskopisch begründeten Zusammenhang vieler Meßgrößen untereinander. Leider ist es bisher nicht gelungen, das Renormierungsprogramm auch für die Greenschen Vierpunktfunktionen, die zur Beschreibung von Kernreaktionen benötigt werden, in befriedigender Weise durchzuführen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nun, im Anschluß an das verallgemeinerte Hartree-Fock-Verfahren, das von KERMAN und KLEIN[3] zur Berechnung kollektiver Phänomene bei niedrig angeregten Kernzuständen entwickelt worden ist, eine Methode zu entwickeln, die in der Mitte steht zwischen der Methode der Konfigurationsmischungen von Schalenmodellzuständen und der Methode der Greenschen Funktionen.

Wir werden dabei insbesondere zeigen, daß man alle wesentlichen Resultate der Schalenmodellbeschreibung von Kernreaktionen beibehalten, die Schwerpunktsbewegung aber in Strenge abspalten kann.

2. Die Grundgleichungen

Wir wollen annehmen, daß die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen instantan ist und durch Zweikörperkräfte vermittelt wird. Der Hamiltonoperator soll also die Struktur haben

$$H=\sum_{\alpha\beta}\langle\alpha|t|\beta\rangle\, a_\alpha^+ a_\beta+\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha\ldots\delta}\langle\alpha\gamma|v|\beta\delta\rangle\, a_\alpha^+ a_\gamma^+ a_\delta a_\beta. \tag{1}$$

Dabei sind die Operatoren a_α und a_α^+ Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren im Einteilchenzustand α und genügen den Fermivertauschungsregeln

$$\begin{aligned}[a_\alpha, a_\beta^+]_+&=\delta_{\alpha\beta}\\ [a_\alpha, a_\beta]_+&=[a_\alpha^+, a_\beta^+]_+=0.\end{aligned} \tag{2}$$

[3] KERMAN, A. K., and A. KLEIN: Phys. Rev. **132**, 1326 (1963). – KLEIN, A., and A. K. KERMAN: Phys. Rev. **138** B, 1323 (1965). – KLEIN, A., L. CELENZA, and A. K. KERMAN: Phys. Rev. **140** B, 245 (1965).

Die Größe

$$\langle\alpha|\,t\,|\beta\rangle=\langle\beta|\,t\,|\alpha\rangle^* \tag{3}$$

ist das Matrixelement der kinetischen Energie,

$$\langle\alpha\gamma|\,v\,|\beta\delta\rangle=\langle\gamma\alpha|\,v\,|\delta\beta\rangle=\langle\beta\delta|\,v\,|\alpha\gamma\rangle^* \tag{4}$$

das Matrixelement der Zweiteilchenwechselwirkung zwischen den entsprechenden Einteilchenzuständen.

Die exakten Eigenzustände von H zur Teilchenzahl A nennen wir $|A\,n\rangle$. Es sei also

$$\begin{aligned} H\,|A\,n\rangle&=E_n^A\,|A\,n\rangle\\ N\,|A\,n\rangle&=A\,|A\,n\rangle\,, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei N der Teilchenzahloperator ist. In dem Satz $|A\,n\rangle$ sollen zunächst noch diskrete und kontinuierliche Zustände unter der gleichen Notation zusammengefaßt sein.

Wir bilden den Kommutator

$$[a_\alpha, H]_-=\sum_\beta\langle\alpha|\,t\,|\beta\rangle\,a_\beta+\sum_{\beta\gamma\delta}\langle\alpha\gamma|\,v\,|\beta\delta\rangle\,a_\gamma^+\,a_\delta\,a_\beta\,. \tag{6}$$

Die Grundbausteine der folgenden Theorie sind die Einteilchenamplituden

$$X_{nj}^A(\alpha)=\langle A-1\,n|\,a_\alpha\,|Aj\rangle\,. \tag{7}$$

Für diese folgt aus (6) unmittelbar die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}&(E_j^{A+1}-E_n^A)\,X_{nj}^{A+1}(\alpha)\\ &=\sum_\beta\langle\alpha|\,t\,|\beta\rangle\,X_{nj}^{A+1}(\beta)+\sum_{in'}\sum_{\beta\gamma\delta}\langle\alpha\gamma|\,v\,|\beta\delta\rangle\,X_{in}^{A\,*}(\gamma)\,X_{in'}^A(\delta)\,X_{n'j}^{A+1}(\beta)\,.\end{aligned} \tag{8}$$

Durch die Bewegungsgleichung werden die Amplituden $X_{nj}(\alpha)$ nicht vollständig bestimmt. Aus den Vertauschungsrelationen erhält man eine Vollständigkeitsrelation in der Form

$$\sum_i X_{in}^{A\,*}(\alpha)\,X_{in'}^A(\beta)+\sum_j X_{n'j}^{A+1\,*}(\alpha)\,X_{nj}^{A+1}(\beta)=\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{nn'} \tag{9}$$

und aus der Bedingung für die Teilchenzahl ergibt sich

$$\sum_i\sum_\alpha X_{in}^{A\,*}(\alpha)\,X_{in'}^A(\alpha)=A\,\delta_{nn'}\,. \tag{10}$$

Bei kontinuierlichen Indizes ist das Summenzeichen in den obigen Gleichungen als Integral aufzufassen, das Kroneckersymbol als δ-Funktion.

Wir kürzen ab

$$U_{nn'}^A(\alpha,\beta)=\sum_i\sum_{\gamma\delta}\langle\alpha\gamma|\,v\,|\beta\delta\rangle\,X_{in}^{A\,*}(\gamma)\,X_{in'}^A(\delta) \tag{11}$$

und erhalten aus (8)

$$(E_j^{A+1}-E_n^A)\,X_{nj}^{A+1}(\alpha) = \sum_\beta \langle\alpha|\,t\,|\beta\rangle\, X_{nj}^{A+1}(\beta)+\sum_{n'}\sum_\beta U_{nn'}^A(\alpha,\beta)\,X_{n'j}^{A+1}(\beta). \tag{12}$$

Die Gl. (12) ist der Ausgangspunkt unserer Überlegungen. Sie ist eine lineare Gleichung für die Amplituden des $A+1$-Teilchenproblems, da $U_{nn'}^A(\alpha,\beta)$ als bekannt angesehen werden kann, wenn das A-Teilchenproblem gelöst ist.

Die angemessenste Methode zur Behandlung von (12) ist es also, zunächst den Fall $A=2$ zu behandeln (d.h. das Dreiteilchenproblem) und dann sukzessive zu schwereren Kernen überzugehen. Dies setzt eine Lösung des Schwerpunktsproblems voraus.

Die Amplituden $X_{nj}^{A+1}(\alpha)$ hängen von dem Einteilchenindex α und den Vielteilchenindizes n und j ab. Durch die Gl. (12) wird der Index j nicht berührt, er dient zur Unterscheidung der verschiedenen Lösungen. Vernachlässigen wir $U_{nn'}^A$ für $n\neq n'$, so reduziert sich die Gl. (12) auf eine Gleichung vom Hartree-Typ.

Von dem verallgemeinerten Hartree-Fock-Verfahren von KERMAN und KLEIN[3] unterscheiden sich unsere Gleichungen in folgenden Punkten:

a) Die Summe über n' läuft bei uns über alle Zustände, bei KERMAN und KLEIN nur über eine Auswahl von Zuständen, nämlich die auf dem Grundzustand aufbauende Bande von Kollektivzuständen.

b) An die Stelle des Matrixelements $\langle\alpha\gamma|\,v\,|\beta\delta\rangle$ in Gl. (11) tritt bei KERMAN und KLEIN das antisymmetrisierte Matrixelement

$$\langle\alpha\gamma|\,v\,|\beta\delta\rangle-\langle\alpha\gamma|\,v\,|\delta\beta\rangle.$$

c) Die Matrixelemente $X_{in}^A(\alpha)$, die in $U_{nn'}^A$ eingehen, werden nicht aus einer zu (12) analogen Gleichung mit der Ersetzung $A\to A-1$ berechnet, sondern aus der Gleichung

$$(E_n^A-E_i^{A-1})\,X_{in}^A(\alpha)=\sum_\beta \langle\alpha|\,t\,|\beta\rangle\, X_{in}^A(\beta)+\sum_{n'}{}' \tilde{U}_{n'n}^A(\alpha,\beta)\,X_{in'}^A(\beta), \tag{13}$$

wobei sich $\tilde{U}$ von dem durch (11) definierten U wieder durch die Ersetzung $\langle\alpha\gamma|\,v\,|\beta\delta\rangle\to\langle\alpha\gamma|\,v\,|\beta\delta\rangle-\langle\alpha\gamma|\,v\,|\delta\beta\rangle$ unterscheidet und die Summe nur über die oben angeführte Auswahl von Zuständen läuft.

KERMAN und KLEIN ersetzen also das gestaffelte System durch ein geschlossenes; man muß nicht vorher das $A-1$-Teilchensystem gelöst haben, um das A-Teilchensystem berechnen zu können. Selbstverständlich ist es auch unser Bestreben, die Summe über n' in (12) durch eine beschränkte Summe zu ersetzen, welche dem betrachteten Problem angemessen ist. Dies soll in Abschnitt 4 geschehen. Die Elimination der

restlichen Summenglieder wird sich aber im allgemeinen nicht in guter Näherung durch die Ersetzung $\langle\alpha\gamma|\,v\,|\beta\delta\rangle \to \langle\alpha\gamma|\,v\,|\beta\delta\rangle - \langle\alpha\gamma|\,v\,|\delta\beta\rangle$ bewerkstelligen lassen.

Vergleichen wir unsere Methode mit dem Konfigurationsmischungsverfahren im Rahmen des Schalenmodells, so treten die Amplituden $X_{nj}^{A+1}(\alpha)$ an die Stelle der Entwicklungskoeffizienten der gesuchten exakten Wellenfunktion nach den Schalenmodellwellenfunktionen. Cum grano salis können wir nämlich die Amplituden $X_{nj}^{A+1}(\alpha)$ auffassen als die Entwicklungskoeffizienten des exakten Zustandes $|A+1\,j\rangle$ nach den Zuständen $a_\alpha^+|A\,n\rangle$. Allerdings bilden die Zustände $a_\alpha^+|A\,n\rangle$ keine orthonormierte Basis und deshalb ist der Zusammenhang der $X_{nj}^{A}(\alpha)$ mit den Matrixelementen der S-Matrix weniger einfach als in der Schalenmodellbeschreibung. Ist allerdings $|A\,n\rangle$ ein exakter diskreter Eigenzustand des A-Teilchenproblems und α ein Schalenmodellzustand im Kontinuum, so sind die Zustände $a_\alpha^+|A\,n\rangle$ aus diesem Teilraum des Hilbertraums in guter Näherung normiert und aufeinander orthogonal, da die diskreten exakten Eigenzustände $|A\,n\rangle$ überwiegend aus diskreten Schalenmodellzuständen aufgebaut sein sollten.

Zum Vergleich mit der Methode der Greenschen Funktionen wäre zu sagen, daß die Amplituden $X_{0j}^{A+1}(\alpha)$, wobei 0 der Grundzustand des A-Teilchenproblems ist, aus der Spektraldarstellung der Greenschen Zweipunktfunktion extrahiert werden können. Um aber die $X_{nj}^{A+1}(\alpha)$ mit $n \neq 0$ zu erhalten, müssen wir die Greensche Vierpunktfunktion vollständig kennen. In einer brauchbaren Theorie der Greenschen Zwei- und Vierpunktfunktion wären also die Ergebnisse, die auf der Lösung des Gleichungssystems (12) beruhen, enthalten. Da wir aber bis heute keine befriedigende Theorie dieser Art haben, kann man in unserer Methode den Versuch sehen, die erfolgreichen Verfahren der Konfigurationsmischung von Schalenmodellzuständen für die Theorie der Greenschen Funktionen nutzbar zu machen.

Bevor wir uns der Abseparation der Schwerpunktsbewegung zuwenden, wollen wir noch einige nützliche Relationen für die Amplituden $X_{nj}^{A}(\alpha)$ herleiten. Aus der Betrachtung des Ausdrucks

$$\langle An|\,[a_\beta^+,[a_\alpha,H]_-]_+\,|An'\rangle$$

erhalten wir die Identität

$$\sum_i X_{in'}^{A}(\alpha)\,X_{in}^{A\,*}(\beta)\,(E_{n'}^{A}-E_i^{A-1})+\sum_j X_{nj}^{A+1}(\alpha)\,X_{n'j}^{A+1\,*}(\beta)\,(E_j^{A+1}-E_n^{A})$$
$$=\langle\alpha|\,t\,|\beta\rangle\,\delta_{nn'}+\sum_{\gamma\delta}\big(\langle\alpha\gamma|\,v\,|\beta\delta\rangle-\langle\alpha\gamma|\,v\,|\delta\beta\rangle\big)\cdot\sum_i X_{in}^{A\,*}(\gamma)\,X_{in'}^{A}(\delta), \tag{14}$$

wobei wir auf der linken Seite Zwischenzustände eingeschoben, auf der rechten Seite die Kommutatoren explizit ausgewertet haben. Wichtiger

ist eine Identität, die aus der lokalen Stromerhaltung folgt.

$$\begin{aligned}
&\sum_{\beta}\langle\alpha|\,e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\,|\beta\rangle\,(\omega+E_j^{A+1}-E_n^A)\,X_{nj}^{A+1}(\beta)\\
&\quad=\sum_{\beta}\langle\alpha|\,e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\left(\omega-\frac{q^2}{2m}+\frac{i\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{V}}{m}\right)|\beta\rangle\,X_{nj}^{A+1}(\beta)\\
&\quad+\sum_{\gamma\delta}\langle\gamma|\,e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\left(\omega-\frac{q^2}{2m}+\frac{i\,\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{V}}{m}\right)|\delta\rangle\times \qquad (15)\\
&\quad\times\left\{\sum_{in'}\frac{E_j^{A+1}-E_{n'}^A}{E_n^A-E_{n'}^A-\omega-i\eta}\,X_{in}^{A*}(\gamma)\,X_{in'}^{A}(\delta)\,X_{n'j}^{A+1}(\alpha)-\right.\\
&\quad\left.-\sum_{n'j'}\frac{E_{j'}^{A+1}-E_n^A}{E_{j'}^{A+1}-E_j^{A+1}-\omega-i\eta}\,X_{nj'}^{A+1}(\alpha)\,X_{n'j'}^{A+1\,*}(\gamma)\,X_{n'j}^{A+1}(\delta)\right\}.
\end{aligned}$$

Die Ableitung dieser Beziehung geben wir im Anhang. Die Relation (15), die für beliebige $\boldsymbol{q}$ und ω gilt, entspricht den Ward-Pitaerskii Identitäten[4] in der Theorie der Greenschen Funktionen.

3. Abspaltung der Schwerpunktsbewegung

Der Hamiltonoperator H vertauscht zwar mit dem Gesamtimpuls $\boldsymbol{P}$, nicht aber mit dem Operator des Schwerpunktes $\boldsymbol{X}$. Lokalisierte Zustände sind darum keine Eigenzustände von H. Andererseits lassen sich bei endlich ausgedehnten Systemen lokalisierte Zustände aber viel einfacher durch Modelle, etwa das Schalenmodell, approximieren als die über den ganzen Raum verschmierten Eigenzustände zu scharfem Impuls. Auf Grund der Galileiinvarianz muß sich die eigentlich interessierende innere Bewegung des Systems aus einer Beschreibung durch lokalisierte Zustände ebenso streng herleiten lassen, wie aus einer Beschreibung durch Zustände mit scharfem Impuls.

Wir bezeichnen die simultanen Eigenzustände von H und $\boldsymbol{P}$ mit $|A\lambda\boldsymbol{K}\rangle$ Es sei also

$$\begin{aligned}
H\,|A\lambda\boldsymbol{K}\rangle&=E_{\lambda\boldsymbol{K}}^A\,|A\lambda\boldsymbol{K}\rangle\\
N\,|A\lambda\boldsymbol{K}\rangle&=A\,|A\lambda\boldsymbol{K}\rangle \qquad (16)\\
\boldsymbol{P}\,|A\lambda\boldsymbol{K}\rangle&=\boldsymbol{K}\,|A\lambda\boldsymbol{K}\rangle.
\end{aligned}$$

Auf Grund der Galileiinvarianz ist

$$E_{\lambda\boldsymbol{K}}^A=E_\lambda^A+\frac{K^2}{2A\,m}, \qquad (17)$$

wobei m die Teilchenmasse und E_λ^A die Energie des Zustandes mit dem Impuls Null ist. Außerdem folgt aus der Galileiinvarianz

$$|A\lambda\boldsymbol{K}\rangle=e^{i\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}}\,|A\lambda\boldsymbol{K}=0\rangle \qquad (18)$$

mit $\boldsymbol{X}$ als dem Operator des Schwerpunkts.

[4] Vgl. Nozieres: Theory of interacting Fermi systems. New York: Benjamin 1964.

Wir wollen nunmehr lokalisierte Zustände betrachten, die definiert sind durch

$$|A\lambda\boldsymbol{R}\rangle=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3\boldsymbol{K}\, e^{-i\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}}|A\lambda\boldsymbol{K}\rangle. \tag{19}$$

Auf Grund der Definition ist

$$|A\lambda\boldsymbol{R}\rangle=e^{-i\boldsymbol{P}\boldsymbol{R}}|A\lambda\boldsymbol{R}=0\rangle. \tag{20}$$

Die Relation (18) garantiert, daß die durch (19) definierten Zustände wirklich Eigenzustände des Schwerpunktoperators sind:

$$\boldsymbol{X}|A\lambda\boldsymbol{R}\rangle=\boldsymbol{R}|A\lambda\boldsymbol{R}\rangle. \tag{21}$$

Wir diskutieren im folgenden im Ortsraum und lassen zur Vereinfachung der Notation Spin- und Isospinindizes weg.

Die Umkehrung von (19) liefert

$$|A\lambda\boldsymbol{K}\rangle=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int d^3\boldsymbol{R}\, e^{i\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}}|A\lambda\boldsymbol{R}\rangle \tag{22}$$

und damit können wir schreiben

$$\begin{aligned}&\langle A\lambda\boldsymbol{K}|\,a(\boldsymbol{x})\,|A+1\,\rho\,\boldsymbol{Q}\rangle\\&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{R}\int d^3\boldsymbol{R}'\,e^{-i\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}}\,e^{i\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}'}\,\langle A\lambda\boldsymbol{R}|\,a(\boldsymbol{x})\,|A+1\,\rho\,\boldsymbol{R}'\rangle.\end{aligned} \tag{23}$$

Unter Ausnutzung der Translationseigenschaften können wir umformen

$$\begin{aligned}\langle A\lambda\boldsymbol{R}|\,a(\boldsymbol{x})\,|A+1\,\rho\,\boldsymbol{R}'\rangle&=\langle A\lambda\boldsymbol{R}|\,a(\boldsymbol{x})\,e^{-i\boldsymbol{P}\boldsymbol{R}'}\,|A+1\,\rho\,\boldsymbol{R}'=0\rangle\\&=\langle A\lambda\boldsymbol{R}|\,e^{-i\boldsymbol{P}\boldsymbol{R}'}\,a(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{R}')\,|A+1\,\rho\,\boldsymbol{R}'=0\rangle\\&=\langle A\lambda\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'|\,a(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{R}')\,|A+1\,\rho\,\boldsymbol{R}'=0\rangle.\end{aligned} \tag{24}$$

Nun ist aber ($A\geqq 1$)

$$\boldsymbol{X}\,a(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{R}')\,|A+1\,\rho\,\boldsymbol{R}'=0\rangle=-\frac{1}{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{R}')\,a(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{R}')\,|A+1\,\rho\,\boldsymbol{R}'=0\rangle. \tag{25}$$

$a(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{R}')\,|A+1\,\rho\,\boldsymbol{R}'=0\rangle$ ist also ein an der Stelle $-\frac{1}{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{R}')$ lokalisierter Zustand, und da $|A\lambda\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'\rangle$ an der Stelle $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'$ lokalisiert ist, muß das Matrixelement eine δ-Funktion abspalten. Wir können also setzen

$$\langle A\lambda\boldsymbol{R}|\,a(\boldsymbol{x})\,|A+1\,\rho\,\boldsymbol{R}'\rangle=\delta^3\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}'+\frac{1}{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{R}')\right)\Psi^{A+1}_{\lambda\rho}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{R}'), \tag{26}$$

und damit folgt aus (23)

$$X^{A+1}_{\lambda K,\rho Q}(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3R\, e^{-iKR}\, e^{i\frac{K}{A}(x-R)}\, e^{iQR}\, \Psi^{A+1}_{\lambda\rho}(x-R). \quad (27)$$

In der Schalenmodelldarstellung erhalten wir

$$X^{A+1}_{\lambda K,\rho Q}(\alpha)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3R\, e^{i(Q-K)R}\cdot\int d^3x\, u^*_\alpha(x+R)\, e^{i\frac{K}{A}x}\, \Psi^{A+1}_{\lambda\rho}(x), \quad (28)$$

wenn u_α die Einteilchenfunktionen der Darstellung α sind. Die Matrixelemente zwischen Zuständen mit scharfem Impuls lassen sich also zurückführen auf die Matrixelemente zwischen lokalisierten Zuständen, integriert über alle möglichen Lokalisierungen mit durch (28) gegebenen Gewichtsfunktionen.

Es ist nun möglich, an die Stelle der Gleichungen und Bedingungen für die Amplituden $X^{A+1}_{\lambda K,\rho Q}(\alpha)$ modifizierte Gleichungen und Bedingungen für die lokalisierten Größen $\Psi^{A+1}_{\lambda\rho}(x)$ treten zu lassen. Gehen wir mit (28) in (8) ein, so folgt für eine lokale Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung

$$(E^{A+1}_\rho - E^A_\lambda)\,\Psi^{A+1}_{\lambda\rho}(x)=-\frac{1}{2m}\frac{A}{A+1}\Delta\,\Psi^{A+1}_{\lambda\rho}(x)+\sum_{\lambda'}U^A_{\lambda\lambda'}(x)\,\Psi^{A+1}_{\lambda'\rho}(x) \quad (29)$$

mit

$$U^A_{\lambda\lambda'}(x)=\sum_\kappa\left(\frac{A-1}{A}\right)^3\int d^3x'\, v\left(\frac{A+1}{A}x-x'\right)\Psi^{A*}_{\kappa\lambda}(x')\,\Psi^A_{\kappa\lambda'}(x'). \quad (30)$$

Die Ableitung von (29) und (30) geben wir im Anhang B. Für $A=1$ tritt an die Stelle von (30)

$$U^1_{\lambda\lambda'}(x)=\delta_{\lambda\lambda'}\,v(2x). \quad (31)$$

Die Relation (10) nimmt die Form an

$$\left(\frac{A-1}{A}\right)^3\sum_\kappa\int d^3x\,\Psi^{A*}_{\kappa\lambda}(x)\,\Psi^A_{\kappa\lambda'}(x)=A\,\delta_{\lambda\lambda'}, \quad (32)$$

während aus (9) die Bedingung

$$\begin{aligned}\sum_\kappa\left(\frac{A-1}{A}\right)^3\Psi^{A*}_{\kappa\lambda}\left(x+\frac{1}{A}x'\right)\Psi^A_{\kappa\lambda'}\left(x'+\frac{1}{A}x\right)+\\ +\sum_\rho\left(\frac{A}{A+1}\right)^3\Psi^{A+1*}_{\lambda'\rho}(x)\,\Psi^{A+1}_{\lambda\rho}(x)=\delta_{\lambda\lambda'}\delta^3(x-x')\end{aligned} \quad (33)$$

folgt.

Die hier geschilderte Abspaltung der Schwerpunktsbewegung entspricht genau derjenigen, die bei KERMAN und KLEIN[3] vorgenommen

wurde. Die Gln. (29) sind aber im Gegensatz zu denen des verallgemeinerten Hartree-Fock-Verfahrens streng gültig.

4. Eliminationsverfahren

Wir wollen uns nunmehr der weiteren Behandlung des Gleichungssystems (29) zuwenden. Unser Ziel ist es, das unendliche Gleichungssystem durch ein endliches zu ersetzen.

Dazu gehen wir von der Tatsache aus, daß für einen vorgegebenen Zustand ρ des $A+1$-Teilchen-Systems im allgemeinen nur für wenige Zustände λ des A-Teilchensystems die Amplitude $\Psi^{A+1}_{\lambda\rho}(x)$ merklich von Null verschieden ist. Wir wollen die Menge dieser Zustände λ, die von ρ abhängt, mit $\mathfrak{M}_\rho$ bezeichnen. Die genauere Wahl von $\mathfrak{M}_\rho$ ist natürlich je nach dem betrachteten Kern und je nach Problemstellung verschieden und wir wollen uns an dieser Stelle noch nicht im einzelnen festlegen. Die zu $\mathfrak{M}_\rho$ komplementäre Zustandsmenge nennen wir $\overline{\mathfrak{M}}_\rho$.

Wir versuchen nun in dem Gleichungssystem (29) für $\lambda \in \mathfrak{M}_\rho$ die Summanden $\lambda' \in \overline{\mathfrak{M}}_\rho$ zu eliminieren.

Dazu bedienen wir uns einer Funktion $R^{A\rho}_{\lambda\lambda'}(x, x'; \omega)$, die der Gleichung genügt

$$\sum_{\lambda'' \in \overline{\mathfrak{M}}_\rho} \left\{ \left(\omega + \frac{1}{2m} \frac{A}{A+1} \Delta \right) \delta_{\lambda\lambda''} - U^A_{\lambda\lambda''}(x) \right\} R^{A\rho}_{\lambda''\lambda'}(x, x', \omega) = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(x - x') \quad \text{für} \quad \lambda, \lambda' \in \overline{\mathfrak{M}}_\rho . \tag{34}$$

Damit folgt aus (29)

$$\Psi^{A+1}_{\lambda\rho}(x) = \sum_{\lambda'' \in \overline{\mathfrak{M}}_\rho} \sum_{\lambda' \in \mathfrak{M}_\rho} \int d^3x' \, R^{A\rho}_{\lambda\lambda''}(x, x'; E^{A+1}_\rho - E^A_\lambda) \times \times U^A_{\lambda''\lambda'}(x') \, \Psi^{A+1}_{\lambda'\rho}(x') \quad \text{für} \quad \lambda \in \overline{\mathfrak{M}}_\rho \tag{35}$$

und

$$(E^{A+1}_\rho - E^A_\lambda) \, \Psi^{A+1}_{\lambda\rho}(x) = -\frac{1}{2m} \frac{A}{A+1} \Delta \Psi^{A+1}_{\lambda\rho}(x) + + \sum_{\lambda' \in \mathfrak{M}_\rho} \int d^3x' \, M^{A\rho}_{\lambda\lambda'}(x, x'; E^{A+1}_\rho) \, \Psi^{A+1}_{\lambda'\rho}(x') \quad \text{für} \quad \lambda \in \mathfrak{M}_\rho , \tag{36}$$

wobei

$$M^{A\rho}_{\lambda\lambda'}(x, x'; E^{A+1}_\rho) = U^A_{\lambda\lambda'}(x) \, \delta^3(x - x') + + \sum_{\lambda'', \lambda''' \in \overline{\mathfrak{M}}_\rho} U^A_{\lambda\lambda''}(x) \, R^{A\rho}_{\lambda''\lambda'''}(x, x'; E^{A+1}_\rho - E^A_{\lambda''}) \cdot U^A_{\lambda'''\lambda'}(x') \quad \lambda, \lambda' \in \mathfrak{M}_\rho \tag{37}$$

ist.

Das Gleichungssystem (36) korrespondiert den verallgemeinerten Hartree-Fock-Gleichungen von KERMAN und KLEIN in derselben Weise, in der die Dysongleichung der Hartree-Fock-Gleichung korrespondiert.

Das Gleichungssystem (36) ist exakt; der Massenoperator $M^{A\rho}_{\lambda\lambda'}(x,x';E^{A+1}_{\rho})$ ist aber nur bekannt, wenn zuvor das Gleichungssystem (34) gelöst wurde. Da (34) ein unendliches Gleichungssystem ist, besteht kaum Hoffnung auf eine exakte Lösung. Da aber andererseits in den Gln. (34) nur Zustände aus $\overline{\mathfrak{M}}_{\rho}$ vorkommen, die für die Berechnung der gesuchten Amplituden minder wichtig sind, genügt es, das System (34) näherungsweise, etwa mittels Störungstheorie zu behandeln. $\mathfrak{M}_{\rho}$ muß also so groß gewählt werden, daß einerseits die nichtstörungstheoretische Lösung der Gln. (36) durchführbar bleibt, andererseits die Störungstheoretische Behandlung der Gln. (34) gerechtfertigt ist.

Zur weiteren Behandlung von (34) definieren wir eine Funktion $\bar{R}^{A\rho}_{\lambda}(x,x';\omega)$ durch die Gleichung

$$\left(\omega+\frac{1}{2m}\frac{A}{A+1}\Delta\right)\bar{R}^{A\rho}_{\lambda}(x,x';\omega)+ \\ +\int d^3x''\,W^{A\rho}_{\lambda}(x\,x'';\omega)\,\bar{R}^{A\rho}_{\lambda}(x'',x';\omega) \\ =\delta^3(x-x') \quad \text{für} \quad \lambda\in\overline{\mathfrak{M}}_{\rho}. \tag{38}$$

Dabei sei W ein im allgemeinen nichtlokales und energieabhängiges hermitesches Potential, das so gewählt werden möge, daß es einen möglichst großen Anteil der Wirkung von $U^{A}_{\lambda\lambda''}$ in (34) berücksichtigt. In niedrigster Näherung kann man W als lokal, energieunabhängig und unabhängig von λ und ρ annehmen und gleich dem üblichen Schalenmodellpotential setzen.

Das Gleichungssystem (34) wird gelöst, wenn $R^{A\rho}_{\lambda\lambda'}(x,x';\omega)$ der Integralgleichung

$$R^{A\rho}_{\lambda\lambda'}(x,x';\omega) \\ =\delta_{\lambda\lambda'}\bar{R}^{A\rho}_{\lambda}(x,x';\omega)+\sum_{\lambda''\in\overline{\mathfrak{M}}_{\rho}}\int d^3x''\,d^3x'''\,\bar{R}^{A\rho}_{\lambda}(x,x'',\omega)\times \\ \times\left[U^{A}_{\lambda\lambda''}(x'')\delta(x''-x''')-\delta_{\lambda\lambda''}W^{A\rho}_{\lambda''}(x'',x''')\right]R^{A\rho}_{\lambda''\lambda'}(x''',x';\omega) \\ \lambda,\,\lambda'\in\overline{\mathfrak{M}}_{\rho} \tag{39}$$

genügt. Würde man (39) exakt lösen, so käme es auf die Wahl von W nicht an. Versucht man aber eine störungstheoretische Lösung durch die Neumannsche Reihe, so muß man W so wählen, daß die Konvergenz optimal wird. Statt durch Iteration kann man (39) auch näherungsweise durch die Ausführung von Partialsummationen zu lösen versuchen.

Durch die Gl. (38) wird $\bar{R}$ nicht vollständig definiert, wir müssen noch angeben, wie die Singularitäten zu behandeln sind. Dazu definieren wir einen Satz von Einteilchenfunktionen $\varphi_{\nu}(x)$ durch die Gleichung

$$-\frac{1}{2m}\frac{A}{A+1}\Delta\varphi^{A\lambda\rho\omega}_{\nu}(x)+\int d^3x'\,W^{A\rho}_{\lambda}(x,x',\omega)\varphi^{A\lambda\rho\omega}_{\nu}(x') \\ =\varepsilon_{\nu}\varphi^{A\lambda\rho\omega}_{\nu}(x) \tag{40}$$

Als Randbedingung wählen wir die üblichen Bedingungen für die Einteilchenfunktionen des realistischen Schalenmodells, also eines Schalenmodells, das auch Kontinuumszustände besitzt. Die Funktionen $\varphi_\nu^{A\rho\lambda\omega}(x)$ bilden einen vollständigen orthonormierten Satz. Im allgemeinen ist dieser Satz für verschiedene A, λ, ρ und ω verschieden. In niedrigster Näherung, in der wir W durch das gewöhnliche Schalenmodellpotential ersetzen, können wir für alle λ, ρ und ω den gleichen Funktionensatz φ_ν benutzen.

Die allgemeinste Lösung von (38) hat dann die Form

$$\begin{aligned}\bar{R}_\lambda^{A\rho}(x\,x';\omega)=\sum_\nu \frac{\varphi_\nu^{A\rho\lambda\omega}(x)\,\varphi_\nu^{A\rho\lambda\omega *}(x')\,z_\nu^{A\rho\lambda\omega}}{\omega-\varepsilon_\nu+i\eta}+\\ +\sum_\nu \frac{\varphi_\nu^{A\rho\lambda\omega}(x)\,\varphi_\nu^{A\rho\lambda\omega *}(x')}{\omega-\varepsilon_\nu-i\eta}\,(1-z_\nu^{A\rho\lambda\omega})\end{aligned} \tag{41}$$

mit beliebigen $z_\nu^{A\rho\lambda\omega}$.

Für die weitere Behandlung ist es zweckmäßig, in der durch die Funktionen $\varphi_\nu^{A\rho\lambda\omega}(x)$ gegebenen Basis zu arbeiten.

Wir erhalten aus (36)

$$\begin{aligned}(E_\rho^{A+1}-E_\lambda^A)\,\Psi_{\lambda\rho}^{A+1}(\nu)=-\frac{1}{2m}\,\frac{A}{A+1}\sum_{\nu'}\langle\nu|\,\Delta\,|\mu\rangle\,\Psi_{\lambda\rho}^{A+1}(\nu')+\\ +\sum_{\lambda'\in\mathfrak{M}_\rho}\sum_{\nu'} M_{\lambda\lambda'}^{A\rho}(\nu,\nu';E_\rho^{A+1})\,\Psi_{\lambda'\rho}^{A+1}(\nu')\end{aligned} \tag{42}$$

$$\lambda\in\mathfrak{M}_\rho,$$

wobei wir

$$\Psi_{\lambda\rho}^{A+1}(\nu)=\int d^3x\,\varphi_\nu^{A\rho\lambda\omega *}(x)\,\Psi_{\lambda\rho}^{A+1}(x) \tag{43}$$

gesetzt haben. ω ist dabei gleich $E_\rho^{A+1}-E_\lambda^A$ zu wählen. Analog ist

$$\begin{aligned}&M_{\lambda\lambda'}^{A\rho}(\nu,\nu',E_\rho^{A+1})\\ &\quad=\int d^3x\,d^3x'\,\varphi_\nu^{A\rho\lambda\omega *}(x)\,M_{\lambda\lambda'}^{A\rho}(x,x';E_\rho^{A+1})\,\varphi_{\nu'}^{A\rho\lambda'\omega'}(x')\end{aligned} \tag{44}$$

$$\lambda,\ \lambda'\in\mathfrak{M}_\rho,$$

wobei

$$\begin{aligned}\omega&=E_\rho^{A+1}-E_\lambda^A\\ \omega'&=E_\rho^{A+1}-E_{\lambda'}^A\end{aligned} \tag{45}$$

zu setzen ist.

In niedrigster Näherung erhalten wir

$$\begin{aligned}M_{\lambda\lambda'}^{A\rho}(\nu,\nu';E_\rho^{A+1})=U_{\lambda\lambda'}^A(\nu,\nu')+\\ +\sum_{\lambda''}\sum_{\nu''}U_{\lambda\lambda''}^A(\nu,\nu'')\left\{\frac{z_{\nu''}^{A\rho\lambda''\omega''}}{\omega-\varepsilon_{\nu''}+i\eta}+\frac{1-z_{\nu''}^{A\rho\lambda''\omega''}}{\omega-\varepsilon_{\nu''}-i\eta}\right\}U_{\lambda''\lambda'}^A(\nu'',\nu'),\end{aligned} \tag{46}$$

wobei

$$\omega'' = E_\rho^{A+1} - E_{\lambda''}^{A}$$

zu setzen ist und

$$U_{\lambda\lambda'}^{A}(\nu,\nu') = \int d^3x\, \varphi_\nu^{A\rho\lambda\omega *}(x)\, U_{\lambda\lambda'}^{A}(x)\, \varphi_{\nu'}^{A\rho\lambda'\omega'}(x) \tag{47}$$

bedeutet. ω und ω' sind wieder wie in (45) zu wählen.

Alle bisherigen Überlegungen waren völlig allgemein und sind unabhängig davon, ob der interessierende Zustand des $A+1$-Teilchensystems, der durch die Quantenzahlen ρ charakterisiert wird, ein diskreter oder ein Kontinuumszustand ist. Die spezielle Problemstellung wirkt sich nur auf die Wahl der Zustandsmenge $\mathfrak{M}_\rho$ und der Koeffizienten $z_\nu^{A\rho\lambda\omega}$ aus.

In der Theorie der Kernreaktionen ist der Zustand ρ ein Kontinuumszustand, bei dem ein Nukleon auf den Zielkern einfällt, der sich normalerweise im Grundzustand befindet. In diesem Fall wird man die Zustandsmenge so wählen, daß sie zumindest alle Zustände des Zielkerns enthält, die durch die Reaktion angeregt werden können und alle diejenigen diskreten Zustände, die sich in guter Näherung in der Schalenmodellvorstellung als diskrete Einteilchen-Einlochzustände interpretieren lassen.

Die Lösung der Gleichungssystems (42) kann nun in engster Analogie zu dem Vorgehen von WEIDENMÜLLER in der Schalenmodelltheorie der Kernreaktionen erfolgen. Wir wollen deshalb darauf verzichten, diese Überlegungen hier explizit zu wiederholen. Der Zusammenhang der Amplituden $\Psi_{\lambda\rho}^{A+1}(\nu)$ mit der Streumatrix ist – wie schon in Abschnitt 2 erwähnt – etwas komplizierter als in der üblichen Schalenmodelltheorie. Die Diskussion dieses Punktes, der nur dann von praktischer Bedeutung ist, wenn entweder Teilchenemission stattfinden kann oder aber die diskreten Zustände des Zielkerns sich nicht in guter Näherung durch eine Linearkombination von gebundenen Schalenmodellzuständen approximieren lassen, soll an anderer Stelle erfolgen.

Den Herren Prof. Dr. W. BRENIG und Prof. Dr. H.J. MANG danke ich für wertvolle Diskussionen.

Anhang

A. Einfluß einer äußeren Störung

Wir wollen annehmen, daß der Kern durch eine äußere Wechselwirkung $H'(t)$ gestört werde. Die Störung, die zeitabhängig sein kann, habe die Form

$$H'(t) = \sum_{\alpha\beta} \langle\alpha|\, V(t)\,|\beta\rangle\, a_\alpha^+ a_\beta\,. \tag{A.1}$$

Wir suchen Lösungen $|Ant\rangle$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$i\frac{\partial}{\partial t}\,|Ant\rangle = \big(H + H'(t)\big)\,|Ant\rangle\,, \tag{A.2}$$

die zur Zeit $t=t_0$ mit den stationären Lösungen $|An\rangle$ von H übereinstimmen.

Mit dem Ansatz

$$|A\,n\,t\rangle = e^{-i\,H\,(t-t_0)}\,U_W(t,t_0)\,|A\,n\rangle \tag{A.3}$$

folgt für $U_w(t, t_0)$ die Integralgleichung

$$U_W(t,t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} dt'\,H_{\mathrm{int}}(t')\,U_W(t',t_0) \tag{A.4}$$

mit

$$H_{\mathrm{int}}(t) = e^{i\,H\,(t-t_0)}\,H'(t)\,e^{-i\,H\,(t-t_0)}. \tag{A.5}$$

Eine formale Lösung von (A.4) ist

$$U_W(t,t_0) = T\left\{e^{-i\int_{t_0}^{t} dt'\,H_{\mathrm{int}}(t')}\right\}. \tag{A.6}$$

Dabei ist T das Zeitordnungssymbol.

Wir führen zeitabhängige Operatoren ein

$$\begin{aligned} a_\alpha(t) &= e^{i\,H\,(t-t_0)}\,a_\alpha\,e^{-i\,H\,(t-t_0)} \\ b_\alpha(t) &= U_W^{+}(t,t_0)\,a_\alpha(t)\,U_W(t,t_0). \end{aligned} \tag{A.7}$$

Diese genügen dann den Bewegungsgleichungen

$$i\frac{\partial}{\partial t}\,a_\alpha(t) = \sum_\beta \langle\alpha|\,t\,|\beta\rangle\,a_\beta(t) + \sum_{\beta\,\gamma\,\delta}\langle\alpha\,\gamma|\,v\,|\beta\,\delta\rangle\,a_\gamma^{+}(t)\,a_\delta(t)\,a_\beta(t) \tag{A.8}$$

bzw.

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\,b_\alpha(t) = \sum_\beta \langle\alpha|\,t\,|\beta\rangle\,b_\beta(t) + \sum_{\beta\,\gamma\,\delta}\langle\alpha\,\gamma|\,v\,|\beta\,\delta\rangle\,b_\gamma^{+}(t)\,b_\delta(t)\,b_\beta(t) + \\ + \sum_\beta \langle\alpha|\,V(t)\,|\beta\rangle\,b_\beta(t). \end{aligned} \tag{A.9}$$

Wir gehen nunmehr in die Ortsdarstellung und unterdrücken aus Bequemlichkeitsgründen Spin- und Isospinindizes. Wählen wir speziell

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{x},t) = \Big\{ -\dot{f}(\boldsymbol{x},t) + \frac{i}{m}\,(\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x},t))\cdot\boldsymbol{\nabla} + \\ + \frac{i}{2m}\,(\Delta f(\boldsymbol{x},t)) - \frac{1}{2m}\,(\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x},t))^2 \Big\}, \end{aligned} \tag{A.10}$$

wobei $f(\boldsymbol{x}, t)$ eine beliebige reelle Funktion sein kann, die nur der Bedingung unterworfen ist, daß sie zur Zeit $t = t_0$ verschwindet, so ist bei lokaler Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung

$$b(\boldsymbol{x},t) = e^{i\,f(\boldsymbol{x},t)}\,a(\boldsymbol{x},t) \tag{A.11}$$

eine Lösung von (A.9), wenn $a(\boldsymbol{x}, t)$ die Gl. (A.8) löst. Da $f(\boldsymbol{x}, t_0) = 0$ ist, erfüllt (A.11) auch die Anfangsbedingung. Damit erhalten wir aus (A.11) und (A.7)

$$\begin{aligned} \langle A\,n|\,b(\boldsymbol{x},t)\,|A+1\,j\rangle &= e^{i\,f(\boldsymbol{x},t)}\,\langle A\,n|\,a(\boldsymbol{x},t)\,|A+1\,j\rangle \\ &= \langle A\,n|\,U_w^{+}(t,t_0)\,a(\boldsymbol{x},t)\,U_w(\boldsymbol{x},t_0)\,|A+1\,j\rangle, \end{aligned} \tag{A.12}$$

wobei $U_w(t, t_0)$ mit dem durch (A.10) gegebenen Wert von V gebildet wird.

Wenn wir (A.12) in f linearisieren, so erhalten wir

$$\langle An|\, a(\boldsymbol{x},t)\,|A+1j\rangle\, f(\boldsymbol{x},t) = \int_{t_0}^{t} dt'\, \langle An|\,[H_{\mathrm{int}}(t'), a(\boldsymbol{x},t)]_-\,|A+1j\rangle \tag{A.13}$$

mit

$$H_{\mathrm{int}}(t)=\int d^3\boldsymbol{x}\, a^+(\boldsymbol{x},t)\left[-\dot{f}(\boldsymbol{x},t)+\frac{i}{m}(\nabla f(\boldsymbol{x},t))\cdot\nabla + \frac{i}{2m}(\Delta f(\boldsymbol{x},t))\right] a(\boldsymbol{x},t). \tag{A.14}$$

Wir entwickeln nach FOURIER

$$f(\boldsymbol{x},t)=\int d^3\boldsymbol{q}\int d\omega\, f(\boldsymbol{q},\omega)\, e^{i(\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{A.15}$$

und erhalten, wenn wir zur Schalenmodelldarstellung zurückkehren

$$\begin{aligned}&\int d^3\boldsymbol{q}\int d\omega\, f(\boldsymbol{q},\omega)\sum_{\beta}\langle\alpha|\, e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\,|\beta\rangle\,\langle An|\, a_\beta(t)\,|A+1j\rangle\, e^{-i\omega t}\\ &=i\int d^3\boldsymbol{q}\int d\omega\, f(\boldsymbol{q},\omega)\int_{t_0}^{t} e^{-i\omega t'}\,dt'\times\\ &\times\sum_{\gamma\delta}\langle\gamma|\, e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\left(\omega-\frac{q^2}{2m}+\frac{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{V}}{m}\right)|\delta\rangle\times\\ &\times\langle An|\,[a_\gamma^+(t')\,a_\delta(t'), a_\alpha(t)]_-\,|A+1j\rangle.\end{aligned} \tag{A.16}$$

Wir bilden den $\lim t_0\to-\infty$. Dann ist die Anfangsbedingung $f(\boldsymbol{x},t_0)=0$, wenn wir ω durch $\omega+i\eta$ ersetzen, für beliebige $f(\boldsymbol{q},\omega)$ erfüllt. Da $f(\boldsymbol{x},t)$ im übrigen beliebig ist, folgt aus (A.16)

$$\begin{aligned}&\sum_{\beta}\langle\alpha|\, e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\,|\beta\rangle\,\langle An|\, a_\beta(t)\,|A+1j\rangle\, e^{-i(\omega+i\eta)t}\\ &=i\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{-i(\omega+i\eta)t'}\sum_{\gamma\delta}\langle\gamma|\, e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\left(\omega-\frac{q^2}{2m}+\frac{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{V}}{m}\right)|\delta\rangle\times\\ &\times\langle An|\,[a_\gamma^+(t')\,a_\delta(t'), a_\alpha(t)]_-\,|A+1j\rangle.\end{aligned} \tag{A.17}$$

Durch Bildung der Zeitableitung nach t, Einschieben von Zwischenzuständen und Ausführung der Zeitintegration über t' erhalten wir

$$\begin{aligned}&\sum_{\beta}\langle\alpha|\, e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\,|\beta\rangle\,(\omega+E_j^{A+1}-E_n^A)\,\langle An|\, a_\beta\,|A+1j\rangle\\ &=\sum_{\gamma\delta}\langle\gamma|\, e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\left(\omega-\frac{q^2}{2m}+\frac{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{V}}{m}\right)|\delta\rangle\left\{\delta_{\alpha\gamma}\langle An|\, a_\delta\,|A+1j\rangle+\right.\\ &+\sum_{n'}\frac{E_j^{A+1}-E_{n'}^A}{E_n^A-E_{n'}^A-\omega-i\eta}\langle An|\, a_\gamma^+\, a_\delta\,|An'\rangle\,\langle An'|\, a_\alpha\,|A+1j\rangle-\\ &\left.-\sum_{j'}\frac{E_{j'}^{A+1}-E_n^A}{E_{j'}^{A+1}-E_j^{A+1}-\omega-i\eta}\langle An|\, a_\alpha\,|A+1j'\rangle\,\langle A+1j'|\, a_\gamma^+\, a_\delta\,|A+1j\rangle\right\}\end{aligned} \tag{A.18}$$

und dies ist identisch mit der Gl. (15) im Text.

B. Gleichungen für die lokalisierten Amplituden

Aus der Relation (27) folgt

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}\Delta\, X^{A+1}_{\lambda \mathbf{K},\rho\mathbf{Q}}(\boldsymbol{x})\\
&=-\frac{1}{2m}\Delta\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{R}\, e^{-i\mathbf{K}\mathbf{R}}\, e^{i\frac{\mathbf{K}}{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{R})}\, e^{i\mathbf{Q}\mathbf{R}}\,\Psi^{A+1}_{\lambda\rho}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{R})\\
&=-\frac{1}{2m}\Delta\left(\frac{A}{A+1}\right)^3\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{R}\, e^{i\left(\frac{A}{A+1}\mathbf{Q}-\mathbf{K}\right)\mathbf{R}}\, e^{i\frac{\mathbf{K}}{A}\boldsymbol{x}}\,\Psi^{A+1}_{\lambda\rho}\left(\boldsymbol{x}-\frac{A}{A+1}\boldsymbol{R}\right)\\
&=-\frac{1}{2m}\left(\frac{A}{A+1}\right)^3\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{R}\, e^{i\left(\frac{A}{A+1}\mathbf{Q}-\mathbf{K}\right)\mathbf{R}}\, e^{i\frac{\mathbf{K}}{A}\boldsymbol{x}}\\
&\quad\times\left\{-\frac{K^2}{A^2}+2i\frac{\mathbf{K}}{A}\nabla+\Delta\right\}\Psi^{A+1}_{\lambda\rho}\left(\boldsymbol{x}-\frac{A}{A+1}\boldsymbol{R}\right)\\
&=-\frac{1}{2m}\left(\frac{A}{A+1}\right)^3\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{R}\, e^{i\left(\frac{A}{A+1}\mathbf{Q}-\mathbf{K}\right)\mathbf{R}}\, e^{i\frac{\mathbf{K}}{A}\boldsymbol{x}}\times\\
&\quad\times\left\{-\frac{K^2}{A^2}-2i\frac{\mathbf{K}}{A}\frac{A+1}{A}\nabla_{\boldsymbol{R}}+(1-\beta)\Delta+\left(\frac{A+1}{A}\right)^2\beta\Delta_{\boldsymbol{R}}\right\}\Psi^{A+1}_{\lambda\rho}\left(\boldsymbol{x}-\frac{A}{A+1}\boldsymbol{R}\right)\\
&=-\frac{1}{2m}\left(\frac{A}{A+1}\right)^3\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{R}\, e^{i\left(\frac{A}{A+1}\mathbf{Q}-\mathbf{K}\right)\mathbf{R}}\, e^{i\frac{\mathbf{K}}{A}\boldsymbol{x}}\times\\
&\quad\times\left\{-\frac{K^2}{A^2}-2\frac{A+1}{A}\frac{\mathbf{K}}{A}\left(\frac{A}{A+1}\mathbf{Q}-\mathbf{K}\right)+(1-\beta)\Delta-\right.\\
&\quad\left.-\beta\left(\frac{A+1}{A}\right)^2\left(\frac{A}{A+1}\mathbf{Q}-\mathbf{K}\right)^2\right\}\Psi^{A+1}_{\lambda\rho}\left(\boldsymbol{x}-\frac{A}{A+1}\boldsymbol{R}\right).
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

Dies gilt für beliebige Werte von β. Wir wählen

$$\beta=\frac{1}{A+1}$$

Dann folgt

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}\Delta\, X^{A+1}_{\lambda \mathbf{K},\rho\mathbf{Q}}(\boldsymbol{x})\\
&=-\frac{1}{2m}\left(\frac{A}{A+1}\right)^3\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{R}\, e^{i\left(\frac{A}{A+1}\mathbf{Q}-\mathbf{K}\right)\mathbf{R}}\, e^{i\frac{\mathbf{K}}{A}\boldsymbol{x}}\times\\
&\quad\times\left\{-\frac{\mathbf{Q}^2}{A+1}+\frac{K^2}{A}+\frac{A}{A+1}\Delta\right\}\Psi^{A+1}_{\lambda\rho}\left(\boldsymbol{x}-\frac{A}{A+1}\boldsymbol{R}\right).
\end{aligned}
\tag{B.2}
$$

Andererseits folgt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\kappa\lambda'}\int d^3q\, d^3K \int d^3x'\, v(x-x')\, X^{A\,*}_{\kappa q,\lambda K}(x')\, X^{A}_{\kappa q,\lambda' K'}(x')\cdot X^{A+1}_{\lambda' K',\rho Q}(x)\\
&=\sum_{\kappa\lambda'}\frac{1}{(2\pi)^9}\int d^3q\, d^3K' \int d^3x'\, v(x-x')\int d^3R\, d^3R'\, d^3R''\times\\
&\quad\times e^{iqR'}\, e^{-i\frac{q}{A-1}(x'-R')}\, e^{-iKR'}\, e^{-iqR''}\, e^{i\frac{q}{A-1}(x'-R'')}\times\\
&\quad\times e^{iK'R''}\, e^{-iK'R}\, e^{i\frac{K'}{A}(x-R)}\, e^{iQR}\, \Psi^{A\,*}_{\kappa\lambda}(x'-R')\times\\
&\quad\times \Psi^{A}_{\kappa\lambda'}(x'-R'')\, \Psi^{A+1}_{\lambda'\rho}(x-R)\\
&=\sum_{\kappa\lambda'}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x'\, v(x-x')\int d^3R\, d^3R'\, d^3R''\times\\
&\quad\times\delta^3\left(R'-\frac{1}{A-1}(x'-R')-R''+\frac{1}{A-1}(x'-R'')\right)\times\\
&\quad\times\delta^3\left(R''-R+\frac{1}{A}(x-R)\right)e^{-iKR'}\, e^{iQR}\times\\
&\quad\times\Psi^{A\,*}_{\kappa\lambda}(x'-R')\,\Psi^{A}_{\kappa\lambda'}(x'-R'')\,\Psi^{A+1}_{\lambda'\rho}(x-R)\\
&=\sum_{\kappa\lambda'}\frac{1}{(2\pi)^3}\left(\frac{A-1}{A}\right)^3\int d^3R\int d^3x'\, v(x-x')\, e^{i(Q-K)R}\, e^{i\frac{K}{A}(x-R)}\times\\
&\quad\times\Psi^{A\,*}_{\kappa\lambda}\left(x'-R+\frac{1}{A}(x-R)\right)\Psi^{A}_{\kappa\lambda'}\left(x'-R+\frac{1}{A}(x-R)\right)\Psi^{A+1}_{\lambda'\rho}(x-R)\\
&=\left(\frac{A}{A+1}\right)^3\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3R\, e^{i\left(\frac{A}{A+1}Q-K\right)R}\, e^{i\frac{K}{A}x}\times\\
&\quad\times\sum_{\kappa\rho}\left(\frac{A-1}{A}\right)^3\int d^3x'\, v\left(\frac{A+1}{A}x-x'\right)\times\\
&\quad\times\Psi^{A\,*}_{\kappa\lambda}(x'-R)\,\Psi^{A}_{\kappa\lambda'}(x'-R)\,\Psi^{A+1}_{\lambda'\rho}\left(x-\frac{A}{A+1}R\right).
\end{aligned}
\tag{B.3}
$$

Außerdem ist

$$
\begin{aligned}
X^{A+1}_{\lambda K,\rho Q}(x)=&\left(\frac{A}{A+1}\right)^3\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3R\, e^{i\left(\frac{A}{A+1}Q-K\right)R}\, e^{i\frac{K}{A}x}\times\\
&\times\Psi^{A+1}_{\lambda\rho}\left(x-\frac{A}{A+1}R\right).
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

Setzen wir (B.2), (B.3) und (B.4) in (8) ein, so folgt (29), da Q und K beliebig gewählt werden können.

Zeitschrift für Physik 202, 236–254 (1967)

Shell Structure Studies in the Titanium Region with 52 MeV Deuterons

F. HINTERBERGER*, G. MAIRLE, U. SCHMIDT-ROHR, P. TUREK, and G. J. WAGNER

K. F. A. Jülich und Max-Planck-Institut für Kernphysik, Heidelberg

Received March 3, 1967

The $(d, {}^3He)$-reactions on the target nuclei $^{48,50}Ti$ and ^{51}V have been studied with 52 MeV deuterons. The data were analyzed by means of the DWBA which is shown to be applicable at this energy. All our results agree well with the assumption of pure $(f_{7/2})^n$ proton configurations for these nuclei.

The inelastic scattering of 52 MeV deuterons from the lowest 2^+ state in ^{48}Ti has been described in terms of the collective model as well as of the microscopic shell model. Good fits to the measured angular distributions have been obtained with reasonable values for the deformation parameters and the basic nucleon-nucleon interaction.

1. Introduction

From its origin[1] the shell model has had its greatest success near closed shell nuclei. With increasis amount of experimental data and improved methods of analysing the concept of closed shells has become more and more weakened. For example in ^{40}Ca configuration admixtures had to be regarded[2,3]. There was, however, evidence for closed shells in ^{48}Ca. Recently the description of odd-even $f_{7/2}$ shell nuclei in terms of a Coriolis coupling model[4] with deformed potential well has been suggested. Since the ^{50}Ti nucleus has a great importance by generating the matrix elements of the proton-proton residual interaction for effective interaction[5] shell model calculations in the $f_{7/2}$-shell, it seemed worthwhile to investigate its configuration purity by means of the $(d, {}^3He)$ reaction with 52 MeV deuterons. The $(d, {}^3He)$ reaction on several Titanium isotopes has been measured at 22 MeV[6] in a small angular

* On leave from Institut für Strahlen- und Kernphysik der Universität Bonn.

[1] GOEPPERT-MAYER, M.: Phys. Rev. **75**, 1969 (1949). — GOEPPERT-MAYER, M., and J. H. D. JENSEN: Elementary theory of nuclear shell structure. New York: John Wiley & Sons 1955. — HAXEL, O., J. H. D. JENSEN, and H. E. SUESS: Phys. Rev. **75**, 1766 (1949); — Z. Physik **128**, 295 (1950).

[2] BOCK, R., H. H. DUHM, and R. STOCK: Phys. Letters **18**, 61 (1965). — GILLET, V., and E. A. SANDERSON: Nuclear Phys. A **91**, 292 (1967).

[3] NEWMAN, E., R. H. BASSEL, and J. C. HIEBERT: Bull. Am. Phys. Soc. **11**, 64 (1966).

[4] SCHOLZ, W., and F. B. MALIK: Phys. Rev. **147**, 836 (1966). — MALIK, F. B., and W. SCHOLZ: Phys. Rev. **150**, 919 (1966).

[5] TALMI, I.: Revs. Modern Phys. **34**, 704 (1962).

[6] YNTEMA, J. L., and G. R. SATCHLER: Phys. Rev. **134**, B 976 (1964).

range with partially inconclusive results. In addition a systematic study of this reaction on a number of $N=28$ nuclei with 34 MeV deuterons has been reported[3]. But the increasing reliability of DWBA analysis at higher deuteron energies, which we shall recognize in case of the $^{51}V(d, {}^3He)$ reaction, made a study with 52 MeV deuterons highly desirable. The improvement obtained with higher energies results from a reduced Coulomb interference and Q-value dependence of DWBA calculations.

After having confirmed the pure shell model behaviour of the Titanium nuclei, it suggested itself to try a shell model description of our results on inelastic deuteron scattering from these nuclei. Previously the collective model has been preferred to analyse the inelastic scattering. In the last years the shell model theory has successfully described the inelastic scattering of 17.5 MeV protons[7]. Recently this microscopic description of inelastic scattering has been extended to complex projectile particles[8].

In section 2 we briefly review the DWBA method. In the following section we report on the experimental procedure in short, a detailed description of our scattering chamber has been given in a previous paper[9]. Sections 4 and 5 contain the experimental results and the conclusions.

2. Method of Analysis

The distorted wave theory of direct nuclear reactions[10] of type $A(a, b)B$ is based on the following form of the approximate transition amplitude

$$T=\int d\boldsymbol{r}_{aA}\int d\boldsymbol{r}_{bB}\,\chi^{*(-)}(\boldsymbol{k}_b, \boldsymbol{r}_{bB})\,\langle bB|\,V\,|aA\rangle\,\chi^{(+)}(\boldsymbol{k}_a, \boldsymbol{r}_{aA}). \qquad (1)$$

The $\chi^{(\pm)}$ are distorted waves of particle a incident with relative momentum $\boldsymbol{k}_a$ and particle b emitted with relative momentum $\boldsymbol{k}_b$. In practice they are generated from optical model potentials such as describe the observed elastic scattering. The remaining factor in Eq. (1) is the matrix element taken between the internal states of the colliding pairs, which plays the role of an effective interaction for scattering from one elastic state to another. Using the "zero-range" approximation, $\boldsymbol{r}_{bB}=(M_A/M_B)\,\boldsymbol{r}_{aA}$, which is automatically satisfied for inelastic scattering if one excludes exchange effects, the internal matrix element comes out in

[7] Funsten, H. O., N. R. Roberson, and E. Rost: Phys. Rev. **134**, B 117 (1964).

[8] Satchler, G. R.: Nuclear Phys. **77**, 481 (1966), and ref. cited.

[9] Duelli, B., G. Mairle, U. Schmidt-Rohr, P. Turek u. G. J. Wagner: Z. Naturforsch. **21a**, 969 (1966).

[10] Bassel, R. H., R. M. Drisko, and G. R. Satchler: ORNL-3240. — Satchler, G. R.: Nuclear Phys. **55**, 1 (1964).

the form (2).

$$\langle bB|\,V\,|aA\rangle = \sum_{lsj} C_{lsj}\, A_{lsj}\, f_{lsj}(r_{aA})\, Y_l^{m*}(\hat{r}_{aA}) \tag{2}$$

where C_{lsj} stands for products of Clebsch-Gordan coefficients, describing the spin and angular momentum transfer (l, s, j) in the reaction. The main information on the process is contained within the factor $A_{lsj} f_{lsj}(r)$. The separation into a coefficient A and the form factor $f_{lsj}(r)$ with simple normalization is one of convenience. The form factor $f(r)$ is available as an option for the most frequent cases in the DWBA code JULIE* which we have used. The coefficient $|A|^2$ contains essentially the strength of the transition which becomes clear from the final form of the DWBA calculations

$$(d\sigma(\theta)/d\Omega)_{lsj} = |A_{lsj}|^2\, \sigma_{lsj}(\theta, E, Q, f(r), \ldots). \tag{3}$$

σ_{lsj} is the DWBA cross section, as calculated by the code JULIE, which depends on the kinematics of the reaction and of course on the type of form factor. Comparison between the experimental angular distributions, which correspond to the left hand side of Eq. (3) and σ_{lsj} determines the strength factor $|A|^2$.

The different form factors and the physical meaning of the strength factor have to be discussed separately for $(d, {}^3\mathrm{He})$-reactions and inelastic deuteron scattering, the latter being described in terms as well of the collective as of the shell model.

$(d, {}^3\mathrm{He})$ *Reaction*

An outline for the DWBA analysis of $(d, {}^3\mathrm{He})$ reactions has been given by HIEBERT et al.[11]. They show that Eq. (3) takes the form

$$(d\sigma(\theta)/d\Omega)_{lj} = 2.95\, S_{lj}\, \sigma_{lj}(\theta) \tag{4}$$

in this case. The coefficient 2.95 contains essentially the overlap of the $d+p$ and ${}^3\mathrm{He}$ systems. It has been evaluated in a finite range procedure by BASSEL[12] using the Hulthén wave function for the deuteron and the Irving-Gunn wave function for the ${}^3\mathrm{He}$ system. The spectroscopic factor S_{lj} is discussed below. The form factor to be used in transfer reactions is just the radial part of the wave function of the transferred nucleon[10], if the zero-range approximation is made. The orbital is considered to be an eigenfunction of a Woods-Saxon well with the binding energy equal to the separation energy. This choice of the binding energy, which is by no means unique[11], has the advantage of yielding eigenfunctions with correct asymptotic shape. As the contribution of the

* We are greatly indebted to Dr. R. M. DRISKO for making this code available to us.

[11] HIEBERT, J. C., E. NEWMAN, and R. H. BASSEL: Phys. Rev. (in press).

[12] BASSEL, R. H.: Phys. Rev. **149**, 791 (1966).

nuclear interior to the transition amplitude is very small at 50 MeV, we believe that this choice of the binding energy is affected by the smallest error.

Now it has been demonstrated that there is good reason for believing that the optical model as well as the shell model wells are nonlocal[13]. Moreover an exact evaluation of the amplitude (1) prohibits the zero range assumption. Both effects, finite range and nonlocality, can be approximately treated by introducing radial dependent damping factors $N(r)$ and $A(r)$[13,14] to the bound state and optical model wave functions. These corrections obtained from the local energy approximation (LEA) tend to reduce the wave functions in the interior of the nucleus similar to the familiar cut-off procedure. In the present study we have found that the LEA corrections have little effect on the form of the angular distributions at 50 MeV. Therefore we suppress the discussion of their explicit form. Moreover from HIEBERT et al.[11] we may take it for granted that the simple local, zero range form of the DWBA results in spectroscopic factors which are in closer agreement to the shell model expectations than the more elaborate procedures.

The spectroscopic factors are extracted following Eq. (4). They may be defined as

$$S_{lj}=|\langle A+1,\alpha \| a_{nlj}^{(p)+} \| A,\beta\rangle|^2 \tag{5}$$

i.e. they are the squared reduced matrix elements of the operator creating a proton in shell model orbit (n, l, j) taken between the target ground state $(A+1, \alpha)$ and the residual nucleus (A) in the final state β. We should note that we need not use the isospin formalism here as one reaches states of unique isospin in proton pick-up reactions.

We shall make use of the explicit form of the spectroscopic factor in the simple case of dealing with n protons in the $f_{7/2}$ shell all other nucleons forming an inert core with zero spin. In this case we have[15]

$$S(f_{\frac{7}{2}})=n\big((f_{\frac{7}{2}})^n J_i\{|(f_{7/2})^{n-1} J_f\big)^2 \tag{6}$$

for the transition from a nucleus $(A+1)$ with spin J_i to a state in nucleus A with spin J_f. The term in braces in (6) is the coefficient of fractional parentage as given by [16]. Besides we shall frequently use a simple sum rule[15] which states that in pick-up reactions the sum of the spectroscopic factors with the same (l, j)-transfer taken over all final states equals the

---

[13] PEREY, F. G., and D. S. SAXON: Phys. Letters **10**, 107 (1964), and to be published.

[14] BENCZE, G., and J. ZIMANYI: Phys. Letters **9**, 246 (1964). — BUTTLE, P. J. A., and L. J. B. GOLDFARB: Proc. Phys. Soc. (London) **83**, 701 (1964).

[15] MACFARLANE, M. H., and J. B. FRENCH: Revs. Modern Phys. **32**, 567 (1960).

[16] EDMONDS, A. R., and B. H. FLOWERS: Proc. Phys. Soc. (London) A **214**, 515 (1952). — BAYMAN, B. F., and A. LANDE: Nuclear Phys. **77**, 1 (1966).

number of protons filling the (n, l, j) subshell:

$$(J_f)\sum S_{ij} = n_{ij}. \tag{7}$$

The validity of this rule for the simple case discussed above may be readily obtained from Eq. (6).

Inelastic Scattering, Collective Model

It has often been noticed that collective states are preferentially excited by inelastic deuteron scattering. In reaction theories of inelastic scattering[17] these collective states are described as rotational states of a permanently deformed nucleus with deformation parameter β_l as defined in [18] or as vibrational states with an equivalent average deformation. The inelastic scattering is assumed to be induced by interaction of the deuterons with a deformed potential $V(r, \beta)$. The first order term of the theory gives a form factor $f(r)$ which is proportional to $dV(r)/dr$ and a strength factor $A_l = \beta_l$. $V(r)$ is usually derived from the real or complex part of the optical potential describing the elastic deuteron scattering, procedures which shall be referred to as real and complex coupling, respectively. Thus Eq. (3) takes on the form

$$(d\sigma(\theta)/d\Omega)_l = \beta_l^2 \, \sigma_l(\theta) \tag{8}$$

as long as spin flip terms are neglected. The β_l values thus obtained may be compared with the results of Coulomb excitation measurements[19].

Inelastic Scattering, Shell Model

The collective description of inelastic scattering though undoubtedly very successful is not very satisfactory as being a phenomenological one. Recently the microscopic theory[8] of inelastic scattering has been developed. The aim of this theory is to describe the interaction by a sum of two body forces v_{ia} between the nucleons of the projectile a and the target nucleons i

$$V = \sum_i v_{ia} - U \tag{9}$$

where V stands for the interaction in (1). The optical potential U is diagonal in the nuclear states and doesn't contribute to the inelastic scattering. The assumption of a two body interaction between the center of gravity of the deuteron and the target nucleus is phenomenological in some sense, too. As the deuteron has isospin zero and as it may be shown that for the case of $(f_{7/2})^2_{0^+ 2^+}$ transitions – which we shall

[17] BASSEL, R. H., G. R. SATCHLER, R. M. DRISKO, and E. ROST: Phys. Rev. **128**, 2693 (1962).

[18] BLAIR, J. S.: Phys. Rev. **115**, 928 (1959).

[19] OWEN, L. W., and G. R. SATCHLER: Nuclear Phys. **51**, 155 (1964).

regard – spin flip terms do vanish, the ansatz for this interaction contains only a Wigner term (tensor forces are disregarded)

$$v_{id} = -V_d \cdot \bar{g}(|r_i - r_d|).$$

Now SATCHLER has studied the question how v_{id} may be obtained from the Wigner term of the basic nucleon-nucleon potential

$$v_{in} = -V_N \cdot g(|r_i - r_n|).$$

The main effect of the averaging of v_{in} over the internal wave function of the deuteron is a slight reduction of V_d below $2V_N$ and an increase of the range. If one uses for the sake of simplicity a Gaussian type nucleon-nucleon interaction and a harmonic oscillator $1S$ state for the deuteron

$$g(\rho) = \exp(-\gamma^2 \rho^2) \quad \text{and} \quad \Phi_d(\varepsilon) = C \exp(-\varepsilon^2/a^2) \quad \text{with} \quad \rho = |r_i - r_n| \tag{10}$$

one obtains

$$\begin{aligned} V_d &= 2V_n(1+\tfrac{1}{8}\gamma^2 a^2)^{-\frac{3}{2}} \\ \bar{g}(|r_i - r_d|) &= \bar{g}(r) = \exp\{-\gamma^2(1+\tfrac{1}{8}\gamma^2 a^2)^{-1} r^2\}. \end{aligned} \tag{11}$$

If we again confine the discussion to the case of $(f_{7/2})^2_{0^+ \to 2^+}$ transition, i.e. the recoupling of two equivalent nucleons, the form factor is according to[8]

$$I_{l=2}(r) = \int_0^\infty \bar{g}_2(r_i, r)\, u^2_{7/2}(r_i)\, r_i^2\, dr_i \tag{12}$$

where $u_{7/2}(r)$ stands for the radial part of the $f_{7/2}$-shell model wave function, and $\bar{g}_2$ is the quadrupole term of the Gaussian force assumed. The strength factor A contains besides the potential depth V_d the matrix element of the spherical harmonic $Y_{l=2}$ between the connected nuclear states.

3. Experimental Procedure

The experiments have been performed with the 52 MeV deuterons from the external beam of the Karlsruhe cyclotron. The energy of the beam has been determined using the "cross-over" technique i.e. the kinematics of the elastic scattering from Hydrogen and the inelastic scattering from the 4.43 MeV state in ^{12}C. The result was 51.7 ± 0.2 MeV. The beam is focussed on the target with quadrupole lenses without any diaphragms within the experimental area. The beam spot on the target is less than 6 mm high and 2 mm wide. The scattering chamber has been described previously[9]. Its diameter is 20 cm. The detectors are mounted outside the vacuum chamber on ring tables moveable from remote. We use $dE-E$-telescopes consisting of 200–400 μ Si surface barrier counters (ORTEC) as dE counters and NaI(Tl)-scintillation counters as E counters in deuteron scattering experiments. In $(d, {}^3\text{He})$ reaction studies we

take CO_2 cooled Si surface barrier counters of 1.1 mm sensitive layer as E counters. The overall resolution is 200–400 keV depending on momentary energy stability of the beam in ^{3}He experiments and 500 to 600 keV for deuterons. The particle discrimination is performed by the conventional ($dE \times E$) multiplication technique[20].

The ^{48,50}Ti targets are isotopically enriched targets of about 1 mg/cm^2 thickness. As ^{51}V targets we used evaporated targets of about 0.5 mg/cm^2 thickness as well as rolled targets of 3.2 mg/cm^2 thickness.

4. Results

^{48}Ti(d, ^{3}He)^{47}Sc *Reaction*

The spectrum of the ^{3}He particles from the ^{48}Ti(d, ^{3}He) reaction shows great resemblance to that obtained by YNTEMA and SATCHLER[6] with 22 MeV deuterons, although we are in principle able to observe much higher excitations in the residual nucleus. In fact only three strong groups are observed in this reaction, corresponding to the ground state transition, the excitation of a 760 keV state and a 1.4 MeV state in ^{47}Sc. A number of higher states are weakly excited, the dominant of which have been evaluated as is shown in Table 1. The angular distributions of the three strong peaks are plotted in the left hand side of Fig. 1. As the spins of the final states are known[6] the assignment of angular transfer l-values is unique. Thus the measured angular distributions could serve as standard distributions with $l=3$ for the $7/2^-$ ground state, with $l=2$ for the $3/2^+$ state at 760 keV, and with $l=0$ for the $1/2^+$ state at 1.4 MeV. The statistical error is less than 5% near $\theta=20°$ and less than 8% near $\theta=50°$. The solid lines are the results of zero range, local DWBA calculations. The fit is quite satisfactory in the case of $l=0$ and $l=2$ transfer.

The optical model parameters for the deuteron channel have been taken from our analysis of elastic scattering data at 52 MeV[21] including a spin orbit interaction. The angular distributions show practically no dependence on the choice of the two sets of optical model parameters called "set 1" and "set 2" in Table 3. A point of some concern were the ^{3}He optical model parameters. We used values of the real and imaginary well depth extrapolated from the optical model analysis of ^{3}He elastic scattering at 37.7 MeV from ^{40}Ca, ^{56}Fe and ^{58}Ni and at 43.7 MeV from ^{58}Ni, ^{89}Y and ^{90}Zr [22]. The standard geometrical parameters proposed in the cited paper have been adopted.

[20] RADEKA, V.: IEEE Transactions NS-11, No. 1, 302 (1964).

[21] DUELLI, B., F. HINTERBERGER, G. MAIRLE, U. SCHMIDT-ROHR, P. TUREK, and G. J. WAGNER: Phys. Letters **23**, 485 (1966).

[22] GIBSON, E. F., B. W. RIDLEY, J. J. KRAUSHAAR, M. E. RICKEY, and R. H. BASSEL: Phys. Rev. (in press).

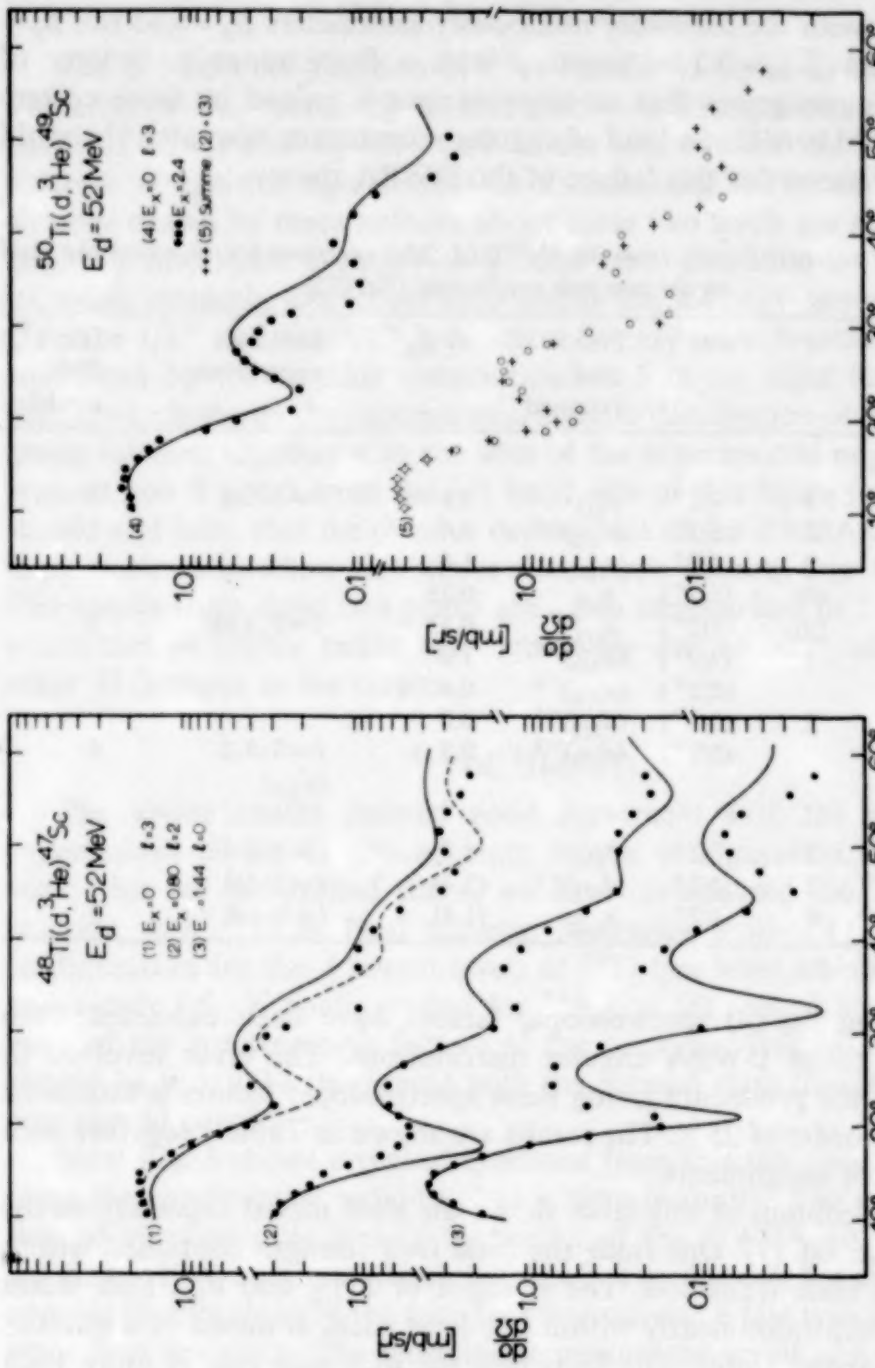


Fig. 1. Angular distributions for the ^{48}Ti(d, ^{3}He)^{47}Sc reaction leading to the ground state, 0.76 MeV and 1.4 MeV state (left hand side) and of the ^{50}Ti(d, ^{3}He)^{49}Sc reaction leading to the ground state and a doublet of states at 2.4 MeV (right hand side). The crosses in the angular distribution no. 5 represent the sum of nos. 2 and 3. Solid lines are the result of local, zero range and the dashed line of nonlocal, finite range DWBA calculations

In case of the $l=3$ angular distribution in Fig. 1 we undertook a series of DWBA calculations involving corrections for finite range and nonlocality effects*. The dashed line in Fig. 1 is the result of such a

* We like to thank Dipl.-Phys. W. Fitz who has written the Fortran program for the respective form factor.

calculation with the following nonlocality parameters $\beta_p = 0.85$ fm, $\beta_d = 0.54$ fm, and $\beta_{^3He} = 0.2$ fm together with a finite range parameter of 1.5 fm. One recognizes that no improvement is gained by these corrections. We add here that a kind of angular momentum mismatch [23] should not be the reason for this failure of the DWBA theory.

Table 1. *Spectroscopic factors from the* ^{48,50}Ti$(d, ^3$He$)$ *reactions together with the shell model sum rule predictions* [*Eq.* (7)]

E_x (MeV)	l	J^π	Prot. conf. assumed	$S_{L,ZR}$	Sum rule experiment	[Eq. (7)] Shell model
^{47}Sc Level						
0	3	$7/2^-$	$f_{7/2}$	1.8	$l=3$:1.8	2
0.76	2	$3/2^+$	$(d_{3/2})^{-1}$	3.4		
1.37 ± 0.05	0	$1/2^+$	$s_{1/2}$	1.4		
2.00 ± 0.1	(0)	$(1/2^+)$	$s_{1/2}$	0.25		
2.35 ± 0.1	(0)	$(1/2^+)$	$s_{1/2}$	0.33	$l=0$:1.98	2
4.00 ± 0.15	2	$(3/2^+)$	$(d_{3/2})^{-1}$	1.0		
		$(5/2^+)$	$(d_{5/2})^{-1}$	0.6		
5.75 ± 0.2	2	$(3/2^+)$	$(d_{3/2})^{-1}$	0.8		
		$(5/2^+)$	$(d_{5/2})^{-1}$	0.5	$l=2$:5.2 $(d_{3/2})$	4
^{49}Sc Level						
0	3	$7/2^-$	$f_{7/2}$	1.8	$l=3$:1.8	2
2.4	2	$3/2^+$	$(d_{3/2})^{-1}$	(3.4)	$l=2$:3.4	4
2.4	0	$1/2^+$	$s_{1/2}$	(1.4)	$l=0$:1.4	2

Following Eq. (4) spectroscopic factors have been extracted from local, zero range DWBA angular distributions. The error involved in the total of the procedure giving these spectroscopic factors is estimated to be of the order of 25%. The results are shown in Table 1 together with tentative spin assignments.

The last column of this table shows the shell model expectations for the sum rule Eq. (7). One finds the total $l=3$ strength contained within the ground state transition. The strength of $2s_{1/2}$ and $d_{3/2}$ hole states though concentrated nearly within one level each, is mixed in a number of higher excited states. The fact, that the $d_{3/2}$ sum rule is more than exhausted for $l=2$ transitions suggests the presence of $d_{5/2}$ hole states at an excitation energy of about 5 MeV which would agree with the ^{40}Ca$(d, ^3$He$)$ results [11], and calculations of proton binding energies in Ca isotopes [24]. The excitation of these levels is too weak, however, as to allow any conclusions on a j-dependence of the angular distributions.

[23] BOCK, R., *et al.*: To be published in Nuclear Phys.

[24] GIBSON, B. F., and K. J. VAN OOSTRUM: Nuclear Phys. A **90**, 159 (1967).

^{50}Ti(d, ^{3}He)^{49}Sc *Reaction*

The proton configuration of ^{50}Ti should be equal to that of ^{48}Ti. Therefore it was surprising to find only two strongly excited peaks at peaks at $E_x=0$ and $E_x=2.4$ MeV in the spectrum of the ^{50}Ti(d, ^{3}He) reaction – again in agreement with YNTEMA and SATCHLER[6]. The conclusions drawn by these authors about these two levels are rather uncertain. We find again a pure $l=3$ ground state transition with full spectroscopic strength. Our conclusion about the 2.4 MeV group is that in ^{49}Sc the $1/2^+$ and the $3/2^+$ hole states lie very close together*. This is confirmed by the angular distribution no. 5 in the right hand side of Fig. 1, which shows the experimental angular distribution of the 2.4 MeV group (circles) together with the sum of the experimental angular distributions nos. 2 and 3 from the left hand side of this figure (crosses). We should add here, that the Q-value dependence of the DWBA calculations is so weak as to allow this direct summation without any corrections. The results from these two peaks are again summarized in Table 1. The evaluation of higher peaks was impossible due to 30% admixture of other Ti isotopes in the target.

^{51}V(d, ^{3}He)^{50}Ti

The above results showed good agreement with the shell model expectations of the Ti ground state proton configuration. In order to verify this for the excited states, we have investigated the ^{51}V(d, ^{3}He) reaction with ^{50}Ti as final nucleus. Assuming a pure $(f_{7/2})^2$ proton configuration for the 4 lowest levels of ^{50}Ti (see level scheme in Fig. 2) and a pure $(f_{7/2})^3$ configuration for ^{51}V Eqs. (6) and (7) show that the ratio of the spectroscopic factors of the corresponding $l=3$ transitions should be 9:5:9:13 (beginning with the ground state transition). Their sum should equal 3.

Now Fig. 3 shows a typical spectrum from this reaction. One recognizes the approximate validity of this ratio instantly. The exact extraction of spectroscopic factors by means of the DWBA gives the ratio 9.7:5:8.6:13.4, as summarized in Table 2. Fig. 2 shows the experimental angular distributions of the four $l=3$ transitions. A few typical statistical error bars are given. The solid line represents the result of a zero range, local DWBA calculation for the 2^+ state. We should mention here that the DWBA calculations readily reproduce the small differences in the form of the angular distributions, such as the rise of the maximum at $\theta_{cm}=13°$ and the increasing peak to valley ratio of the first slope with increasing excitation energy in ^{50}Ti. By regarding the ratio of the spec-

* J. R. ERSKINE et al. have located these levels at 2233 keV and 2382 keV [Phys. Rev. **142**, 633 (1966)].

troscopic factors the errors usually inherent in the method of gaining these factors are greatly reduced. Thus this nice agreement between experiment and shell model expectations shows the validity of the method as well as of the assumed configurations.

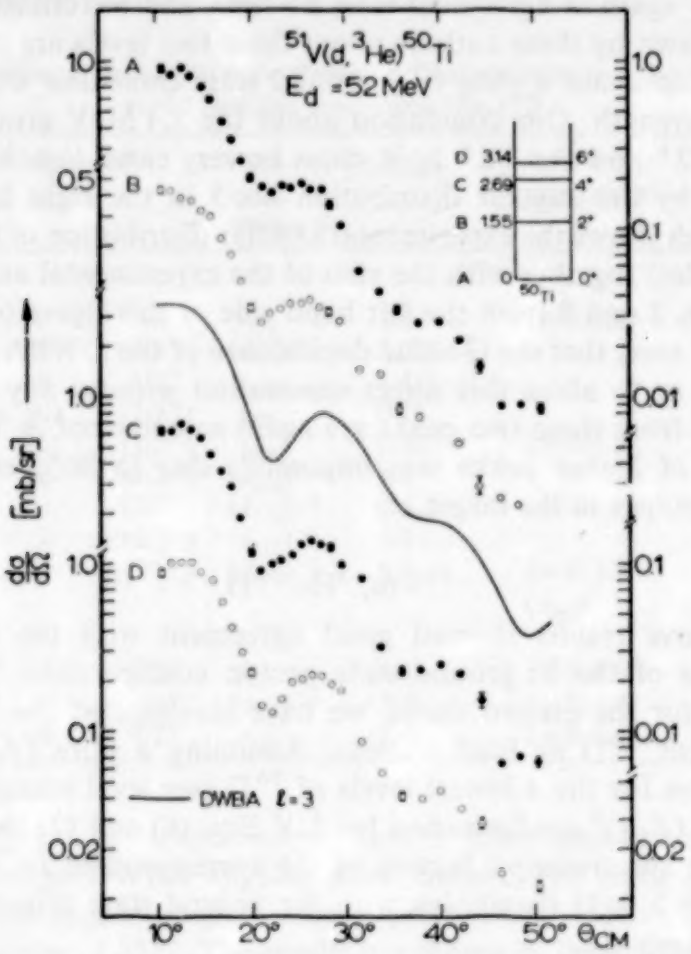


Fig. 2. Angular distribution for the $^{51}V(d, {}^3He)^{50}Ti$ reaction to the 4 lowest states in ^{50}Ti. The solid line is the result of a zero range, local DWBA calculation for the transition to the 2^+ state in ^{50}Ti. The level scheme has been taken from ref. [25]. A few typical statistical error bars are given

One recognizes a number of higher excited states in Fig. 3. The evaluation of the strongest peaks gives the angular distributions plotted in Fig. 4 together with DWBA fits. The extracted spectroscopic factors are shown in Table 2. We observe two strong $l=0$ transitions which should correspond to $\{(f_{7/2})^3\ 7/2^-\ \dot{x}\ s_{1/2}{}^+\}_{3^-,4^-}$ configurations. The calculation following[15] shows that in this case the spectroscopic factors

[25] BARNES, P. D., C. K. BOCKELMAN, O. HANSEN, and A. SPERDUTO: Phys. Rev. **140**, B 42 (1965).

at $E_x = 4.42$ MeV and a negative parity level at 6.21 MeV known in the ^{49}Ti$(d, p)^{50}$Ti reaction [25]. The $(d_{3/2})$ hole strength is splitted very much due to residual interactions mainly with the last $f_{7/2}$ proton.
should be proportional to $(2J_f + 1)$. This gives the tentative spin assignment shown in Table 2. These levels may be identified with the 3^- level

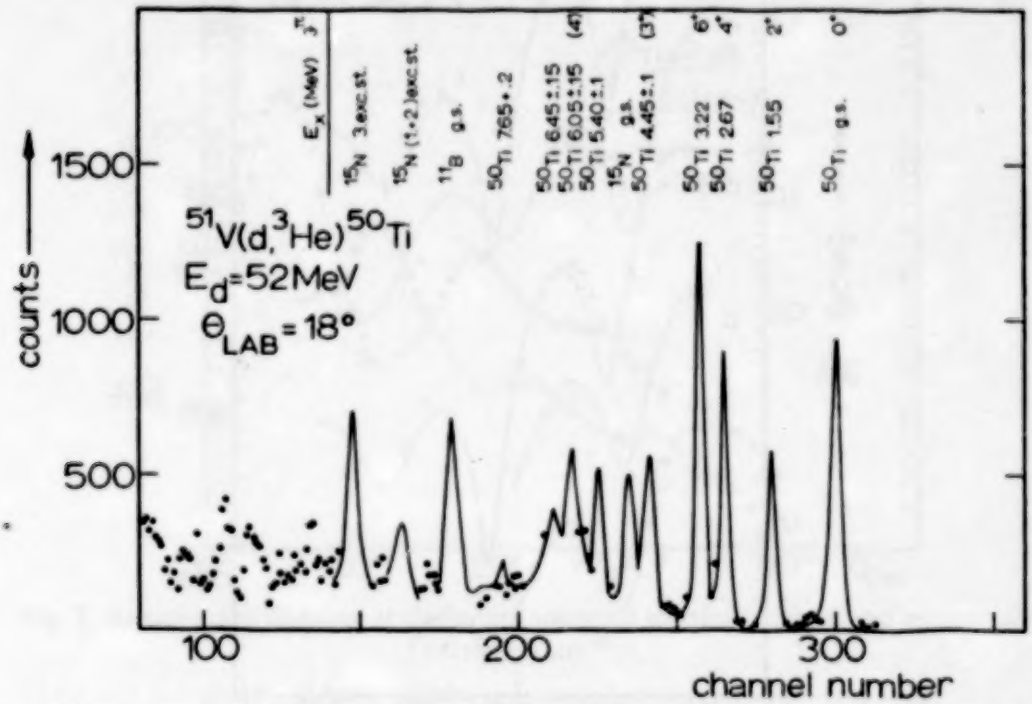


Fig. 3. Spectrum of the ^{51}V$(d, ^3$He$)^{50}$Ti reaction at $\theta_{lab} = 18°$. The excitation energies of positive parity levels has been taken from ref. [25]

$$^{48}\text{Ti}(d, d')^{48}\text{Ti}^*$$

The spectrum of deuterons emitted when bombarding ^{48}Ti with 52 MeV deuterons is at most angles dominated by the elastically scattered deuterons. As Fig. 5 shows, there are, however, a few angles where the inelastic scattering from the 2^+ state at 0.99 MeV exceeds the elastic scattering intensity. (This figure may serve as an illustration for the validity of the Blair phase rule, too.) Insofar it is by no means trivial that the DWBA should be applicable to the description of inelastic scattering, a remark which applies equally well to the description of other direct processes in view of the large fraction of reactions other than elastic.

The large inelastic cross section suggests a collective behaviour of the 2^+ state. Therefore our first attempt was to analyze the angular distribution in terms of the collective model. The result is shown in Fig. 6 as solid and dashed lines which represent complex and real coupling

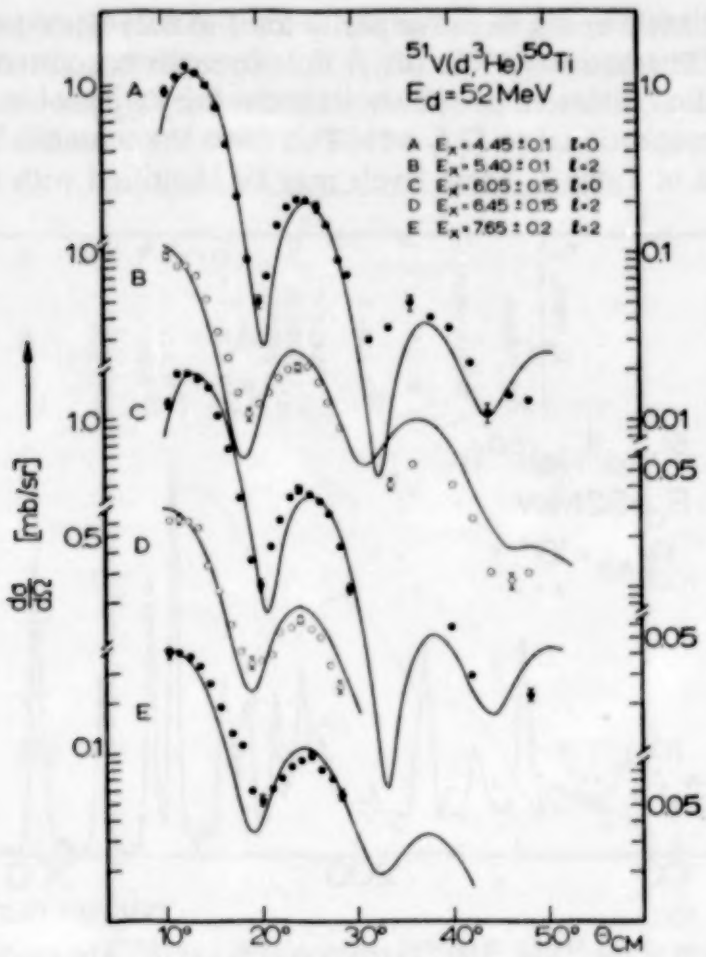


Fig. 4. Angular distribution for the $^{51}V(d, ^3He)^{50}Ti$ reaction to a number of negative parity levels. $l=0$ and $l=2$ DWBA angular distributions are given as solid lines. The bars represent statistical errors

Table 2. *Spectroscopic factors extracted for a number of transitions in the* $^{51}V(d, ^3He)^{50}Ti$ *reaction. Shell model values are given for comparison*

^{50}Ti Level (MeV)	l	J^π	Prot. conf. assumed	$S_{L,ZR}$	Ratio of spectr. fact		Sum rule values [Eq. (7)]	
					Experiment	Shell model	Experiment	Shell model
0	3	0^+	$(f_{7/2})^2$	0.73	9.7	9		
1.55	3	2^+	$(f_{7/2})^2$	0.39	5.0	5	$l=3$:2.81	3
2.67	3	4^+	$(f_{7/2})^2$	0.64	8.6	9		
3.22	3	6^+	$(f_{7/2})^2$	1.05	13.4	13		
4.45 ± 0.1	0	$(3)^-$	$(f_{7/2})^3\, 2s_{1/2}$	0.63			$l=0$:1.73	2
5.40 ± 0.1	2	$(\,)^-$	$(f_{7/2})^3 (d_{3/2})^{-1}$	1.90				
6.05 ± 0.15	0	$(4)^-$	$(f_{7/2})^3\, 2s_{1/2}$	1.10				
6.45 ± 0.15	2	$(\,)^-$	$(f_{7/2})^3 (d_{3/2})^{-1}$	1.40			$l=2$:4.4	4
7.65 ± 0.2	2	$(\,)^-$	$(f_{7/2})^3 (d_{3/2})^{-1}$	1.10				

DWBA calculations. It is gratifying that the more reasonable complex coupling procedure gives the better fit. It is interesting that the complex coupling angular distribution has a stronger oscillatory structure than the real coupling one. Previous analysis with different energies and targets[26] had the contrary result, which should therefore not be generalized.

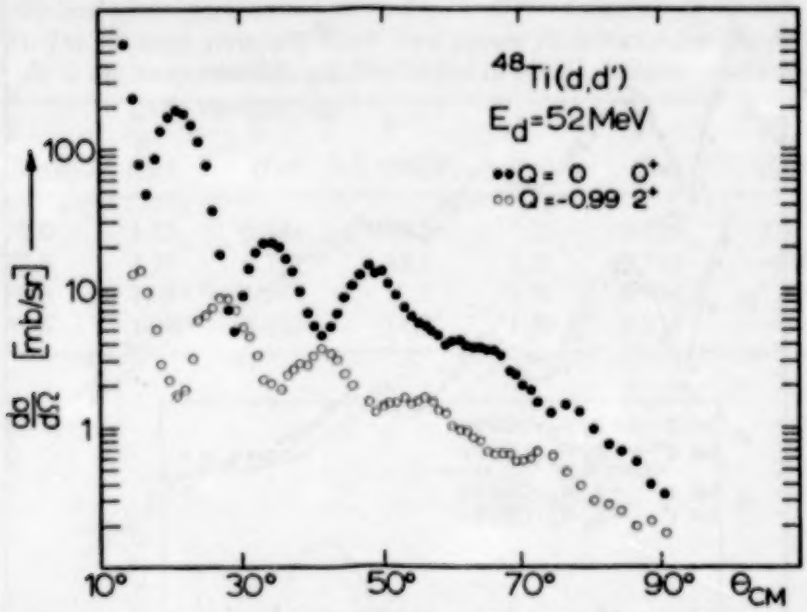


Fig. 5. Angular distributions of deuterons scattered elastically (dots) and inelastically (circles) from ^{48}Ti

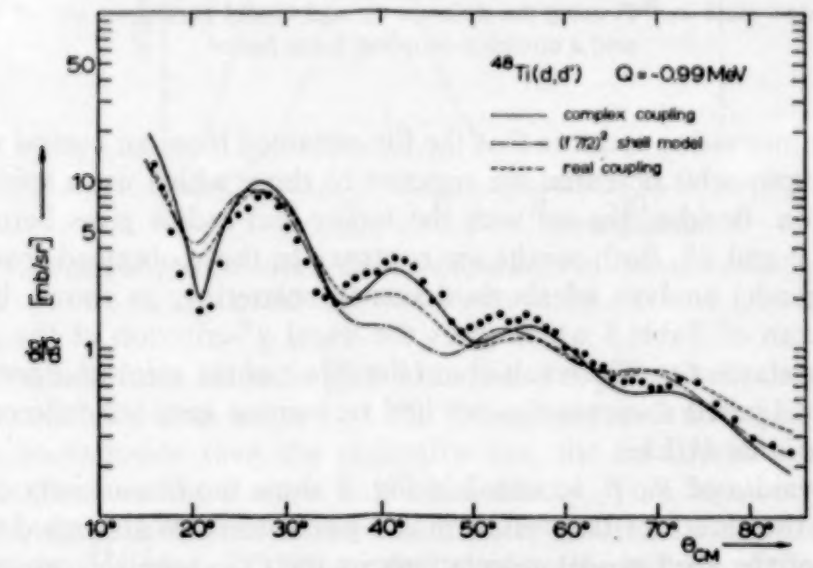


Fig. 6. DWBA fits to the angular distribution for inelastic deuteron scattering from the 0.99 MeV state in ^{48}Ti using different form factors and the optical model parameter set 1* from Table 3

[26] DICKENS, J. K., F. G. PEREY, and G. R. SATCHLER: Nuclear Phys. 73, 529 (1965).

The optical model parameters used in Fig. 6 is set 1* from Table 3, which gave the best fits for all types of form factors including the shell model case which is discussed below. Fig. 7 shows the influence of the choice of the set of optical model parameters on the complex coupling

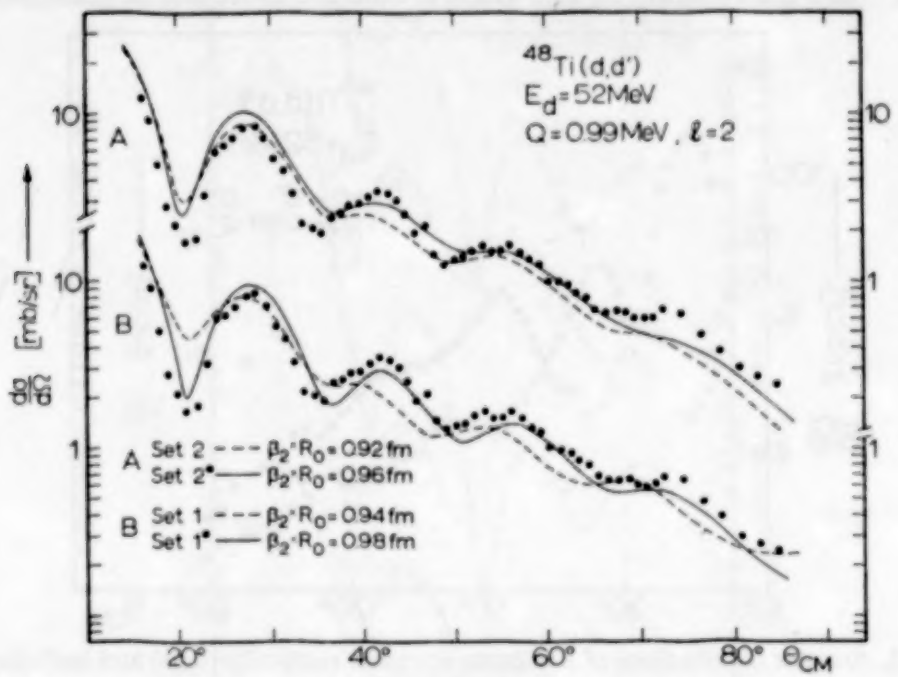


Fig. 7. DWBA fits to the angular distribution for inelastic deuteron scattering from the 0.99 MeV state in ^{48}Ti using the different optical model parameter sets of Table 3 and a complex coupling form factor

fits. The interesting result is that the fits obtained from an optical model without spin-orbit potential are superior to those which use a spin orbit interaction. Besides, the set with the larger real radius gives better fits than set 2 and 2*. Both results are contrary to those obtained from our optical model analysis of elastic deuteron scattering, as shown by the last column of Table 3 which gives the usual χ^2-criterion of the corresponding elastic fits. The result about the effect of the spin-orbit potential may be disguised somewhat as we had to assume spin 1/2 deuterons in using the code JULIE.

The values of $R_0 \cdot \beta_l$ included in Fig. 7 show the insensitivity of this value to the choice of the optical model parameters. With regard to the success of the shell model calculations in the $(f_{7/2})$-shell[27], we tried a shell model approach to the inelastic scattering of deuterons from Ti. According to these wave functions[27] the lowest 2^+ state in ^{48}Ti is

[27] MCCULLEN, J. D., B. F. BAYMAN, and L. ZAMICK: Phys. Rev. **134**, B 515 (1964); — Princeton University Rep. No. NYO-9811 (1964).

generated from the ground state by recoupling of two protons and neutron holes, respectively. The form factor $I_{l=2}(r)$ was calculated* following Eq. (12). The deuteron range parameter was taken to be $a=2.5$ fm, the range of the basic nucleon-nucleon potential as $\gamma^{-1}=2.0$ fm [see Eq. (11)].

Table 3. *Optical model parameter sets used in the DWBA analysis of inelastic scattering from* ^{48}Ti. *The* χ^2*-value gives the usual least square fit criterion for the optical model fit to the measured angular distribution of elastic deuteron scattering*

No.	V (MeV)	r_0 (fm)	a (fm)	W' (MeV)	r' (fm)	a' (fm)	V_{so} (MeV)	χ^2
1	70.0	1.25	0.744	13.2	1.25	0.759	7.9	3.0
1*	72.5	1.25	0.732	15.1	1.21	0.739	—	4.1
2	87.6	1.05	0.856	12.7	1.31	0.756	7.9	3.5
2*	89.6	1.05	0.843	11.7	1.30	0.820	—	3.6

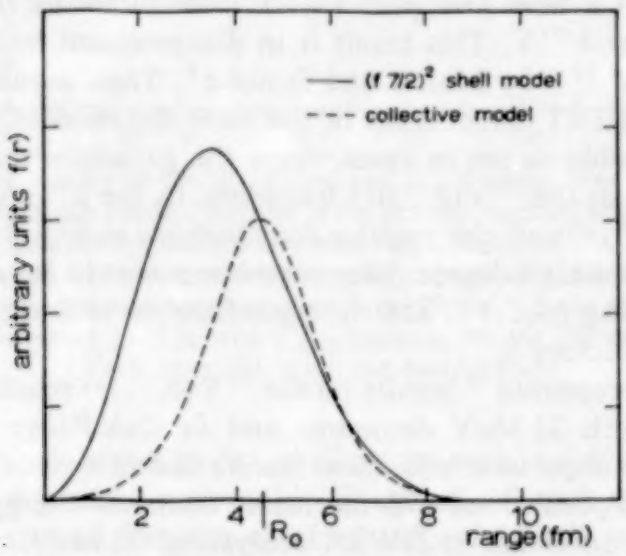


Fig. 8. Real part of the collective form factor (dashed line) and shell model form factor (solid line) normalized at $r=R_0$

The resulting form factor is plotted in Fig. 8 together with the real part of the collective form factor (set 1*). Though the shell model form factor peaks more inside than the collective one, the corresponding angular distributions in Fig. 6 show a great similarity. This together with the failure of the LEA corrections in transfer reactions shows again the relative insensitivity of DWBA calculations to the interior of the nucleus. The similarity of the angular distributions is regarded as a consequence of the similarity of the form factors for $r>R_0$, where R_0 stands for the

* We acknowledge the help of S. WENNEIS who has written the code for this form factor.

radius of the real part of the optical potential. The form factors in Fig. 8 are normalized at $r = R_0$.

The evaluation of the basic nucleon-nucleon potential according to Eq. (11) affords the calculation of the matrix element of Y_2 between $(f_{7/2})$-shell wave functions[27] of the ground and lowest 2^+ state of ^{48}Ti. The result is $V_N = 27$ MeV with a range parameter, we repeat, of $\gamma^{-1} = 2.0$ fm. Calculations with $\gamma^{-1} = 1.65$ fm and 1.8 fm gave worse fits to the measured angular distribution.

5. Conclusions

We have presented here a number of results obtained with deuteron induced reactions at 52 MeV. Our aim was to point out the utility of an investigation of direct nuclear reactions with high energy deuterons, which implies the validity of the DWBA. By means of this theory we were able to show that all experimental facts agree well with the assumption of an inert ^{48}Ca core and pure $(f_{7/2})^n$ configurations for the ground state of ^{50}Ti and ^{51}V. This result is in disagreement with an assumed deformation of ^{51}V by MALIK and SCHOLZ[4]. Their assumption implies the presence of $l = 1$ components in the wave function of $^{51}V_{g.s.}$ which we should be able to see in cases where the j-triangle condition allows for it, namely in the ^{51}V$(d, ^3$He) transition to the 2^+ and 4^+ states in ^{50}Ti. The similarity of the angular distributions in Fig. 2 excludes such components to a high degree. Moreover it remains to be shown that the Coriolis coupling model is able to reproduce the observed ratio of the spectroscopic factors $S_{l=3}$.

BASSEL has reported[28] results on the ^{51}V$(d, ^3$He) reaction performed in Argonne with 21 MeV deuterons and in Oak Ridge with 34 MeV deuterons. A comparison with these results shows a steady approach to the shell model predictions with increasing deuteron energy, which again confirms our confidence in DWBA analysis at 52 MeV.

BANSAL and FRENCH[29] have shown that the position of the $s_{1/2}$ and $d_{3/2}$ hole states, as measured with pick-up reactions from filled shells, determines in principle the matrix elements of the residual interaction between $f_{7/2}$ and $d_{3/2}$ or $s_{1/2}$ nucleons. They were able to reproduce the location of the centroids of the $d_{3/2}$ hole states in Sc and Ti isotopes with the following two parameter ansatz for the residual interaction between two non-equivalent *particles*

$$v_{ij} = \bar{E}_{ij} + \overline{\Delta E}_{ij}(t_i t_j). \tag{13}$$

$\bar{E}_{ij}$ is the average two body interaction and $\overline{\Delta E}_{ij}$ is the difference between $T = 1$ and $T = 0$ centers of gravity of the two body system.

[28] BASSEL, R. H.: IEEE Transactions NS-13, No. 4, p. 326 (1966).

[29] BANSAL, R. H., and J. B. FRENCH: Phys. Letters **11**, 145 (1964).

We applied their calculations on the proton hole states as obtained from our (d, ^{3}He) studies and on the $T_<$ neutron hole states from the (p, d) results of SHERR[30]. To be exact, the centers of gravity defined by ΣS. $E_x/\Sigma S$ have been regarded. For $d_{3/2}$ holes we used the parameters $E_d = -0.25$ MeV and $\Delta E_d = 2.8$ MeV given by BANSAL and FRENCH from

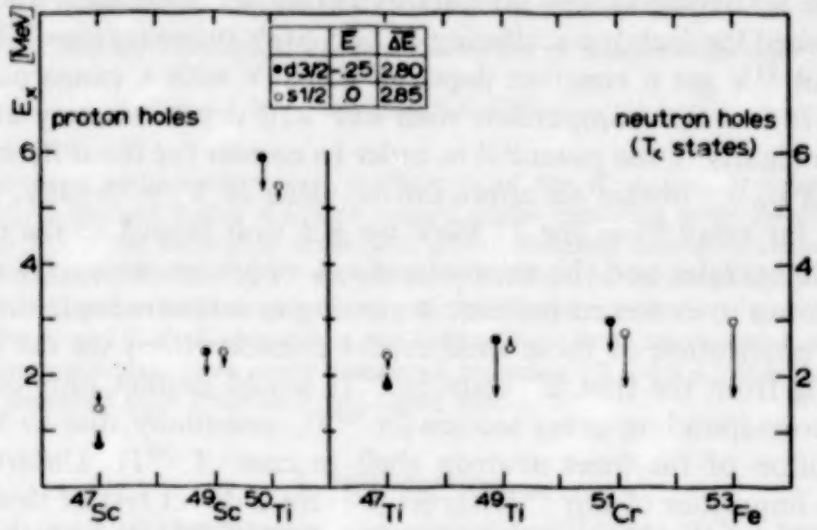


Fig. 9. Centers of gravity of the $d_{3/2}$ (dots) and $s_{1/2}$ (circles) hole states plotted as excitation energies in the residual nucleus of the pick-up reaction under consideration. The proton hole data are taken from this work, the neutron hole data from SHERR[30]. The endpoints of the arrows represent the results of calculations (following BANSAL and FRENCH[29]) using the parameters as given in the figure. E is the average interaction energy of the picked-up particle with a $f_{7/2}$ nucleon, ΔE the difference of $T=0$ and $T=1$ centroids of the two body system

an analysis of hole states in $f_{7/2}$ shell nuclei with $A \leqq 49$. In case of the $s_{1/2}$ hole we obtained a reasonable fit with $E_s = 0$ and $\Delta E_s = 2.85$ MeV, whereas BANSAL and FRENCH obtained $\Delta E_s = 2.6$ MeV with a value of $E_x(s_{1/2}) = 0$ for $A = 49$ [6]. The experimental excitation energies (dots and circles) and the results of the calculations with these parameters (endpoints of the arrows) are shown in Fig. 9. The agreement is quite good for the proton holes. The neutron data show a deviation with increasing A. This might readily be explained with configuration admixtures if not by the crudeness of the method at all. The "crossing over" of $s_{1/2}$ and $d_{3/2}$ holes at $A = 49$ nuclei should be mentioned. This behaviour can be explained by the more attractive average two body interaction in case of the $d_{3/2}$ nucleons compared to the $s_{1/2}$ nucleons, which may be understood from the larger spatial overlap of the $f_{7/2}$ with $d_{3/2}$ probability density distribution compared to that between $f_{7/2}$ and $s_{1/2}$.

[30] SHERR, R.: Lectures in theoretical physics, vol. VIII-C. Boulder: University of Colorado Press 1965.

In this connection we should mention that by $(p, 2p)$ reactions with 155 MeV protons[31] a d-hole state at $E_x = 4.0 \pm 0.3$ MeV and a s-hole state at $E_x = 6.1 \pm 0.3$ MeV in ^{50}Ti have been located, which does poorly agree, at least in l-assignment, with our results. The result on nucleon-nucleon interaction obtained from the shell model description of inelastic deuteron scattering is very satisfactory. FUNSTEN, ROBERSON and ROST[7] who studied the inelastic scattering of 17.5 MeV protons from ^{50}Ti, ^{52}Cr, ^{54}Fe and ^{51}V get a constant depth of 45 MeV with a range parameter $\gamma^{-1} = 1.78$ fm. For comparison with our well depth we may assume a $V \cdot r^2$ ambiguity of the potential in order to correct for the different radii. In doing so we obtain an approximate value of $V_N = 35$ MeV which is not too far away from the 27 MeV we got with regard to the different projectile energies and the approximations which are necessary in going from proton to deuteron inelastic scattering in a microscopic theory.

The application of these shell model considerations on the inelastic scattering from the first 2^+ state in ^{50}Ti would predict only one third of the corresponding cross section in ^{48}Ti, essentially due to the zero contribution of the inert neutron shell in case of ^{50}Ti. Unfortunately isotopic impurities of our ^{50}Ti target prevent a direct test of this prediction. We believe to have some indications in this direction which suggest further experiments. Of course the prediction should not be taken too serious as it involves the uncertainties contained in the pure $f_{7/2}$ wave functions[27] as well as that of the shell model treatment of inelastic deuteron scattering. Deuteron scattering experiments at 11.8 MeV[32] and proton scattering at 155 MeV[33] show both a minimum inelastic cross section of $N = 28$ nuclei compared to the neighbouring nuclei. This is of course very promising as it shows that the collective description of inelastic scattering may well be overcome by the more physical shell model description.

We are indebted to Dr. G. SCHATZ and the staff of the cyclotron laboratory at Karlsruhe for their cooperation.

[31] RUHLA, C., *et al.*: To be published.

[32] WENNEIS, S.: Private communication.

[33] RICCI, R. A., J. C. JACMART, M. LIU, M. RIOU, and C. RUHLA: Nuclear Phys. A **91**, 609 (1967).

Zeitschrift für Physik 202, 255–272 (1967)

Investigation of Anomalous *K*, *L* and *M* Shell Conversion in Electric Dipole Transitions

HANS-CHRISTIAN PAULI and KURT ALDER
Institute for Theoretical Physics, University of Basel/Switzerland

Received March 5, 1967

Anomalous experimental conversion coefficients of the *K*, *L* and *M* subshells are investigated for thirteen highly hindered electric dipole transition in six deformed odd mass nuclei. For a distinct nuclear transition, all experimental anomalies are consistent with one parameter, containing all nuclear information. The values of this parameter are determined and a simple connection with the hindrance of the transition seems to exist. The *K* and *L* shell conversion coefficients have been recalculated, while the *M* shell conversion data were newly computed including all finite nuclear size effects as well as screening by a Thomas-Fermi-Dirac model.

I. Introduction

Calculations of the internal conversion coefficients (ICC) have been performed by ROSE[1] and by SLIV and BAND[2] taking into account the screening of the atomic electrons by a Thomas-Fermi-Dirac potential as well as a finite nuclear size. The main feature of former point nucleus calculations[3], consisting in the fact that the conversion coefficient is independent of any specific nuclear model, is maintained by both authors. However, CHURCH and WENESER[4] have shown that for magnetic dipole ($M1$) transitions the assumption of a finite nuclear size induces new nuclear matrix elements which may contribute for hindered γ-transitions appreciably to the conversion coefficient. The review article of CHURCH and WENESER[5] gives a generalization to other multipole orders as well as the numerical values for the dynamic coefficients of the *K* shell[6].

In order to extract the nuclear information from the experiments, the static nonpenetration matrix elements of the internal conversion process must be known. However, the two tabulations of the ICC show large

[1] ROSE, M. E.: Internal conversion coefficients. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1958.

[2] SLIV, L. A., and I. M. BAND: Tables of internal conversion coefficients, in: Alpha-, Beta- and Gamma-Ray spectroscopy. (K. SIEGBAHN, ed.). Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1965.

[3] ROSE, M. E., G. H. GOERTZEL, B. I. SPINRAD, J. HARR, and P. STRONG: Phys. Rev. **83**, 79 (1951).

[4] CHURCH, E. L., and J. WENESER: Phys. Rev. **104**, 1382 (1956).

[5] CHURCH, E. L., and J. WENESER: Ann. Rev. Nuclear Sci. **10**, 193 (1960).

[6] GREEN, T. A., and M. E. ROSE: Phys. Rev. **110**, 105 (1958).

deviations which cannot be accounted for neither by the different assumptions nor by the errors of interpolation[7-10].

Therefore a complete recalculation[9] of the conversion matrix elements of the K and L shells for electric and magnetic multipole orders including all finite size effects has been performed.

Since the penetration effect is expected to be important for low energies and heavy nuclei, we have restricted our calculations on these regions.

In this paper, we present our results for penetration effects in about a dozen of highly hindered electric dipole transitions with anomalous conversion coefficients. The anomaly of the conversion coefficients of a distinct nuclear transition can be explained by penetration and described by one nuclear parameter η which is connected with the $\langle j\, r\rangle$ matrix element[5] (see section II). In the highly hindered $E1$ transitions in the region of the actinioides[5,11] a second nuclear parameter ξ seems to be necessary to obtain a better agreement with the experimental data. As the errors of the experimental measurements are rather large further and more accurate data would be very useful to extract this parameter.

II. The Penetration Matrix Elements

The internal conversion coefficient $\alpha_{\kappa_i}(L)$ for a particular subshell e.g. the K, L_{I}, L_{II}, L_{III}... shell and an electric transition of multipole order L have been derived[9] by a similar method as described by KRAMERS and NILSSON[12]. We get*

$$\alpha_{\kappa_i}(L)=\pi\alpha k\frac{(2j_i+1)}{L(L+1)}\sum_{\kappa}(2j+1)\begin{pmatrix} j_i & j & L\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}^2|R_{\kappa\kappa_i}(eL)+T_{\kappa\kappa_i}(eL)|^2. \quad (1)$$

The gamma transition energy is denoted by k, $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}$ is the $3j$-symbol[13] and κ the Dirac quantum number[14]. In the non relativistic

* Here and in the following, natural units are used, i.e. $h=c=m_e=1$. No trouble should arise between the conversion coefficient α_{κ_i} and the fine structure constant $\alpha\simeq 1/137$.

[7] NOVAKOV, T., and J. M. HOLLANDER: Nuclear Phys. **60**, 593 (1964).

[8] BHALLA, C. P., M. S. FREEDMAN, F. T. PORTER, and F. WAGNER: Preprint, Aug. 1966.

[9] PAULI, H. C.: Penetration effects in internal conversion. Ph. D. Thesis, Basel Switzerland 1966 (to be published in Helv. Phys. Acta).

[10] SELTZER, E., and R. HAGER: Phys. Letters **18**, 163 (1965).

[11] ASARO, F., F. S. STEPHENS, J. M. HOLLANDER, and I. PERLMAN: Phys. Rev. **117**, 492 (1960).

[12] KRAMERS, G., and S. G. NILSSON: Nuclear Phys. **35**, 273 (1962).

[13] EDMONDS, A. R.: Angular momentum in quantum mechanics. Princeton: Princeton University Press 1957.

[14] ROSE, M. E.: Relativistic electron theory. New York: John Wiley & Sons 1961.

limit, the orbital momentum l is connected with κ by $l=\kappa$ for $j=l-\frac{1}{2}$ and $l=-\kappa-1$ for $j=l+\frac{1}{2}$. The index i represents the initial bound state of the electron.

The radial matrix elements $R_{\kappa\kappa_i}$ and $T_{\kappa\kappa_i}$ are defined by

$$R_{\kappa\kappa_i}(eL)=\int_0^\infty dr\left\{kr\,h_L(kr)\cdot[u_{\kappa_i}v_\kappa-v_{\kappa_i}u_\kappa]+\left(\frac{\partial}{\partial r}r\,h_L(kr)\right)[u_{\kappa_i}u_\kappa+v_{\kappa_i}v_\kappa]\right\} \tag{2}$$

and

$$T_{\kappa\kappa_i}(eL)=\frac{\int_0^\infty d\tau\{i\,j_n\hat{r}\,g^{(1)}_{\kappa\kappa_i}(r)+\rho_n\,g^{(2)}_{\kappa\kappa_i}(r)\}\cdot(i^L\,Y_{LM})^*}{\int_0^\infty d\tau\left\{i\,j_n\hat{r}\,kr\,j_L(kr)+\rho_n\frac{\partial}{\partial r}r\,j_L(kr)\right\}(i^L\,Y_{LM})^*} \tag{3}$$

with

$$g^{(1)}_{\kappa\kappa_i}=-\frac{i}{k}(u_{\kappa_i}v_\kappa-v_{\kappa_i}u_\kappa)+kr\{h_L\,f(r,j_L)-j_L\cdot f(r,h_L)\} \tag{4a}$$

$$g^{(2)}_{\kappa\kappa_i}=\left(\frac{\partial}{\partial r}r\,h_L(kr)\right)\cdot f(r,j_L)-\left(\frac{\partial}{\partial r}r\,j_L(kr)\right)\cdot f(r,h_L) \tag{4b}$$

$$f(r',\zeta_L)=\int_0^{r'}dr\left\{kr\,\zeta_L(kr)[u_{\kappa_i}v_\kappa-v_{\kappa_i}u_\kappa]+\left(\frac{\partial}{\partial r}r\,\zeta_L(kr)\right)[u_{\kappa_i}u_\kappa+v_{\kappa_i}v_\kappa]\right\}.$$

Here the radial Coulomb functions u_κ and v_κ are the large and small radial components of the Dirac spinor[14], multiplied by r. The spherical Bessel and Hankel functions are denoted by $j_L(kr)$ and $h_L(kr)$, respectively. The static matrix element $R_{\kappa\kappa_i}$ depends only on the Coulomb functions and on the energy through the Hankel function $h_L(kr)$. The expression $T_{\kappa\kappa_i}$, however, depends on the nuclear transition current $j_n(r)$ and the nuclear transition charge $\rho_n(r)$ and may be denoted as the dynamic matrix element. The denominator of $T_{\kappa\kappa_i}$ is proportional to the usual gamma transition amplitude. Penetration effects are expected to be significant only for small transition energies, i.e. $k\lesssim 1$. It can be shown that for $k\gg 1$ $g^{(1)}_{\kappa\kappa_i}$ as well as $g^{(2)}_{\kappa\kappa_i}$ vanish[9]. For the considered energies the product kr inside the nucleus with the nuclear radius $R=1.2\cdot 10^{-13}$ cm $A^{\frac{1}{3}}$ is always small compared to unity. Therefore, we can restrict ourselves to the long wavelength limit and keep only the first term of the power series of the spherical BESSEL and HANKEL functions in Eq. (3). Furthermore, we expand the radial functions $g^{(1)}_{\kappa\kappa_i}$ and

$g^{(2)}_{\kappa\kappa_i}$ in powers of $x=r/R$ [14]. The dynamic matrix element $T_{\kappa\kappa_i}(eL)$ can now be written

$$T_{\kappa\kappa_i}(eL)=i\frac{1}{1+\dfrac{kR}{L+1}\tilde{\eta}}\sum_{m=0}^{\infty}s_m^{(1)}(\kappa,\kappa_i)\,\eta_m+s_m^{(2)}(\kappa,\kappa_i)\,\xi_m \tag{5}$$

where the coefficients $s_m^{(1)}$ and $s_m^{(2)}$ depend on the electron wave functions, while the quantities $\tilde{\eta}$, η_m, ξ_m contain all nuclear information. These nuclear parameters are defined by

$$\eta_m=\frac{\langle I_f\|\, ij_n\hat{r}\,x^{p+2m}\,Y_L\,\|I_i\rangle}{\langle I_f\|\,\rho_n x^L\,Y_L\,\|I_i\rangle},$$

$$\tilde{\eta}=\frac{\langle I_f\|\, ij_n\hat{r}\,x^{L+1}\,Y_L\,\|I_i\rangle}{\langle I_f\|\,\rho_n x^L\,Y_L\,\|I_i\rangle},$$

$$\xi_m=\frac{\langle I_f\|\,\rho_n x^{\bar{p}+2m}\,Y_L\,\|I_i\rangle}{\langle I_f\|\,\rho_n x^L\,Y_L\,\|I_i\rangle}$$

with

$$p=\begin{cases}|\kappa|+|\kappa_i|+1=\bar{p}+1 & \text{for}\quad \kappa\cdot\kappa_i>0\\ |\kappa|+|\kappa_i|=\bar{p}-1 & \text{for}\quad \kappa\cdot\kappa_i<0\end{cases} \tag{6}$$

where the spins of the initial and final state are denoted by I_i and I_f, respectively.

In the following we will restrict ourselves to electric dipole ($E1$) transitions. The expression (5) for $T_{\kappa\kappa_i}$ can be simplified considerably, since only coefficients $s_m^{(1)}(\kappa,\kappa_i)$ with $p=2$ contribute significantly. Similarly, for $s_m^{(2)}(\kappa,\kappa_i)$ only the coefficients with $\bar{p}=3$ must be taken into account. As an illustration in Table 1 the numerical results of these coefficients are presented for the 282 keV pure $E1$ transition of Lu^{175}. Furthermore, the ratios of succeeding dynamic coefficients $s_m^{(1)}/s_0^{(1)}$ are nearly independent of the specific subshell (see Table 1). This can also be shown more generally for other cases [9].

It is therefore convenient to define a nuclear "current parameter" η, which is independent of any subshell, i.e.

$$\eta=\frac{\eta_0}{1+c}\left(1+\frac{s_1^{(1)}}{s_0^{(1)}}\frac{\eta_1}{\eta_0}+\frac{s_2^{(1)}}{s_0^{(1)}}\frac{\eta_2}{\eta_0}+\cdots\right) \tag{7}$$

with

$$c=\frac{kR}{2}\eta_0 \tag{8}$$

and

$$\eta_m=\frac{\langle I_f\|\, ij_n\hat{r}\,x^{2m+2}\,Y_1\,\|I_i\rangle}{\langle I_f\|\,\rho_n x\,Y_1\,\|I_i\rangle}. \tag{9}$$

Unfortunately, the ratios of the succeeding dynamic coefficients $s_m^{(2)}$ are for electric dipole transitions not independent of the different subshells (see Table 1). In this case a particular cancellation in the matrix elements with $\kappa_i = -\kappa$ [12,15] occurs and thus it is not possible to give an expression corresponding to Eq. (7). In a rough approximation, we shall neglect all higher terms. Thus, we define the nuclear "charge parameter" by

$$\xi = \xi_0 \equiv \frac{\langle I_f \| \rho_n x^3 Y_1 \| I_i \rangle}{\langle I_f \| \rho_n x Y_1 \| I_1 \rangle}. \quad (10)$$

Parametric substitutions as defined in Eqs. (7) and (10) have sometimes been employed in the literature [5,6,15–18]. Table 2 gives a short survey on the different notations.

Finally, the conversion coefficient $\alpha_{\kappa_i}(L)$ for a particular subshell κ_i can be separated into a static part (no penetration) $\alpha_{\kappa_i}^{(0)}(L)$ corresponding to the approximation of ROSE – i.e. $\eta = 0$ and $\xi = 0$ – and into an "anomaly factor" $\Delta(\kappa_i)$ containing the dependence on the nuclear structure, i.e.

$$\alpha_{\kappa_i}(L) = \alpha_{\kappa_i}^{(0)}(L) \cdot \Delta(\kappa_i) \quad (11)$$

with

$$\Delta(\kappa_i) = 1 + a_1(\kappa_i)\eta + a_2(\kappa_i)\eta^2 + a_3(\kappa_i)\eta\xi + a_4(\kappa_i)\xi + a_5(\kappa_i)\xi^2. \quad (12)$$

Table 1. *Electron penetration matrix elements of the 282.0 keV E1 transition in* Lu^{175}. *The dynamic coefficients* $s_m^{(1)}$ *and* $s_m^{(2)}$ *together with the leading imaginary part of the static matrix elements are shown for all partial waves* (κ) *of the K,* L_1, L_{II}, L_{III} *subshells* (κ_i). *Apparently, the dynamic contributions of the* $\eta(s_m^{(1)})$ *or* $\xi(s_m^{(2)})$ *type carrying an asterisk can be neglected*

κ_i	κ	p	$s_0^{(1)}$	$s_1^{(1)}/s_0^{(1)}$	$s_2^{(1)}/s_0^{(1)}$	$\bar{p}$	$s_0^{(2)}$	$s_1^{(2)}/s_0^{(2)}$	$s_2^{(2)}/s_0^{(2)}$	$\mathrm{Im}(R_{\kappa\kappa_i}(E1))$
K	1	2	.2543 (0)	−.1418 (0)	.3664 (−1)	3	−.2240 (−3)	−.1491 (0)	.3408 (−1)	−.4438 (0)
-1	−2	4*	−.2770 (−3)	−.2324 (0)	.3550 (−1)	3	−.5312 (−3)	−.4708 (−1)	.6555 (−2)	.9071 (0)
L_1	1	2	.1054 (0)	−.1418 (0)	.3664 (−1)	3	−.9283 (−4)	−.1491 (0)	.3408 (−1)	−.1452 (0)
-1	−2	4*	−.1213 (−3)	−.2324 (0)	.3550 (−1)	3	−.2322 (−3)	−.4709 (−1)	.6555 (−2)	.3486 (0)
L_{II}	−1	2	−.4693 (−1)	−.1418 (0)	.3665 (−1)	3	.2588 (−3)	−.7486 (−1)	.1277 (−2)	−.7021 (−1)
1	2	4*	−.1403 (−4)	−.2263 (0)	.3500 (−1)	3	−.2571 (−4)	.4581 (−1)	.6417 (−2)	.1869 (0)
L_{III}	−1	4*	.3472 (−4)	−.2341 (0)	.3585 (−1)	3	−.6119 (−4)	−.4532 (−1)	.6234 (−2)	.6870 (−1)
−2	2	4*	.9188 (−6)	.1021 (0)	.6243 (−2)	5*	−.1307 (−8)	−.7860 (−1)	.1773 (−1)	.9080 (−2)
	−3	6*	−.3232 (−9)	.2546 (0)	.2831 (−1)	5*	.5161 (−9)	.4842 (−1)	.8403 (−2)	.1357 (0)

[15] NILSSON, S. G., and J. O. RASMUSSEN: Nuclear Phys. **5**, 617 (1958).

[16] EMERY, G. T., and M. L. PERLMAN: Phys. Rev. **151**, 984 (1966).

[17] CHURCH, E. L., and J. WENESER: Nuclear Phys. **28**, 602 (1961).

[18] HAGER, R., and E. SELTZER, in: Internal conversion processes (J. HAMILTON, ed.). New York: Academic Press 1966.

Table 2. *Different notations of the nuclear parameters. The nuclear parameters in the present notation are expressed in terms of the notation of earlier authors*

Present	Corresponding notation of earlier authors	Reference	Remarks
$\frac{\eta_0}{1+c}\left(1+\frac{s_1^{(1)}\eta_1}{s_0^{(1)}\eta_0}\right)$	$(1+\sigma_j'')\sqrt{\frac{L+1}{L}}\,kR\lambda_j''$	Church and Weneser[5]	Defined in [5] for the K-shell and correct for $j=L-\frac{1}{2}$, only
$\frac{\xi_0}{1+c}\left(1+\frac{s_1^{(2)}\xi_1}{s_0^{(2)}\xi_0}\right)$	$(1+\sigma_j')\sqrt{\frac{L+1}{L}}\,\lambda_j'$	Church and Weneser[5]	Church and Weneser give also the relation to the notation of Green and Rose[6]
$\frac{\eta_0}{1+c}$	$-\frac{2}{3R}\sqrt{\frac{3}{\pi\alpha}}\cdot Y$	Emery and Perlman[16]	only for $E1$
$\frac{\xi_0}{1+c}$	$\frac{1}{R^2}\sqrt{\frac{3}{\pi\alpha}}\cdot X$	Emery and Perlman[16]	only for $E1$
$\frac{\eta_m}{1+c}$ $m=0,1,\ldots$	$-\frac{2}{3}\lambda_s$ $s=0,2,4\ldots$	Kramers and Nilsson[12]	only for $E1$

The approximation of Sliv which uses surface currents and charges corresponds to the special values $\xi_i=1$ and $\eta=0$.

III. Numerical Results

We have developed a computer program for the calculation of internal conversion matrix elements. All theoretical values have been computed separately, thus avoiding any kind of interpolation error. The technical details of these calculations are described in ref. [9]. We may only mention here the use of the Thomas-Fermi-Dirac potential for the description of the screening of the atomic electrons and the assumption of a sharp edge nucleus of radius $R=1.20\cdot A^{\frac{1}{3}}\cdot 10^{-13}$ cm.

In the following we present our results for a number of pure electric dipole transitions whose conversion coefficients are assumed to be anomalous. The normal L_{III} coefficient is a common feature of all these transitions and shows that a possible magnetic quadrupole ($M2$) admixture must be small.

In the M shell we observe the same behaviour, i.e. only M_I and M_{II} are anomalous, while M_{III}, M_{IV}, M_V are normal within the limits of error. Thus, all deviations arise from the $s_{\frac{1}{2}}$ and $p_{\frac{1}{2}}$ bound states and are

connected with the existence of the nuclear current matrix element η which is defined in Eq. (7). The nuclear charge matrix element ξ occurs in all bound states except M_V. From nuclear model calculations one finds that ξ should be of the same order of magnitude as η. Since the coefficients of ξ (a_3, a_4 and a_5) are smaller by orders of magnitude than the corresponding coefficients of η (a_1 and a_2) the charge parameter contributes negligibly to the anomaly factor and will thus be neglected in the following. Therefore, the anomaly factor contains only one parameter η which must be consistent with all conversion coefficients and particle parameters (K, L_I, L_{II}, M_I, M_{II} shell) of the specific nuclear transition. Nevertheless, we have determined ξ in all mentioned cases. It is consistent with zero.

In this paper we will not give a detailed discussion of the nuclear matrix elements in terms of nuclear models and will restrict ourselves to the extraction of η from the experimental conversion coefficients using the results of our recalculation.

3.1. L and M Subshell Conversion Coefficients in the Electric Dipole Transitions of Pa^{231} and Pa^{233}

All experimental values in this section are taken from the extensive compilation of $E1$ conversion coefficients given by ASARO, STEPHENS,

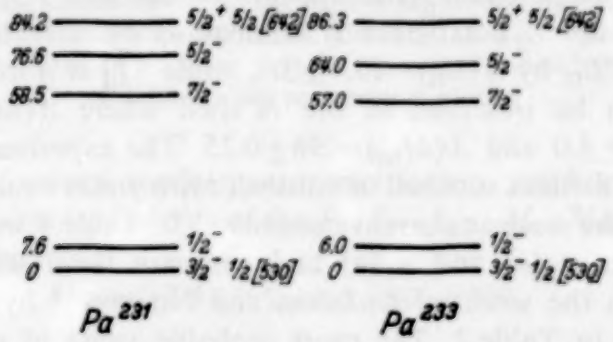


Fig. 1. Partial level scheme of Pa^{231} and Pa^{233}

HOLLANDER, and PERLMAN[11]. These authors have pointed out the anomalies of the experimental values for the L_I, L_{II}, M_I and M_{II} subshells in quite a number of cases of which we will give the results of our investigation in the following. Sometimes we will refer to these authors as ASHP.

25.7 keV Transition in Pa^{231}. The M-subshell conversion ratios were measured in the decays of U^{231} and Th^{231} by ASARO *et al.*[11], and by JULIANO[19] in the case of Th^{231} decay. The difference of their results,

[19] JULIANO, J. O.: Ph. D. Thesis, University of California, Radiation Laboratory Report UCRL-3733, April 1957 (unpublished).

especially of the M_I/M_{III} ratio, is considerable. This can be seen in Table 3 where their results are listed together with our theoretical values.

The values of JULIANO agree approximately with the static conversion coefficients. Within an error limit of 25% the value $|\eta| \leqq 0.5$ can be

Table 3. *M subshell conversion coefficient ratios of the 25.7 keV transition in* Pa^{231}

M_I	M_{II}	M_{III}	M_{IV}	M_V	
0.69	0.74	1.00	0.3	0.3	JULIANO, Th^{231} decay [19]
0.38	0.61	1.00	0.38	0.38	HOLLANDER, Th^{231}
0.45	0.83	1.00	0.23	0.22	HOLLANDER, U^{231}
0.59	0.72	1.00	0.3	0.36	present theory
0.66	0.76	1.00	0.41	0.49	theory (unscreened point nucleus) [1]

extracted from his results. The ratios of HOLLANDER obtained from the Th^{231} decay are notably consistent with the theory assuming for the current parameter the value $\eta = +0.4 \pm 0.3$. The ratios obtained from the U^{231} decay differ considerably from the theoretical static values. Furthermore, the evaluation of the M_I/M_{III} ratio leads to the value $\eta = 0.75 \pm 0.5$, while for M_{II}/M_{III} we obtain $\eta = -0.3 \pm 0.6$.

84.2 keV Transition in Pa^{231}. The largest known anomaly factor of internal conversion coefficients appears in the 84.2 keV transition of Pa^{231}, where the L_I coefficient is anomalous by a factor of $\Delta(L_I) = 20.1 \pm 3.1$ and L_{II} by $\Delta(L_{II}) = 15.4 \pm 3.5$, while L_{III} is normal. A similar behaviour can be observed in the M shell where $\Delta(M_I) = 22.7 \pm 3.0$, $\Delta(M_{II}) = 22.0 \pm 4.0$ and $\Delta(M_{III}) = .96 \pm 0.25$. The experimental anomaly factor for one distinct subshell or subshell ratio yields usually two different values of the nuclear current parameter. In Table 4 we list therefore the two values $\eta_1(\sigma)$ and $\eta_2(\sigma)$ and compare them with the values extracted from the work of KRAMERS and NILSSON [12] by means of the relation given in Table 2. The most probable value of η must be the same for all subshells and is also given in Table 2. Accidentally the two values of $\eta = -7.2 \pm 0.7$ and $\eta = 8.0 \pm 1.0$ are consistent with all subshell datas. In Fig. 2 we have plotted the experimental and theoretical anomaly factors as a function of η. The ambiguity in the determination of η could be removed by the measurement of the total L shell particle parameter (see Fig. 2), which is given by the expression:

$$b_2(L) = -1.493 \cdot \frac{1 - 0.270\eta + 0.000344\eta^2}{1 - 0.174\eta + 0.206\eta^2},$$

i.e.

$$b_2(L) = -0.32 \pm 0.01 \quad \text{for} \quad \eta = -7.2 \pm 0.7$$

or

$$b_2(L) = +0.135 \pm 0.001 \quad \text{for} \quad \eta = 8.0 \pm 1.0.$$

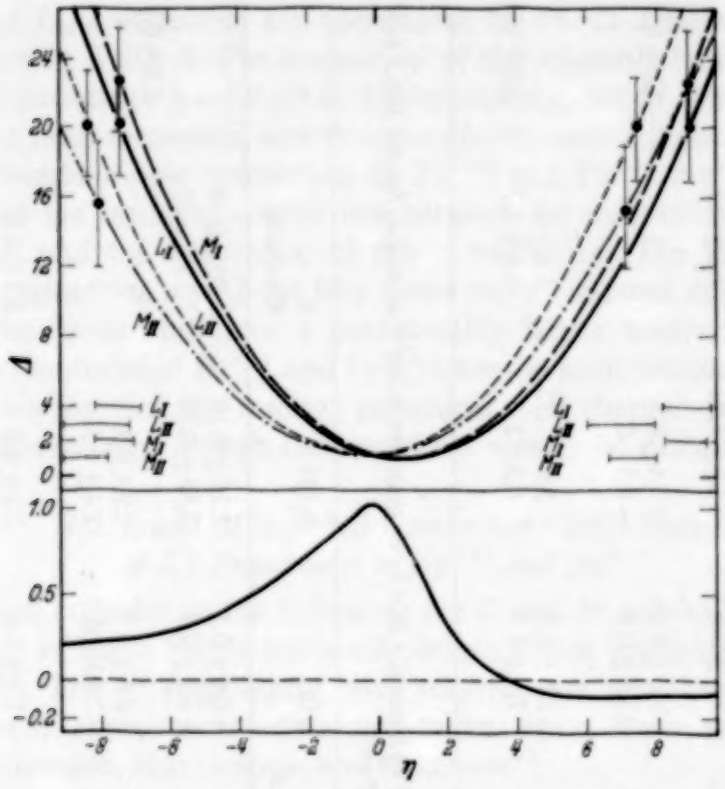


Fig. 2. Anomaly factors for the 84.2 keV transition of Pa^{231}. In the upper part the theoretical anomaly factors for the L_I, L_{II}, M_I and M_{II} subshell is plotted as a function of η together with their experimental values. The range of η, consistent with the limits of error is shown below. In the lower part the theoretical anomaly factor of the total L shell particle parameter is plotted

If we take the second nuclear parameter into account we can fit with the six conversion coefficients of the L_I, L_{II}, L_{III}, M_I, M_{II}, M_{III} shell by the two solutions:

$$\eta = -7.5 \pm 0.5, \quad \xi = 100 \pm 200,$$

$$\eta = 8.5 \pm 0.5, \quad \xi = 300 \pm 200.$$

In the first solution ξ is consistent with zero whereas in the second the value of ξ is very large and can hardly be understood by a nuclear model. Thus, we believe the value of $\eta = -7.5 \pm 0.5$ to be the correct one.

29.3 keV Transition in Pa^{233}. The experimental M subshell ratios[11] of the 29.3 keV transition are found to be $M_I/M_{II}/M_{III}/M_{IV}+M_V =$ 0.8/0.9/1.0/0.6 and seem to agree with the theoretical values 0.66/0.75/ 1.0/0.6. In spite of the large experimental errors we have determined an upper limit of the current parameter to be $\eta = -0.2 \pm 0.4$.

86.3 keV Transition of Pa^{233}. Although the experimental L shell conversion coefficients of the 86.3 keV transition in Pa^{233} have large errors,

Table 4. *Experimental conversion coefficients and anomaly factors of the 84.2 keV transition of Pa^{231} and the 86.3 keV transition of Pa^{233}*

	E (keV)	σ	α experimental	$\Delta(\sigma)$ anomaly factor	$\eta_1(\sigma)$	$\eta_2(\sigma)$	η Kramers	η
Pa^{231}	84.2	L_I	$1.3 \pm 0.2\,(0)$	20.1 ± 3.1	$+9.0 \pm 0.7$	-7.2 ± 0.6	$+8.7 \pm 0.6$	
		L_{II}	$6.5 \pm 1.5\,(-1)$	15.4 ± 3.5	$+7.1 \pm 1.0$	-7.8 ± 1.0	$+7.1 \pm 0.7$	
		L_{III}	$4.6 \pm 1.4\,(-2)$	1.17 ± 0.36				
		M_I	$3.4 \pm 0.5\,(-1)$	22.7 ± 3.0	$+9.0 \pm 0.6$	-7.4 ± 0.7		-7.2 ± 0.7
		M_{II}	$2.1 \pm 0.4\,(-1)$	$22. \pm 1.0$	$+7.5 \pm 0.6$	-8.3 ± 0.7		
		M_{III}	$9.0 \pm 2.2\,(-3)$	$.96 \pm 0.25$				
Pa^{233}	86.3	L_I	$3.5 \pm 1.5\,(-1)$	5.7 ± 2.4	3.3 ± 1.0	$5.0 \pm .75$	4.6 ± 1	
		L_{II}	$5.7 \pm 2.6\,(-1)$	14.5 ± 6.5	7.5 ± 1.5	6.5 ± 1.5	6.6 ± 1.7	5.0 ± 1.0
		L_{III}	$8.0 \pm 8.0\,(-2)$	2.2 ± 2.2				

Table 5. *Experimental conversion coefficients and anomaly factors for the 59.4 keV and the 26.4 keV transition in Np^{237} as well as for the 106.1 keV transition in Pa^{239}*

	E (keV)	σ	$\alpha(\sigma)$ experimental	$\Delta(\sigma)$ anomaly factor	$\eta_1(\sigma)$	$\eta_2(\sigma)$	η Kramers	η
Np^{237}	59.6	L_I	$2.2 \pm 0.2\,(-1)$	1.64 ± 0.14	-0.6 ± 0.1	2.15 ± 0.10	2.20 ± 0.20	
		L_{II}	$4.6 \pm 0.5\,(-1)$	3.72 ± 0.40	-3.1 ± 0.3	2.55 ± 0.20	3.15 ± 0.25	
		L_{III}	$1.2 \pm 0.05\,(-1)$	0.96 ± 0.04				2.2 ± 0.3
		M_I	$5.1 \pm 1.0\,(-2)$	1.58 ± 0.30	-0.6 ± 0.2	1.9 ± 0.3		
		M_{II}	$1.1 \pm 0.22\,(-1)$	4.15 ± 0.82	-2.90 ± 0.8	2.4 ± 0.5		
		M_{III}	$3.9 \pm 1.2\,(-2)$	1.36 ± 0.41				
Np^{237}	26.4	L_I	$2.0 \pm 0.4\,(0)$	3.5 ± 0.7	-2.8 ± 1.0	2.2 ± 0.3	2.3 ± 0.2	
		L_{II}	$3.9 \pm 0.8\,(0)$	3.5 ± 0.7	-1.1 ± 0.3	2.5 ± 0.3	2.4 ± 0.3	2.4 ± 0.3
		L_{III}	$1.2 \pm 0.3\,(0)$	0.82 ± 0.2				
Pu^{239}	106.1	L_I	$6.2 \pm 0.7\,(-2)$	1.52 ± 0.17	-0.6 ± 0.15	1.90 ± 0.15	2.4 ± 0.2	2.0 ± 0.2
		L_{II}	$7.1 \pm 0.7\,(-2)$	2.80 ± 0.28	-2.6 ± 0.3	2.05 ± 0.20	2.35 ± 0.25	

the L_{I} and L_{II} coefficients are anomalous by about a factor of ten as can be seen in Table 4. The evaluation of the anomaly factors leads to a nuclear parameter $\eta = 5.0 \pm 1.0$. Unfortunately, no M subshell coefficients have been measured, and thus the above result cannot be checked.

The electric dipole transitions in Pa^{231} and Pa^{233} are a very fine example of the intimate connection between the anomalies in internal conversion and the hindrance of the γ transition. The 84.2 and the 86.3 keV transitions are about fifty times more hindered than the lower energy transitions and have a considerably larger nuclear parameter. Although the nuclei of Pa^{231} and Pa^{233} have the same intrinsic structure, it is noteworthy that the nuclear parameter η of the two isotopes may have a different sign though this could not simply be explained.

3.2. L and M Subshell Conversion Coefficients of E1 Transitions in Np^{237} and Pu^{239}

We shall consider in the following the L and M subshell conversion coefficients of some highly hindered electric dipole transitions in Np^{237} and Pu^{239}. The corresponding level schemes are given in Fig. 3. All unreferenced experimental data are taken again from the paper of ASARO, STEPHENS, HOLLANDER, and PERLMAN[11].

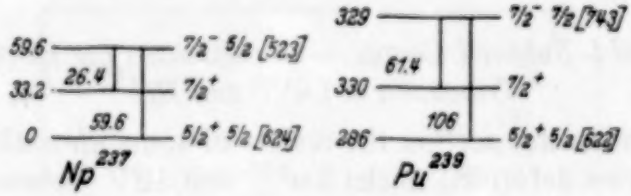


Fig. 3. Partial level scheme of Np^{237} and Pu^{239}

59.6 keV Transition in Np^{237}. The L subshell ratios of the conversion electron intensities in this transition have been studied by different groups. ASARO *et al.*[11] have summarized their results and derived from these the L shell coefficients making use of the knowledge of the total L shell conversion coefficient and obtain L_{I}, L_{II}, $L_{\mathrm{III}} = 0.22$, 0.46, 0.12. The corresponding theoretical values are 0.134, 0.124, 0.124. The anomaly of the L_{I} and L_{II} coefficients leads to the value $\eta = 2.2 \mp 0.3$. This value of η agrees with the experimental M shell coefficients for which BARANOV and SHLYAGIN[20] reported $M_{\mathrm{I}}/M_{\mathrm{II}}/M_{\mathrm{III}} = 1.3/2.8/1.0$, while RASMUSSEN, CANAVAN, and HOLLANDER[21] found the ratios 1.7/3.6/1.0/0.1 for $M_{\mathrm{I}}/M_{\mathrm{II}}/M_{\mathrm{III}}/M_{\mathrm{IV}} + M_{\mathrm{V}}$. The theoretical values are 1.14/0.94/1.00/0.29. As can be seen in Table 5 both experimental results are consistent with the η value

[20] BARANOV, S. A., and K. N. SHLYAGIN: JETP **3**, 200 (1965).

[21] RASMUSSEN, J. O., F. L. CANAVAN, and J. M. HOLLANDER: Phys. Rev. **107**, 141 (1957).

found from the L subshell coefficients. For the determination of η, we made use of the absolute values as derived by ASHP. It should be mentioned that the ratio $M_{IV}+M_V/M_{III}$ deviates by a factor of 3 from the theoretical value. There seems to be no theoretical reason for this disagreement which cannot be removed neither by the additional introduction of the parameter ξ nor by assuming a $M2$ admixture.

26.4 keV Transition in Np^{237}. The L subshell ratios are deduced indirectly by ASHP by using the photon intensities of 59.6 and 26.4 keV transitions and the total conversion coefficient of the 59.6 keV transition. Their results are L_I, L_{II}, $L_{III}=2.0$, 3.9, 1.2 with a relative error of about 25%. The corresponding theoretical values are 0.576, 1.12, 1.47. Obviously, L_I and L_{II} are anomalous, while the result for L_{III} lies within the limits of error. These anomalies are consistent with the value $\eta=2.4\mp0.3$ (see Table 5).

106.1 keV Transition of Pu^{239}. Ewan, Knowles, and MacKenzy[22] claim a very accurate measurement of absolute L-subshell measurements for the 106.1 keV transition in Pu^{239}, i.e. L_I, $L_{II}=0.062$, 0.071 with a relative error of 10%. Although the L_{III} coefficients could not be measured the L_I and L_{II} coefficients are apparently anomalous. The evaluation of the anomaly factors leads to the value of $\eta=2.0\pm0.2$ (see Table 5).

3.3. K and L Subshell Conversion Coefficients for Electric Dipole Transition in Lu^{175} and Hf^{177}

We present in this section the results of some anomalous $E1$ transitions of the two deformed nuclei Lu^{175} and Hf^{177} whose level scheme is given in Fig. 4.

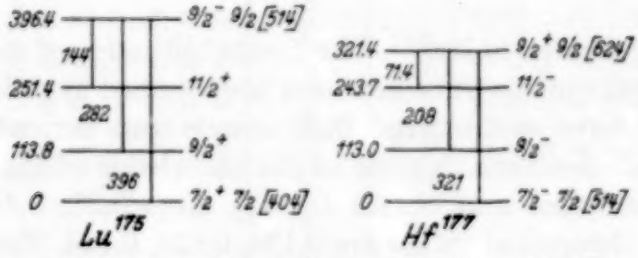


Fig. 4. Partial level scheme of Lu^{175} and Hf^{177}

144.8 keV Transition in Lu^{175}. Hager and Seltzer[18] give as experimental conversion coefficients of the 144.8 keV transition for K, L_I the values 0.84 ± 0.06 (−1), 0.87 ± 0.08 (−2) and for the ratio $L_I/L_{II}=3.2\pm0.6$ (0). This does neither agree with the theoretical values K, L_I, $L_{II}=1.10$ (−1), 1.21 (−2), 0.257 (−2), $L_I/L_{II}=4.7$, nor with the experimental

[22] Ewan, G. T., J. W. Knowles, and D. R. MacKenzy: Phys. Rev. **108**, 1308 (1957).

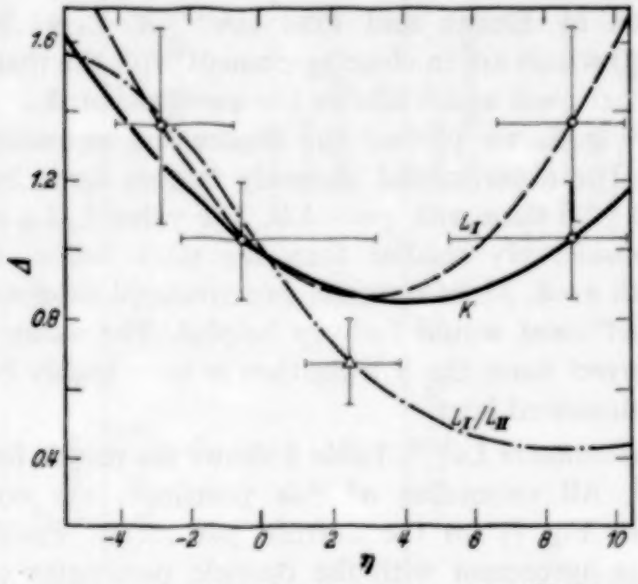


Fig. 5. Anomaly factors for the 144.2 keV transition in Lu^{175}. The anomaly factor of the K and L_I shell is plotted as a function of η. The experimental anomaly factors, obtained from the data of EMERY[16] are indicated by circles, while the L_I/L_{II} experimental anomaly factor obtained by HAGER and SELTZER[18] is characterized by a triangle

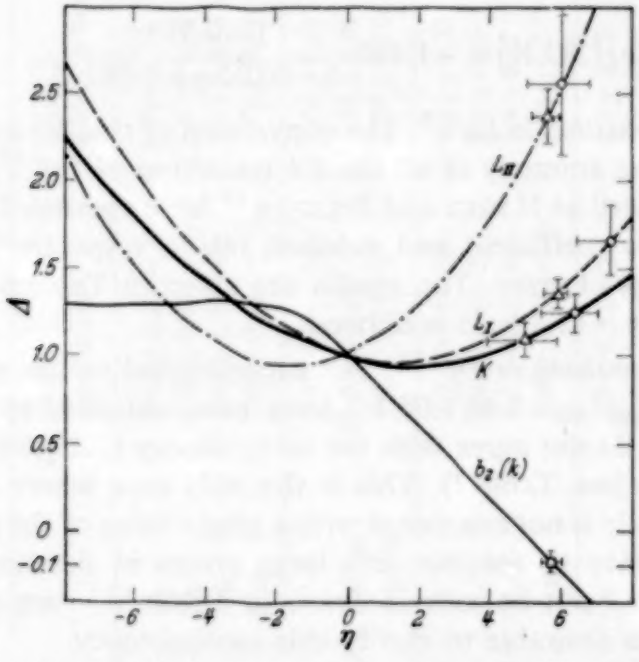


Fig. 6. Anomaly factors of the 828 keV transition in Lu^{175}. The figure shows the theoretical and the corresponding experimental anomaly factors of the K, L_I and the L_{II} shell, as well as of the K shell particle parameter. The experimental anomaly factors taken from the data of EMERY[16] are characterised by open circles, those of HAGER[18] are designated by a triangle, while the anomaly factor of the particle parameter[23] carries a square

values obtained by Emery and Perlman[16] K, $L_I = 1.14 \pm 0.19\,(-1)$, $1.65 \pm 0.34\,(-2)$ which are in close agreement with the theory. From the latter data we get $\eta \sim 0$ which allows the assumption that penetration is negligible. In Fig. 5, we plotted the theoretical anomaly factor as a function of η. The experimental anomaly factors agree better with the value $\eta = +8.0 \pm 2.5$ than with $\eta \sim -1.0$. The value L_I/L_{II} of Hager and Seltzer is considerably smaller than the static value, but is not in accordance with $\eta = 8$. More accurate experimental determination of the L_{II} subshell coefficient would be very helpful. The value $\eta = 8$ is more likely to be correct since the γ transition is very highly hindered. This point shall be discussed later.

282 keV Transition in Lu^{175}. Table 6 shows the results for the 282 keV transition[16, 18]. All anomalies of this transition are consistent with $\eta = 5.8 \pm 0.2$ (see Fig. 7) for the current parameter. Furthermore, this value of η is in agreement with the particle parameter of the K-shell which has been remeasured by Thun[23] with the result $b_2(K) = +.28 \pm 0.06$. The anomaly factor δ of the particle parameter is defined similarly as Δ in Eq. (13) by

$$b_2 = b_2^{(0)} \cdot \delta .$$

The numerical values for this transition are

$$b_2(282\,\mathrm{K}) = -1.486\,\frac{1 - 0.212\eta}{1 - 0.055\eta + 0.087\eta^2} .$$

396 keV Transition in Lu^{175}. The conversion of the 396 keV transition has the strongest anomaly of all the $E1$ transition of Lu^{175}. Emery and Perlman[16] as well as Hager and Seltzer[18] have measured the K and L shell conversion coefficient and subshell ratios, respectively and agree within the limits of error. The results are given in Table 6. From their data a value $\eta = -12.8 \pm .75$ is derived.

71.6 keV Transition in Hf^{177}. The experimental values of the L-subshell ratios $L_I/L_{II}/L_{III} = 2.45/1.05/1.0$ have been obtained by Hager and Seltzer[18] and do not agree with the static theory (2.25/.84/1.00) within the error limits (see Table 7). This is the only case where an apparent but weak anomaly is not consistent with a single value of the parameter η. We therefore have to assume very large errors in determining η, i.e. $\eta = 0.8 \pm 2.0$. This can be seen in detail in Table 7. More experimental results would be desirable to clarify this inconsistency.

208.4 keV Transition in Hf^{177}. The experimental subshell ratios[18] are given in Table 7. The K shell conversion coefficient as well as the L_I/L_{III} ratio agree very well with the static theoretical values while the subshell

[23] Thun, J. E.: Institute of Physics, University of Uppsala, Report No. UUIP 476, 1966 (unpublished).

Table 6. *Experimental conversion coefficients and anomaly factors for the 282 keV and the 396 keV transition of Lu^{175}*

	E (keV)	σ	$\alpha(\sigma)$ experiment	$\Delta(\sigma)$ anomaly factor	$\eta(\sigma)$	η present	η other authors	
Lu^{175}	282	K	$2.45 \pm 0.24\ (-2)$	1.24 ± 0.12	6.3 ± 0.8	$5.75 \pm .5$	5.7	Emery and Perlman
		L_{I}	$4.03 \pm 0.44\ (-3)$	1.67 ± 0.18	7.5 ± 1.0			
		L_{II}	$8.03 \pm 1.6\ (-4)$	2.57 ± 0.46	6.0 ± 0.8			
		L_{III}	$3.20 \pm 0.43\ (-4)$	1.02 ± 0.14				
		K	$2.2 \pm 0.1\ (-2)$	1.09 ± 0.05	5.0 ± 1.0			Hager and Seltzer
		$L_{\mathrm{I}}/L_{\mathrm{III}}$	$10.5 \pm 0.6\ (0)$	1.38 ± 0.08	5.6 ± 0.4			
		$L_{\mathrm{II}}/L_{\mathrm{III}}$	$2.44 \pm 0.16\ (0)$	2.38 ± 0.16	5.9 ± 0.4			
Lu^{175}	396	K	$4.2 \pm 0.3\ (-2)$	4.67 ± 0.33	$-13.5 \pm .75$	$-12.8 \pm .75$	-13.8	Emery and Perlman
		L_{I}	$6.4 \pm 0.6\ (-3)$	5.9 ± 0.55	$-14.2 \pm .75$			
		L_{II}	$6.2 \pm 0.7\ (-4)$	5.4 ± 0.61	$-12.7 \pm .75$			
		L_{III}	$1.09 \pm 0.12\ (-4)$	1.01 ± 0.11				
		K	$3.7 \pm 0.2\ (-2)$	4.1 ± 0.22	$-12.8 \pm .5$			Hager and Seltzer
		$L_{\mathrm{I}}/L_{\mathrm{III}}$	$53.0 \pm 3.0\ (0)$	5.3 ± 0.3	$-13.2 \pm .5$			
		$L_{\mathrm{II}}/L_{\mathrm{III}}$	$5.8 \pm 0.3\ (0)$	5.5 ± 0.3	$-12.8 \pm .4$			

ratio L_{II}/L_{III} has a tiny anomaly. Both are consistent with the value $\eta = -0.4 \pm 0.3$.

321.0 keV Transition in Hf^{177}. The large anomaly of the experimental K and L-subshell conversion coefficients has been reported by Hager and Seltzer[18] and are shown in Table 7. The anomaly factor of the K, L_I and L_{II} shell is about a factor of five and understood by the value $\eta = -14.0 \pm 0.3$. Since this transition is extremely hindered, this large value of η may be expected.

Table 7. *Experimental conversion coefficients and anomaly factors for the 71.6 keV, the 208 keV and the 321 keV transitions in Hf^{177}*

	E (keV)	σ	$\alpha(\sigma)$ experimental	$A(\sigma)$	$\eta(\sigma)$	η	Ref.
Hf^{177}	71.6	L_I/L_{III}	2.45 ± 0.30	1.09 ± 0.135	-0.7 ± 0.9	0.8 ± 2.0	11
		L_{II}/L_{III}	1.05 ± 0.15	1.25 ± 0.18	2.5 ± 1.6		
Hf^{177}	208	K	0.045 ± 0.002	1.01 ± 0.045	-0.3 ± 1.7	-0.4 ± 0.3	11
		L_I/L_{III}	5.9 ± 0.2	1.01 ± 0.04	-0.3 ± 1.7		
		L_{II}/L_{III}	0.93 ± 0.03	0.93 ± 0.93	-1.5 ± 1.0		
Hf^{177}	321	K	0.084 ± 0.004	5.5 ± 0.26	-15.4 ± 0.5	-14.0 ± 3.0	11
		L_I/L_{III}	$54. \pm 19.$	6.5 ± 2.3	-14.0 ± 3.0		
		L_{II}/L_{III}	6.3 ± 3.2	6.0 ± 3.2	-13.0 ± 4.0		

IV. Summary and Discussion

The introduction of a finite nuclear size in internal conversion gives rise to new nuclear matrix elements which differ from those of the usual radiative transition. The theory has been formulated in terms of only two well defined nuclear parameters which are independent of the atomic subshell and of the nuclear transition energy. For one distinct nuclear transition these parameters can be determined by a sufficient number of conversion experiments like conversion coefficients or particle parameters of the different subshells. In electric dipole transitions, only the parameter η has to be taken into account. The parameter ξ does hardly contribute because of a particular cancellation in the electron wave functions.

The parameter η is only important for conversions where the bound state is in a $s_{\frac{1}{2}}$ and $p_{\frac{1}{2}}$ state. This is the case for the K, L_I, L_{II}, M_I, M_{II}... subshells and causes the partially large anomaly which has been observed in the experimental conversion coefficients and particle parameters of these shells. For the L_{III}, M_{III}, M_{IV}, M_V subshells, the experimental conversion data seem to agree with the usual non penetration theory.

In section III we have determined η in about thirteen transitions, and shown that one value of η is consistent with all conversion data of a

Table 8. *Nuclear current parameter η. The present results of η are compiled and compared with the inverse transition probability in Weisskopf units, H_W^{-1}. Spin and parity of the initial and final states are as well as their asymptotic quantum numbers given in column 4 and 5. The numbers in column 1 label the different cases (see also Fig. 8)*

n	Nucleus	*E* (keV)	I_i $I_i \pi_i \Omega_i[N, n_z, \Lambda]$	I_f	H_W^{-1}	η	
1	$_{71}Lu^{175}$	144.8	$9/2^-$, 9/2 [514]	$11/2^+$, 7/2 [404]	1.27 (6)	8.0 ± 2.5	*K* allowed
2		282.0		$9/2^+$, 7/2 [404]	9.1 (5)	5.75 ± 0.5	
3		396.0		$7/2^+$, 7/2 [404]	1.98 (6)	-12.8 ± 0.75	
4	$_{71}Lu^{177}$	150.3	$9/2^-$, 9/2 [514]	$7/2^+$, 7/2 [404]	2.70 (6)	14.0 ± 2.0	*K* allowed
5	$_{91}Pa^{231}$	25.7	$5/2^+$, 5/2 [642]	$7/2^-$, 1/2 [530]	3.05 (4)	$\lvert\eta\rvert < 1.0$	*K* forbidden
6		84.2		$3/2^-$, 1/2 [530]	1.78 (6)	8.5 ± 0.5 [a]	
						-7.5 ± 0.5 [b]	
7	$_{91}Pa^{233}$	29.3	$5/2^+$, 5/2 [642]	$7/2^-$, 1/2 [530]	4.0 (4)	-0.2 ± 0.4	*K* forbidden
8		86.4		$3/2^-$, 1/2 [530]	9.1 (5)	5.0 ± 1.0	
9	$_{93}Np^{237}$	26.4	$5/2^-$, 5/2 [523]	$7/2^+$, 5/2 [624]	2.54 (5)	2.4 ± 0.3	*K* allowed
10		59.6		$5/2^+$, 5/2 [624]	2.04 (5)	2.2 ± 0.5	
11	$_{94}Pa^{239}$	106.1	$7/2^-$, 7/2 [743]	$5/2^+$, 5/2 [622]	1.59 (6)	2.0 ± 0.2	*K* allowed
12	$_{72}Hf^{177}$	71.6	$9/2^+$, 9/2 [624]	$11/2^-$, 7/2 [514]	2.78 (5)	$+0.8 \pm 2.0$	*K* allowed
13		208.4		$9/2^-$, 7/2 [514]	2.18 (4)	$-0.6 \pm .4$	
14		321.4		$7/2^-$, 7/2 [514]	4.35 (6)	-1.60 ± 2.0	

distinct nuclear transition. The obtained values of η are compiled in Table 8. However, there are three exceptions of this general result. In the 321 keV transition of Hf^{177} the absolute sign of η can not be fixed,

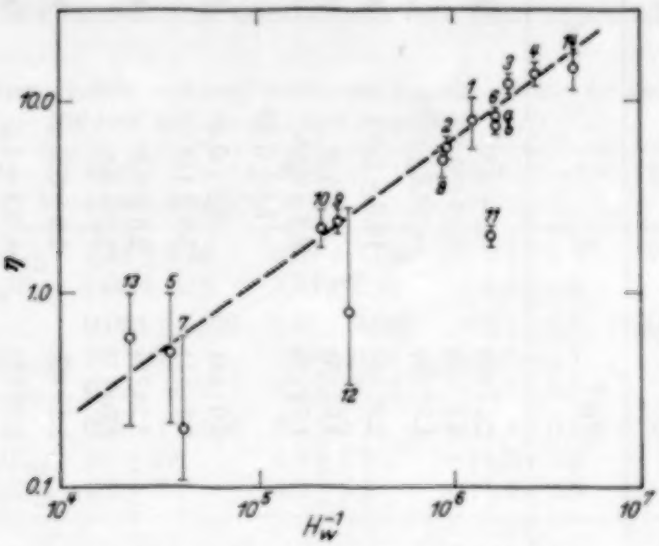


Fig. 7. The nuclear current parameter as a function of the hindrance. We have plotted the experimental nuclear current parameter η versus the hindrance, i.e. the inverse reduced transition probability in units of the Weisskopf estimates. The numbers refer to Table 8, were the corresponding nuclear transitions are given

a measurement of the total *L* shell particle parameter would contribute to the final decision. In the 71.6 keV transition of the same nucleus, the *L* subshell conversion coefficients or ratios should be remeasured in order to enable an exacter determination of the value of η. For the same reason, all *L* subshell ratios of the 144.8 keV transition in Lu^{175} should be remeasured.

As mentioned earlier and also suggested by CHURCH and WENESER[4] the anomaly of internal conversion and the retardation of the γ transition are closely connected. In Table 8 the inverse transition probability in Weisskopf units H_W^{-1} are given as extracted from the review article of PERDRISAT[24]. The absolute values $|\eta|$ are plotted as a function of the hindrance H_W^{-1} in Fig. 7. There seems to be a simple connection between η and hindrance. Thus, the larger value $\eta = 8.0$ for the 144.8 keV transition of Lu^{175} seems to be more probable than $\eta = -1$, since this transition is very highly hindered.

Some part of this work has been done during the stay of one of the authors (HCP) at the Purdue University. He likes to thank Prof. R. M. STEFFEN for his kind hospitality and interest. He likes to thank Dr. J. WENESER for very interesting and instructive discussions.

[24] PERDRISAT, C. F.: Revs. Modern Phys. **38**, 41 (1966).

Zeitschrift für Physik 202, 273–292 (1967)

Massenspektrometrischer Nachweis von ββ-Zerfallsprodukten

T. KIRSTEN
Max-Planck-Institut für Kernphysik, Heidelberg,
und State University of New York at Stony Brook

W. GENTNER
Max-Planck-Institut für Kernphysik, Heidelberg

O. A. SCHAEFFER
State University of New York at Stony Brook

Eingegangen am 7. März 1967

The principles and methods of mass-spectrometric detection of $\beta\beta$-decay products and the theoretical purposes for such studies are discussed in detail.
We report also the results of our new measurements on two tellurides, one native tellurium sample and one selenide. Concerning the decay $Te^{130} \xrightarrow{\beta^-\beta^-} Xe^{130}$, we have found that Xe^{130} in a native tellurium sample amounts to 67% of the total xenon with an absence of any other anomaly, which is an important improvement over previous measurements. — For the first time the decay $Se^{82} \xrightarrow{\beta^-\beta^-} Kr^{82}$ was studied by mass-spectrometry. A Kr^{82}-excess was positively found in an copper selenide. A detailed discussion of all processes other than double β-decay which might contribute to the Xe^{130} and Kr^{82}-anomalies is undertaken. It can be shown that these effects are small compared to the $\beta\beta$-decay process. It can be said now positively that $\beta\beta$-decay occurs in nature. Discussing all available data we obtained the effective half-life of Te^{130} to be $6 \times 10^{20 \pm 0.3}$ y and that of Se^{82} equals to $6 \times 10^{19 \pm 0.3}$ y. The results are in agreement with the theoretical predictions for the 2ν-$\beta\beta$-decay. Nevertheless, no-neutrino $\beta\beta$-decay is still possible. However, from the data we calculated that the lepton-nonconservation is at most 0.7%.

Diese Arbeit verfolgt zwei Ziele: Erstens soll ein Überblick über die Methode und den gegenwärtigen Stand des massenspektrometrischen Nachweises von $\beta\beta$-Zerfallsprodukten gegeben werden.

Zweitens soll über unsere neuen Meßergebnisse berichtet werden. Dabei wird außer dem Zerfall $Te^{130} \xrightarrow{\beta^-\beta^-} Xe^{130}$ erstmals auch der Zerfall $Se^{82} \xrightarrow{\beta^-\beta^-} Kr^{82}$ behandelt.

1. Theoretische Grundlagen

Die Theorie des doppelten β-Zerfalls wurde entwickelt von GOEPPERT-MAYER[1], FURRY[2], KONOPINSKI[3] und PRIMAKOFF und ROSEN[4]. Zusam-

[1] GOEPPERT-MAYER, M.: Phys. Rev. **48**, 512 (1935).
[2] FURRY, W. H.: Phys. Rev. **56**, 1184 (1939).
[3] KONOPINSKI, E. J.: USAEC Report Los Alamos (1949).
[4] PRIMAKOFF, H., and S. P. ROSEN: Repts. Progr. in Phys. **22**, 121 (1959).

menfassende Darstellungen der Theorie des doppelten β-Zerfalls finden sich bei ROSEN und PRIMAKOFF[5], WU und MOSZKOWSKI[6] und KONOPINSKI[7]. Hier soll nur kurz erläutert werden, welche Folgerungen sich aus der experimentellen Beobachtung des $\beta\beta$-Zerfalls und der Größenordnung der Halbwertszeiten ergeben können.

Als doppelten β-Zerfall ($\beta\beta$-Zerfall) bezeichnet man die gleichzeitige Emission von zwei β-Teilchen aus einem Kern. Wenn immer der einfache β-Zerfall energetisch möglich ist, ist seine Zerfallswahrscheinlichkeit viel größer als die des $\beta\beta$-Zerfalls. Aussicht auf Beobachtung des $\beta\beta$-Zerfalls besteht daher nur, wenn der einfache β-Zerfall energetisch unmöglich oder hoch verboten, der $\beta\beta$-Zerfall aber energetisch möglich ist. $\beta\beta$-Zerfall kann im Prinzip sowohl $\beta^-\beta^-$-Zerfall, $\beta^+\beta^+$-Zerfall oder auch doppelter K-Einfang (KK) sein. Auch die Kombination $K\beta^+$ ist denkbar. Die Frage, ob der $\beta\beta$-Zerfall ein existierender Prozeß ist und mit welcher Zerfallswahrscheinlichkeit er erfolgt, ist eng verbunden mit den Fragen nach der Gültigkeit eines Leptonenerhaltungssatzes und nach der Unterscheidbarkeit von Neutrino und Antineutrino, soweit es die diesen zuzuordnenden Leptonenzahlen betrifft. Die Theorie des Dirac-Neutrinos erfordert wegen der Unterscheidbarkeit von ν und $\bar{\nu}$ bezüglich der Leptonenzahl für den doppelten β-Zerfall eine Vierteilchenreaktion gemäß

$$N_Z^A \rightarrow N_{Z+2}^A + 2e^- + 2\bar{\nu} \qquad \text{(hier nur für } \beta^-\beta^- \text{ formuliert)}. \tag{1}$$

Wenn dagegen entsprechend MAJORANA[8] $\nu \equiv \bar{\nu}$ gilt, dann vereinfacht sich die Zerfallsgleichung auf

$$N_Z^A \rightarrow N_{Z+2}^A + 2e^-, \tag{2}$$

weil das virtuell entstehende Antineutrino intermediär reabsorbiert werden kann.

Wenn der Prozeß nach Gl. (1) abläuft, bleibt die Leptonenzahl erhalten, wenn er nach Gl. (2) erfolgt, kann kein Leptonenerhaltungssatz gelten. Wegen des verengten Phasenraumes der Vierteilchenreaktion (1) ist ihre Zerfallswahrscheinlichkeit um einige Größenordnungen geringer als die der Zweiteilchenreaktion (2), sofern man hierfür *vollständige* Verletzung der Leptonenerhaltung annimmt.

Die logische Verknüpfung von $\beta\beta$-Zerfall, Leptonenerhaltung und Neutrinounterscheidbarkeit wie sie die Theorie liefert, soll im folgenden kurz dargestellt werden:

[5] ROSEN, S. P., and H. PRIMAKOFF: In K. SIEGBAHN, Alpha, beta, and gamma-ray spectroscopy, vol. 2, p. 1499. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1965.

[6] WU, C. S., and S. A. MOSZKOWSKI: Beta decay. New York and London: Interscience Publ. 1966.

[7] KONOPINSKI, E. J.: The theory of beta radioactivity. Oxford: Clarendon Press 1966.

[8] MAJORANA, E.: Nuovo cimento **14**, 171 (1937).

a) Wenn *neutrinoloser $\beta\beta$-Zerfall* experimentell völlig *ausgeschlossen* werden kann, können Neutrino und Antineutrino unterschiedliche Leptonenzahlen zugeordnet werden, die Leptonenerhaltung ist garantiert[9].

b) Wenn *neutrinoloser $\beta\beta$-Zerfall* experimentell *beobachtet* wird, kann kein Leptonenerhaltungssatz gelten. Umgekehrt folgt aus der Nichterhaltung der Leptonenzahl, daß neutrinoloser $\beta\beta$-Zerfall zumindest bis zu einem gewissen Grade (proportional zum Grade der Verletzung) stattfinden muß. Bei vollständiger Nichterhaltung ist das Verhältnis der Zerfallswahrscheinlichkeiten

$$(\lambda_{\text{ohne }\nu}/\lambda_{2\,\nu})_{\text{theoret.}}$$

in der Größenordnung 10^5, bei partieller Verletzung entsprechend kleiner. Das Verhältnis

$$V = \left(\frac{\lambda_{\text{ohne }\nu}}{\lambda_{2\,\nu}}\right)_{\text{experim.}} \Big/ \left(\frac{\lambda_{\text{ohne }\nu}}{\lambda_{2\,\nu}}\right)_{\text{theoret.}} \tag{3}$$

ist eine wichtige und im Prinzip experimentell zugängliche Größe, die direkt angibt, bis zu welchem Prozentsatz die Erhaltung der Leptonenzahl verletzt sein kann.

Eine direkte Messung von V ist nur durch Messung der Energiespektren möglich, was jedoch zur Zeit außerhalb der experimentellen Möglichkeiten liegt. (Auf anderem Wege wurde dieser Prozentsatz von Davis[10] zu $<2\%$ bestimmt.) Eine Abschätzung ist im Prinzip auch auf massenspektrometrischem Wege möglich. Wenn die Menge eines $\beta\beta$-Zerfallsproduktes in einem Mineral bekannten Alters gemessen ist, kann man zunächst den Teil abspalten, der der theoretisch vorhergesagten Halbwertszeit nach Gl. (1) entspricht. Setzt man den etwa verbleibenden Rest dazu ins Verhältnis, so erhält man eine Abschätzung des gesuchten Verhältnisses V. Dieses Verfahren ist zulässig, weil aus der Theorie folgt, daß, wenn immer neutrinoloser $\beta\beta$-Zerfall möglich ist, auch die Vierteilchenreaktion stattfindet.

2. Erwartete Halbwertszeiten

Inwieweit eine experimentelle Prüfung der Theorie möglich ist, hängt hauptsächlich von der zu erwartenden Zerfallswahrscheinlichkeit ab, denn nur bei Kenntnis der etwa zu erwartenden Halbwertszeit kann entschieden werden, ob ein negativer Ausgang des Experiments Nichtexistenz der betreffenden Art des $\beta\beta$-Zerfalls oder nur ungenügende Meßempfindlichkeit bedeutet. Durch quantenmechanische Berechnung

[9] Lee, T. D., and C. S. Wu: Ann. Rev. Nuclear Sci. **15**, 433 (1965).

[10] Davis jr., R., and D. S. Harmer: Bull. Am. Phys. Soc. **4**, 217 (1959).

der Übergangswahrscheinlichkeiten haben ROSEN und PRIMAKOFF[5] allgemeingültige Näherungsformeln für alle Arten von $\beta\beta$-Zerfällen berechnet. Diese sollen hier zitiert werden, weil sie das Bindeglied von der Theorie zum experimentellen Nachweis darstellen.

a) Ohne Neutrinoemission (unter der Annahme vollständiger Verletzung der Leptonenerhaltung):

für $\beta^{\mp}\beta^{\mp}$

$$T_{\frac{1}{2}} = 10^{15\pm2}\left(\frac{60}{Z}\right)^2\left(\frac{A}{150}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{8}{E}\right)^6\left(1-\exp\left[\mp\frac{2\pi Z}{137}\right]\right)^2 [\mathrm{a}], \quad (4)$$

für $K\beta^+$

$$T_{\frac{1}{2}} = 5\times10^{18\pm2}\left(\frac{60}{Z}\right)^4\left(\frac{A}{150}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{8}{E}\right)^4\exp\left(\frac{2\pi[Z-60]}{137}\right) [\mathrm{a}], \quad (5)$$

für KK

$$T_{\frac{1}{2}} = 5\times10^{23\pm2}\left(\frac{60}{Z}\right)^8\left(\frac{A}{150}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{8}{E}\right)^5 [\mathrm{a}]. \quad (6)$$

Dabei ist E die Zerfallsenergie in Einheiten von $m_e c^2$ ($=531$ keV), die bei dem Zerfallsprozeß frei wird.

b) Mit Neutrinoemission:

für $\beta^{\mp}\beta^{\mp}$

$$T_{\frac{1}{2}} = 2\times10^{20\pm2,5}\left(\frac{60}{Z}\right)^2\left(\frac{8}{E}\right)^{10}\left(1-\exp\left[\mp\frac{2\pi Z}{137}\right]\right)^2 [\mathrm{a}], \quad (7)$$

für $K\beta^+$

$$T_{\frac{1}{2}} = 3\times10^{22\pm2,5}\left(\frac{60}{Z}\right)^4\left(\frac{8}{E}\right)^7\exp\left(\frac{2\pi[Z-60]}{137}\right) [\mathrm{a}], \quad (8)$$

für KK

$$T_{\frac{1}{2}} = 3\times10^{25\pm2,5}\left(\frac{60}{Z}\right)^6\left(\frac{8}{E}\right)^5 [\mathrm{a}]. \quad (9)$$

Für die Formeln (7), (8), (9) wurde ein Faktor

$$10^{-2}\left(\Delta W+\frac{E}{2}+\begin{Bmatrix}+1\\0\\-1\end{Bmatrix}\right)=1$$

gesetzt. Dem damit verursachten Fehler, der bis zu einem Faktor 3 betragen kann, wurde durch Erhöhung der Fehlergrenze von 2 auf 2,5 Zehnerpotenzen Rechnung getragen. (ΔW bedeutet den mittleren Abstand der Energieniveaus des zerfallenden Kernes.)

Die erwarteten Halbwertszeiten sind prinzipiell sehr hoch (Größenordnung $10^{20\pm5}$ a) und stark abhängig von der Zerfallsenergie ($\sim 1/Z^2E^4$ bis zu $1/Z^2E^{10}$). Generell ist die Halbwertszeit für den neutrinolosen

Zerfall bei vollständiger Verletzung der Leptonenerhaltung etwa 5 bis 8 Größenordnungen kürzer als für den neutrinobegleiteten Zerfall (wegen des verengten Phasenraumes der Vierteilchenreaktion).

3. Möglichkeiten des experimentellen Nachweises

Im Prinzip ist es möglich, die Spuren der simultan emittierten β-Teilchen in der Nebelkammer oder in Kernemulsionen zu beobachten. Eine aussichtsreiche Nachweismethode ist auch die direkte Zählung unter Anwendung der Koinzidenztechnik.

Beide Methoden machen den einzelnen Zerfallsakt sichtbar und erlauben neben der Bestimmung der Halbwertszeit auch Aussagen über die Energieverteilung der β-Teilchen. Bisher waren jedoch alle Versuche des direkten Nachweises des $\beta\beta$-Zerfalls erfolglos (Experimente bis 1964 referiert in ROSEN und PRIMAKOFF[5], außerdem LAZARENKO und LJUKANOV[11] und EAST[12]). Deshalb kommt der Methode des massenspektrometrischen Nachweises des erwarteten Zerfallsproduktes in geologisch alten Mineralen mit hoher Konzentration des Mutterisotops erhöhte Bedeutung zu. Die Aussicht auf Erfolg ist hier größer, weil das Zerfallsprodukt über geologische Zeiträume akkumuliert und integrierend gemessen wird. Dafür muß in Kauf genommen werden, daß keine Aussagen über die β-Energie gemacht werden können. Es kann auch nicht zwischen $\beta\beta$-Zerfall und zwei aufeinanderfolgenden einfachen β-Zerfällen unterschieden werden. Dies ist jedoch bedeutungslos, wenn der einfache β-Zerfall energetisch unmöglich ist. Problematischer ist, daß die durch $\beta\beta$-Zerfall hervorgerufene Isotopenanomalie nicht von selbst spezifisch sein braucht. Es muß deshalb in jedem Einzelfall sorgfältig geprüft werden, ob die Anomalie vielleicht durch andere Prozesse als den $\beta\beta$-Zerfall entstanden sein kann.

Um eine sehr kleine Menge des Zerfallsproduktes in einem alten Mineral nachzuweisen, müssen die folgenden drei Voraussetzungen erfüllt werden:

a) Die Anfangskonzentration des nachzuweisenden Isotops muß Null oder zumindest sehr klein gewesen sein, als die Akkumulation begann, weil nur dann eine meßbare Isotopenverschiebung resultieren kann. Dies ist am besten erfüllt für Gase, weil während der Mineralbildung normalerweise eine vollständige Entgasung stattfindet.

b) Während der Akkumulation sollen keine Verluste stattfinden. Aktive Gase sind wegen der vielfältigen Möglichkeiten chemischer Reaktionen schwer zu kontrollieren. Daher sind speziell Edelgase am besten geeignet.

[11] LAZARENKO, V. R., and S. Y. LJUKANOV: Soviet Phys. JETP **22**, 521 (1966).
[12] EAST, L. V.: Phys. Rev. **149**, 913 (1966).

Tabelle 1. *Energetisch mögliche ββ-Zerfälle, deren Zerfallsprodukt ein Edelgasisotop ist*

Zerfallsart	Mutterisotop	Natürliche Isotopenhäufigkeit	Tochterisotop	Verbotenes Zwischenglied	Zerfallsenergie (keV)	Referenz für Zerfallsenergien	Erwartete Halbwertszeit MAJORANA [a]	Erwartete Halbwertszeit DIRAC [a]
$\beta^-\beta^-$	0^+ Se^{82}	9,19%	0^+ Kr^{82}	5^- Br^{82}	2956 ± 73	13,14	$1 \times 10^{16 \pm 2}$	$1 \times 10^{22 \pm 2,5}$
$\beta^-\beta^-$	0^+ Te^{130}	34,48%	0^+ Xe^{130}	5 J^{130}	2509 ± 19	14	$2 \times 10^{16 \pm 2}$	$4 \times 10^{22 \pm 2,5}$
$\beta^-\beta^-$	0^+ Te^{128}	31,79%	0^+ Xe^{128}	1^+ J^{128}	850 ± 19	14	$2 \times 10^{19 \pm 2}$	$2 \times 10^{27 \pm 2,5}$
$\beta^-\beta^-$	0^+ Se^{80}	49,82%	0^+ Kr^{80}	1^+ Br^{80}	116 ± 28	13	$3 \times 10^{24 \pm 2}$	$2 \times 10^{36 \pm 2,5}$
$\beta^+\beta^+$	0^+ Ba^{130}	0,1%	0^+ Xe^{130}	1^+ Cs^{130}	424 ± 30	14	$2 \times 10^{23 \pm 2}$	$3 \times 10^{32 \pm 2,5}$
KK	0^+ Ba^{130}	0,1%	0^+ Xe^{130}	1^+ Cs^{130}	2548 ± 24	14	$1 \times 10^{25 \pm 2}$	$6 \times 10^{26 \pm 2,5}$
KK	0^+ Sr^{84}	0,56%	0^+ Kr^{84}	2^- Rb^{84}	1749 ± 10	14	$1 \times 10^{27 \pm 2}$	$4 \times 10^{28 \pm 2,5}$
KK	0^+ Ba^{132}	0,1%	0^+ Xe^{132}	2^- Cs^{132}	885 ± 125	14	$2 \times 10^{27 \pm 2}$	$1 \times 10^{29 \pm 2,5}$
KK	0^+ Ca^{40}	96,97%	0^+ Ar^{40}	4^- K^{40}	191 ± 5	13	$7 \times 10^{33 \pm 2}$	$1 \times 10^{35 \pm 2,5}$
$K\beta^+$	0^+ Ba^{130}	0,1%	0^+ Xe^{130}	1^+ Cs^{130}	1486 ± 27	14	$3 \times 10^{20 \pm 2}$	$5 \times 10^{25 \pm 2,5}$
$K\beta^+$	0^+ Sr^{84}	0,56%	0^+ Kr^{84}	2^- Rb^{84}	687 ± 13	14	$1 \times 10^{22 \pm 2}$	$2 \times 10^{28 \pm 2,5}$

[13] KÖNIG, L. A., J. M. E. MATTAUCH u. A. H. WAPSTRA: Nucl. Phys. **31**, 18 (1962).
[14] ZELDES, N., M. GRONAU u. A. LEV: Nucl. Phys. **63**, 1 (1965).

c) Die Nachweismethode muß sehr empfindlich sein. Gerade der massenspektrometrische Nachweis kleinster Edelgasmengen ist im Zusammenhang mit Altersbestimmungsmethoden und Isotopenstudien in Meteoriten zu hoher Vollkommenheit entwickelt worden (REYNOLDS[15], zusammenfassende Darstellung der Edelgas-Meßtechnik siehe KIRSTEN[16]). Aus alledem ergibt sich, daß der Versuch des massenspektrometrischen Nachweises des $\beta\beta$-Zerfalls vorläufig nur für Fälle Erfolg verspricht, in denen das Zerfallsprodukt ein Edelgasisotop ist. Alle bisher veröffentlichten massenspektrometrischen Messungen betreffen den Zerfall $Te^{130} \xrightarrow{\beta^-\beta^-} Xe^{130}$ (INGHRAM und REYNOLDS[17,18], TAKAOKA und OGATA[19]). Dies ist aber durchaus nicht der einzige Zerfall, der für die Methode zugänglich ist. Deshalb wird in Tabelle 1 eine Übersicht über alle Zerfälle gegeben, die im Prinzip mittels Massenspektrometrie studiert werden können. Die theoretisch zu erwartenden Halbwertszeiten sind aus den jeweiligen Zerfallsenergien nach Formeln (4) bis (9) berechnet worden. Wie Tabelle 1 zeigt, sind wegen der starken Energieabhängigkeit der Halbwertszeit Zerfälle mit hoher Zerfallsenergie am ehesten nachzuweisen. Dagegen spielt die Kernladungszahl Z keine wesentliche Rolle, obwohl $T \sim Z^{-2}$ ist. Dies liegt daran, daß die Energiedifferenz zweier Isobare mit $\Delta Z = 2$ proportional zu Z^{-1} ist. Man sieht, daß neben dem Zerfall $Te^{130} \xrightarrow{\beta^-\beta^-} Xe^{130}$ vor allem das Studium des Zerfalls $Se^{82} \xrightarrow{\beta^-\beta^-} Kr^{82}$ mit 2,96 MeV Zerfallsenergie Aussicht auf Erfolg verspricht. Wenn die Leptonenerhaltung verletzt ist, kommen auch einige andere Zerfälle in den Bereich der Meßbarkeit.

4. Meßmethode und experimentelle Bestimmung von Halbwertszeiten

Die quantitative Analyse kleinster Edelgasmengen soll hier in Stichworten beschrieben werden.

Ausführliche Beschreibungen sind enthalten in KIRSTEN[16] (allgemein) und KIRSTEN et al.[20] (speziell für Kr- und Xe-Analyse).

Nach Aufbereitung einer homogenen Probe möglichst einheitlicher Korngröße wird ein Teil davon in Aluminiumfolie abgepackt und in ein Hochvakuumsystem eingebracht. (Der Rest kommt zur chemischen Analyse.) Die Kontamination der Probe durch atmosphärische Edelgase wird durch eine mehrstündige Vorentgasung bei 200 °C soweit wie möglich beseitigt. Die in der Probe enthaltenen Gase werden dann durch

[15] REYNOLDS, J. H.: Rev. Sci. Instr. **27**, 928 (1956).

[16] KIRSTEN, T., in: Potassium-Argon-dating, p. 7. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.

[17] INGHRAM, M. G., and J. H. REYNOLDS: Phys. Rev. **76**, 1265 (1949).

[18] INGHRAM, M. G., and J. H. REYNOLDS: Phys. Rev. **78**, 822 (1950).

[19] TAKAOKA, N., u. K. OGATA: Z. Naturforsch. **21a**, 84 (1966).

[20] KIRSTEN, T., W. GENTNER u. O. MÜLLER: Edelgasisotopenanomalien in einem schwedischen Tellurerz. Eingesandt an Z. Naturforsch. (1967).

induktives Schmelzen ausgetrieben. Aktive Gase werden mittels Titan- und Zirkoniumgetter beseitigt. Unter Benutzung von Kühlfallen und Aktivkohle können die zurückbleibenden Edelgase in die Fraktionen He und Ne, Ar und Kr und Xe zerlegt werden. Die Analyse erfolgt im statisch betriebenen Gasmassenspektrometer mit hoher Nachweisempfindlichkeit (kleinste nachweisbare Menge bei Berücksichtigung des Leerversuches $\sim 10^{-12}$ cm^3 stp eines Xenonisotops). Kalibriert wird durch Messung bekannter Mengen atmosphärischer Edelgase. Durch Leerversuche muß sichergestellt werden, daß das gesamte gemessene Gas wirklich aus der Probe stammt.

Wegen der außerordentlich geringen Absolutmengen der $\beta\beta$-Zerfallsprodukte wird die günstigste Probemenge durch die Menge des zur Verfügung stehenden Minerals bestimmt (Größenordnung $0{,}1-100$ g; hochangereicherte Tellur- und besonders Selenminerale sind außerordentlich selten). Zur Berechnung von Halbwertszeiten ist es nötig, außer der Konzentration des $\beta\beta$-Zerfallsproduktes auch den Zeitraum zu kennen, während dessen die Akkumulation erfolgte. Er ist normalerweise mit dem geologischen Alter des Minerals identisch und kann als K-Ar- oder U-He-Alter bestimmt werden. Deshalb werden im Zuge der Edelgasanalyse auch Argon und Helium mitgemessen. Kalium, Uran und natürlich die Konzentration des $\beta\beta$-aktiven Isotops pro Gramm Mineral müssen mit chemischen oder physikalischen Methoden analysiert werden (je nach Konzentration z. B. naßchemische Methoden, Röntgenfluoreszenzanalyse, Flammenphotometrie, Neutronenaktivierung, für Uran auch α-Zählung).

Aus dem radioaktiven Zerfallsgesetz läßt sich die Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}\,\mathrm{exp.}}$ des $\beta\beta$-Zerfalls eines Kernes N_Z^A berechnen nach der Formel

$$T_{\frac{1}{2}\,\mathrm{exp.}} = \frac{\ln 2 \cdot M_m}{M_t} \cdot t\,. \tag{10}$$

M_m = Anzahl der Atome des $\beta\beta$-aktiven Isotopes in der analysierten Probe,
M_t = Anzahl der Atome des $\beta\beta$-Zerfallsproduktes in der analysierten Probe,
t = Alter des Minerals.

(Wenn in Wahrheit sowohl neutrinoloser als auch neutrinobegleiteter Zerfall nebeneinander stattfinden, bedeutet $T_{\frac{1}{2}\,\mathrm{exp.}}$ eine effektive Halbwertszeit.) Praktischen Bedürfnissen angepaßt ist die Form

$$T_{\frac{1}{2}\,\mathrm{exp.}} = \frac{\gamma c t}{AK} \cdot 1{,}55 \times 10^{21}\,\mathrm{a}\,. \tag{11}$$

c = Konzentration des Elementes Z in Gramm pro Gramm Mineral,
γ = Natürliche Isotopenhäufigkeit des Isotops N_Z^A in Prozent/100,
A = Massenzahl des zerfallenden Isotops,
K = Menge des als Zerfallsprodukt entstandenen Edelgasisotops in 10^{-11} cm^3 stp/g Mineral,
t = Alter des Minerals in Millionen Jahren.

Die folgende Umformung soll eine Vorstellung für die Leistungsfähigkeit und die Grenzen der Methode vermitteln:

Ausgehend von der kleinsten in einem guten System noch sicher nachweisbaren Menge eines Edelgasisotops (10^{-12} cm^{3}stp) muß für eine erfolgreiche Messung folgende Bedingung erfüllt sein:

$$n\gamma c t \gtrsim T_{\frac{1}{2}} . \tag{12}$$

n = Gewicht der zur Verfügung stehenden Probe in Gramm,
$\gamma \cdot c$ = Häufigkeit des Mutterisotops im Mineral in Prozent/100.
t = Alter des Minerals in Millionen Jahren,
$T_{\frac{1}{2}}$ = Tatsächliche Halbwertszeit des $\beta\beta$-Zerfalls (in 10^{20} Jahren).

Aus Formel (12) geht direkt hervor, welche Bedeutung die Beschaffung geeigneter Minerale für die Methode hat.

Beispiel: In 100 g gediegenem natürlichem Tellur mit einem Alter von 250 Millionen Jahren könnte noch eine Halbwertszeit von 10^{24} a gemessen werden. (Die bisher mit Koinzidenz- oder Nebelkammerexperimenten ermittelten unteren Grenzen für $\beta\beta$-Zerfall-Halbwertszeiten liegen bei 10^{19} a.) Der Fehler einer so bestimmten Halbwertszeit hängt weniger von der Meßgenauigkeit der massenspektrometrischen Bestimmung (etwa 10 bis 20%) als von der Deutung der gemessenen Größen ab. Wenn während der Geschichte des Minerals Gasverluste stattfanden, ergibt sich eine zu große Halbwertszeit. Wenn auch andere Prozesse als $\beta\beta$-Zerfall zur Isotopenanomalie beigetragen haben, wird die Halbwertszeit zu klein. Wenn zur Datierung des Minerals die K-Ar- oder U-He-Methode benutzt wird, ergeben sich bei Gasverlusten auch fehlerhafte Alter. Aus diesen Gründen muß die Genauigkeit experimentell ermittelter Halbwertszeiten in jedem speziellen Fall besonders diskutiert werden. Hierfür werden oft zusätzliche Informationen über das Mineral benötigt (z.B. Kenntnis des gesamten Kr- und Xe-Spektrums, Konzentration von Spurenelementen).

5. Neue Meßergebnisse und ihre Deutung

*a) Tellurerz von Boliden, Schweden (Probe Nr. 147)**

Über die Edelgasisotope, die in dieser Probe (ein Mischerz mit Te, Bi und Pb als Hauptbestandteilen) enthalten sind, wird ausführlich in der Arbeit von KIRSTEN et al.[20] berichtet. Sie enthält $86{,}8 \times 10^{-11}$ cm^{3}stp/g Xenon mit folgender isotopischer Zusammensetzung: $Xe^{128} \leqq 0{,}17$, $Xe^{129} = 12{,}25$, $Xe^{130} = 0{,}43$, $Xe^{131} = 7{,}74$, $Xe^{132} = 17{,}47$, $Xe^{134} = 22{,}60$, $Xe^{136} = 26{,}4$ (in 10^{-11} cm^3/g). Ihr Tellurgehalt ist 11,5%; das K-Ar-Alter ist 530 Millionen Jahre und das U-He-Alter ist 550 Millionen Jahre.

* Diese Probe erhielten wir von Prof. RAMDOHR, dem wir dafür unseren Dank sagen.

Das Xenon dieser Probe ist eine Mischung von Spaltxenon aus U^{238} und U^{235}, Xe^{129} und Xe^{131} aus (n, γ)-Reaktionen an Te^{128} und Te^{130}, Xenon atmosphärischer Zusammensetzung und überschüssigem Xe^{130}. Die Aufspaltung dieses Xenons in seine Komponenten wurde in KIRSTEN et al.[20] diskutiert. Der Xe^{130}-Überschuß ergab sich zu $0{,}41 \times 10^{-11}$ cm³/g Tellurid (wahrscheinlichster Wert) bzw. $0{,}22 \times 10^{-11}$ cm³/g (Mindestwert, der bei wahrscheinlich zu großer Korrektur von Xenon atmosphärischer Zusammensetzung verbleibt.)

Falls dieser Überschuß an Xe^{130} aus dem doppelten Betazerfall von Te^{130} stammt, läßt sich daraus und aus dem Alter der Probe sowie dem Te^{130}-Gehalt die effektive Halbwertszeit des Zerfalls berechnen. Es ergibt sich $T_{\frac{1}{2}} = 6{,}2 \times 10^{20}$ a. Bei Verwendung des Minimalwertes ist $T_{\frac{1}{2}} = 1{,}2 \times 10^{21}$ a. Die Möglichkeit von Xe-Diffusionsverlusten kann ausgeschlossen werden, weil K-Ar- und U-He-Alter sehr gut übereinstimmen. Bei Gasverlusten würde nämlich wegen der unterschiedlichen Diffusionskonstanten mehr He^4 als Ar^{40} verlorengehen, was diskordante Alter zur Folge hätte.

Es muß nun diskutiert werden, ob der Xe^{130}-Überschuß aus anderen Prozessen als dem doppelten Betazerfall stammen kann.

Der mögliche Einfluß von Xe atmosphärischer Zusammensetzung wurde bereits bei der Aufspaltung berücksichtigt. Die direkte Bildung von Xe^{130} als Uranspaltprodukt kann vernachlässigt werden, weil das Verhältnis von Xe^{130}_{Spalt} (einschließlich J^{130}) zu $Xe^{136}_{Spalt} \leqq 1{,}6 \times 10^{-5}$ ist (WETHERILL[21]). Dieses Verhältnis ist zwar für die durch schnelle Neutronen ($E > 1$ MeV) an Uran und Thorium ausgelösten Spaltungen wesentlich größer. Eine Abschätzung ergibt jedoch selbst bei großzügigsten Annahmen während 540 Millionen Jahren nur einen Xe^{130}-Beitrag in der Größenordnung von maximal $\sim 10^{-15}$ cm³/g und ist deshalb zu vernachlässigen. Ein mehrere Größenordnungen höherer Neutronenfluß, verursacht durch benachbarte Uranlager, kann nicht existiert haben, weil der gefundene Xe^{129}- und Xe^{131}-Überschuß größenordnungsmäßig mit dem internen Neutronenfluß im Tellurid in Einklang ist. Bei beträchtlicher externer Neutronenbestrahlung müßten diese viel größer sein. Eine ausführlichere Diskussion dieser Zusammenhänge ist in KIRSTEN et al.[20] gegeben. Aus der Diskussion der im folgenden beschriebenen Proben ist außerdem unmittelbar zu sehen, daß der Xe^{130}-Überschuß auch dann auftritt, wenn praktisch überhaupt kein Spaltxenon in der Probe enthalten ist.

Die Bildung von Xe^{130} als Spallationsprodukt der kosmischen Strahlung ist ebenfalls zu vernachlässigen, weil das Erz aus einer tiefliegenden Mine stammt. Außerdem wurden weder He^3 noch Xe^{124} gefunden,

---

[21] WETHERILL, G. W.: Phys. Rev. **92**, 907 (1953).

die empfindliche Indikatoren für Spallationsreaktionen sind. Durch μ-Mesonen kann kein Xe^{130} gebildet werden, weil allenfalls (μ^-, n)-Reaktionen in Betracht kämen und Te^{131} kein stabiles Isotop ist.

Ererbtes Xe^{130}, das sich vor der Mineralbildung angesammelt hatte und dann evtl. mit eingebaut wurde, ist in jedem Fall zu vernachlässigen. Aus dem in KIRSTEN et al.[20] diskutierten Schema würde sich dieser Anteil an ererbtem Xe^{130} zu weniger als 1% ergeben.

Eine andere Möglichkeit wäre die Bildung auf dem Wege

$$Cs^{133}(n, \alpha)J^{130} \xrightarrow{\beta^-} Xe^{130}.$$

Der Cäsiumgehalt der Probe ist nicht bekannt. Das Verhältnis der Häufigkeiten von K zu Cs in der Erdkruste beträgt etwa 7650 (HEIER und ADAMS[22]). Für eine Abschätzung soll angenommen werden, daß in der Probe das K/Cs-Verhältnis den gleichen Wert hat. Der Wirkungsquerschnitt der (n, α)-Reaktion ist sicher nicht größer als 1 barn. Unter diesen Annahmen berechnet sich der Beitrag des auf diesem Wege erzeugten Xe^{130} zum gemessenen Xe^{130} zu weniger als 0,06% und kann deshalb ebenfalls vernachlässigt werden.

Es sollen nun noch (α, n)-Reaktionen besprochen werden. MERRIHUE[23] hat die Ausbeute an Xenon-Isotopen bei der Bestrahlung von Tellur mit 15 MeV α-Teilchen berechnet (Fig. 31 seiner Arbeit). Danach wird auch Xe^{130} gebildet und das Verhältnis $Xe^{128}:Xe^{129}:Xe^{130}:Xe^{131} = 1{,}45:1{,}0:3{,}4:5{,}7$.

Dafür sind hauptsächlich folgende Reaktionen verantwortlich:

$Te^{125}(\alpha, n)Xe^{128}$ (Energieschwelle 4,82 MeV, natürliche Isotopenhäufigkeit von $Te^{125} = 6{,}99\%$),
$Te^{126}(\alpha, n)Xe^{129}$ (7,08 MeV; 18,71%),
$Te^{128}(\alpha, n)Xe^{131}$ (6,24 MeV; 31,79%),
$Te^{128}(\alpha, 2n)Xe^{130}$ (12,84 MeV; 31,79%).

Man sieht, daß in unserer Probe Xe^{130} so nicht produziert werden kann, weil die höchste beim Uranzerfall auftretende α-Energie 7,69 MeV (Po^{214}) unterhalb der Energieschwelle von 12,84 MeV liegt.

Als Ergebnis dieser Diskussion kann man zusammenfassen, daß der Xe^{130}-Überschuß sicher aus dem doppelten β-Zerfall stammt. Anzeichen für einen $\beta\beta$-Zerfall von Te^{128} konnten in diesem Experiment nicht gefunden werden. Die geringere Meßempfindlichkeit für Xe^{128} hat ihre Ursache darin, daß früher im gleichen Spektrometer ein Xe^{128}-Tracer benutzt wurde, so daß bei der Auswertung die Möglichkeit eines Memory-

[22] HEIER, K. S., and J. A. S. ADAMS: Physics and Chemistry of the Earth **5**, 252 (1964).

[23] MERRIHUE, C.: J. Geophys. Research **71**, 263 (1966).

Effektes nicht ausgeschlossen werden konnte. Aus dieser Messung können wir daher für die Halbwertszeit des Zerfalls $Te^{128} \xrightarrow{\beta^-\beta^-} Xe^{128}$ nur eine untere Grenze von $1{,}4 \times 10^{21}$ a $\leqq T_{\frac{1}{2}}$ angeben. Im Falle von Xe^{128} ist auch zu beachten, daß die Reaktion $Te^{125}(\alpha, n)Xe^{128}$ nicht ohne weiteres ausgeschlossen werden kann, weil ihre Energieschwelle bei nur 4,82 MeV liegt. Ein ebenfalls in der Probe gefundener Kr^{82}-Überschuß von $0{,}72 \times 10^{-11}$ cm³/g kann wegen des hohen Gehaltes an Krypton atmosphärischer Zusammensetzung (28×10^{-11} cm³/g) und eines gleichzeitigen Überschusses an Kr^{83} nicht zweifelsfrei gedeutet werden. Es kann nur gesagt werden, daß aus dem Selengehalt der Probe (790 ppm) eine untere Grenze für die Halbwertszeit des Zerfalls $Se^{82} \xrightarrow{\beta^-\beta^-} Kr^{82}$ von 10^{18} a $\leqq T_{\frac{1}{2}}$ folgt. Eine Diskussion möglicher Kr^{82}-Quellen wird unter d) gegeben (s. auch KIRSTEN et al.[20]).

Die Untersuchung der im folgenden unter b), c) und d) beschriebenen Proben ist noch nicht abgeschlossen. Zur Zeit sind nur die Edelgase analysiert, dagegen liegen noch keine chemischen Analysen vor.

Die vollständigen Daten sollen in KIRSTEN und SCHAEFFER[24] publiziert werden.

b) Wismuttellurid von Boliden, Schweden (Probe Nr. 25742) *

Der Gehalt dieser Probe an Xenonisotopen ist (in Einheiten von 10^{-11} cm³/g): $Xe^{129} = 9{,}84 \pm 0{,}4$; $Xe^{130} = 2{,}00 \pm 0{,}2$; $Xe^{131} = 4{,}40 \pm 0{,}1$; $Xe^{132} = 0{,}70 \pm 0{,}05$; $Xe^{134} = 0{,}44 \pm 0{,}02$; $Xe^{136} = 0{,}44 \pm 0{,}02$ (s. KIRSTEN und SCHAEFFER[25]). Zum Unterschied von Probe Nr. 147 enthält diese Probe nur sehr wenig Spaltxenon, was auf einen wesentlich geringeren Urangehalt zurückzuführen ist. Wie aus dem Xe^{132}-Gehalt zu erkennen ist, ist auch die maximale atmosphärische Kontamination sehr gering. 91 % des Gesamtxenons entfallen auf die Isotope Xe^{129}, Xe^{130} und Xe^{131}. Xe^{129} und Xe^{131} sind durch Neutroneneinfang aus Te^{128} und Te^{130} entstanden. (Zur Deutung dieser Komponente siehe wieder KIRSTEN et al.[20].) Der Xe^{130}-Überschuß ist $1{,}9 \times 10^{-11}$ cm³/g.

Für eine Abschätzung der Halbwertszeit des $\beta\beta$-Zerfalls von Te^{130} nehmen wir hier an, daß es sich um reines Wismuttellurid (Bi_2Te_3) handelt und das Alter der Probe ebenso wie das von Probe Nr. 147 540 Millionen Jahre ist (gleiche Lagerstätte). Man erhält so als vorläufige Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}} = 6 \times 10^{20}$ a.

---

* Diese Probe erhielten wir von Dr. W. TUFAR, Aarhus, dem wir dafür unseren Dank sagen.

[24] KIRSTEN, T., and O. A. SCHAEFFER: Krypton- and Xenon-anomalies in Selenium and Tellurium ores and the double β decay (in Vorbereitung, 1967).

[25] KIRSTEN, T., and O. A. SCHAEFFER: Abstract for AGU-meeting, Washington, April 1967.

c) Natürliches Tellur, Goodhope Mine, Gunnison County, Colorado (Probe Nr. 98589) *

Diese Probe enthält folgende Xenonmengen (in 10^{-11} cm^3/g): $Xe^{128} \leqq 0{,}09$; $Xe^{129} = 0{,}43$; $Xe^{130} = 2{,}9$; $Xe^{131} = 0{,}29$; $Xe^{132} = 0{,}35$; $Xe^{134} = 0{,}11$; $Xe^{136} = 0{,}16$; wie Fig. 1 zeigt, ist Xe^{130} das bei weitem häufigste Isotop (67% vom Gesamtxenon).

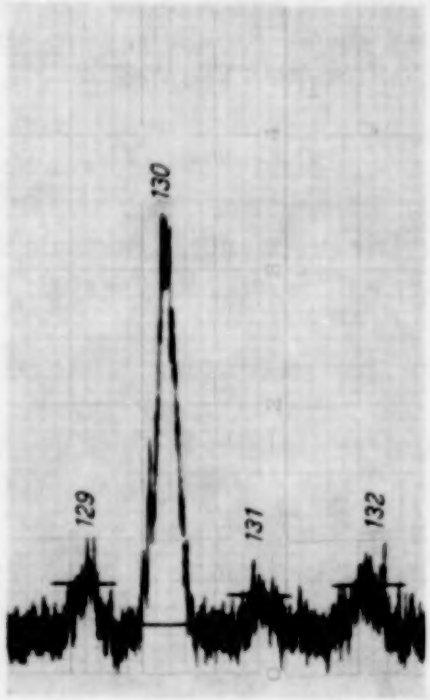


Fig. 1. Massenspektrum von Xenon aus natürlichem Tellur (Probe Nr. 98589, Goodhope Mine, Colorado). Die waagerechten Marken zeigen den maximalen Beitrag atmosphärischen Xenons an

Mit dieser Probe ist es zum erstenmal gelungen, das $\beta\beta$-Zerfallsprodukt Xe^{130} praktisch isoliert nachzuweisen, d.h. nicht vermengt mit anderen Isotopenanomalien. Dies ist deshalb besonders bedeutsam, weil die Deutung der in Telluriden gefundenen Xe^{129}- und Xe^{131}-Überschüsse als Neutronenanlagerungsprodukt bisher noch nicht allgemein anerkannt ist. Es bestand immer noch die Möglichkeit, daß ein noch nicht erkannter Prozeß, der die Xe^{129}- und Xe^{131}-Anomalien hervorruft, auch zur Produktion von Xe^{130} beiträgt. Nunmehr ist aber sicher, daß die für Telluride typischen Xe^{129}- und Xe^{131}-Überschüsse nicht direkt mit Xe^{130} korreliert sind. Das Fehlen von Xe^{129}- und Xe^{131}-Überschuß in dieser Probe geht zurück auf die extrem niedrige Urankonzentration, die einen außergewöhnlich geringen internen Neutronenfluß zur Folge hat. Da noch keine Altersbestimmung ausgeführt wurde, läßt sich die Halbwertszeit des Te^{130} aus dieser Probe vorläufig nur abschätzen.

Nach SINDEEVA[26] kann die hydrothermale Selen- und Tellurmineralbildung in den Lagerstätten des Colorado-Plateaus sowohl im Mesozoikum (Jura und Trias) als auch im Tertiär (Paläozoikum) stattgefunden haben. Deshalb soll für die Abschätzung angenommen werden, daß das Alter des Minerals zwischen 60 und 230 Millionen Jahren liegt. Bei einem Alter von 60 Millionen Jahren ergibt sich $T_{\frac{1}{2}}(Te^{130})$ zu $0{,}85 \times 10^{20}$ a,

* Diese und die unter d) beschriebene Probe erhielten wir von Prof. FRONDEL, Cambridge, Mass., dem wir dafür herzlich danken.

[26] SINDEEVA, N. D.: Mineralogy and types of deposits of Selenium and Tellurium. New York: Interscience Publ. 1964.

bei 230 Millionen Jahren wird $T_{\frac{1}{2}}(Te^{130}) = 3{,}3 \times 10^{20}$ a. Ein endgültiger Wert kann erst nach Ausführung der Altersbestimmung gegeben werden.

Für die Halbwertszeit des Zerfalls $Te^{128} \xrightarrow{\beta^-\beta^-} Xe^{128}$ ergibt sich eine untere Grenze von $2 \times 10^{21} \leqq T_{\frac{1}{2}}(Te^{128})$. Die hier gegebenen Resultate wurden an zwei Proben von nur 0,9 und 1,4 g erhalten. Eine Verbesserung dieses Resultats wäre möglich, wenn größere Probemengen beschafft werden könnten.

d) Umangit ($Cu_{4-x}Se_2$) Habri bei Tisnov, Westmähren (Probe Nr. 108432)

Die Probe enthält folgende Kryptonmengen (in 10^{-11} cm^3/g); $Kr^{82} = 4{,}8$: $Kr^{83} = 26{,}2$; $Kr^{84} = 16{,}0$; $Kr^{86} = 4{,}8$. Diese isotopische Zusammen-

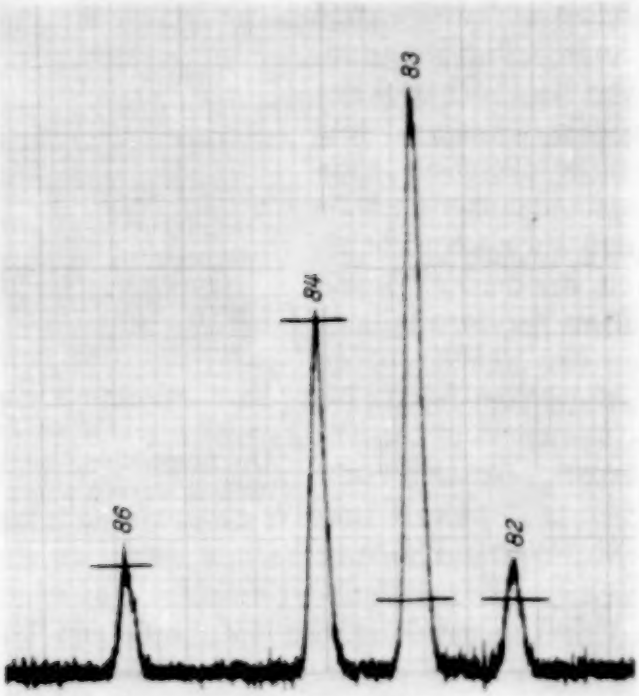


Fig. 2. Massenspektrum von Krypton aus Umangit ($Cu_{4-x}Se_2$) (Probe Nr. 108432, Habri, Westmähren). Die waagerechten Marken geben die isotopische Zusammensetzung atmosphärischen Kryptons an (normiert für Kr^{84})

setzung weicht stark von der Zusammensetzung atmosphärischen Kryptons ab (Fig. 2). Zur Deutung muß das Krypton in seine Komponenten zerlegt werden. Die folgenden Prozesse können zu den Isotopen Kr^{82}, Kr^{83}, Kr^{84} und Kr^{86} beitragen:

α) Uranspaltung führt zur Bildung von Krypton im Verhältnis $Kr^{83}:Kr^{84}:Kr^{86} = 0{,}31:1:6{,}27$ (WETHERILL[21]). Wichtig ist, daß kein Kr^{82} entstehen kann, weil es gegen Spaltprodukte abgeschirmt ist.

β) Ererbtes Krypton atmosphärischer Zusammensetzung $Kr^{82}:Kr^{83}:Kr^{84}:Kr^{86}=0{,}20:0{,}20:1{,}0:0{,}35$ (NIER[27]).

γ) Kernreaktionen an Selen können Kr^{82} und Kr^{83} liefern:

$$Se^{80}(\alpha, n)Kr^{83}$$

(3,43 MeV Schwellenenergie; natürliche Isotopenhäufigkeit von $Se^{80}=49{,}82\%$).

$$Se^{82}(n, \gamma)Se^{83} \xrightarrow{\beta^-} Br^{83} \xrightarrow{\beta^-} Kr^{83}$$

(natürliche Isotopenhäufigkeit von $Se^{82}=9{,}19\%$; totaler Neutroneneinfangsquerschnitt 54 mb).

$$Se^{78}(n, \gamma)Se^{79}(\alpha, n)Kr^{82}$$

(natürliche Isotopenhäufigkeit von $Se^{78}=23{,}52\%$; Halbwertszeit von $Se^{79}=7\times10^4$ a; Schwellenenergie der (α, n)-Reaktion 0,95 MeV).

Durch $Se^{80}(\alpha, 2n)Kr^{82}$ kann Kr^{82} nicht gebildet werden, weil die Schwellenenergie von 10,9 MeV die höchsten vorkommenden α-Energien übersteigt.

δ) Reaktionen an Spurenelementen (nur für Kr^{82} aufgeführt):

$$Rb^{85}(n, \alpha)Br^{82} \xrightarrow{\beta^-} Kr^{82}$$

(natürliche Isotopenhäufigkeit von $Rb^{85}=72{,}15\%$; totaler Neutroneneinfangsquerschnitt 1 barn).

$$Br^{81}(n, \gamma)Br^{82} \xrightarrow{\beta^-} Kr^{82}$$

(natürliche Isotopenhäufigkeit von $Br^{81}=49{,}46\%$; Neutroneneinfangsquerschnitt 3,2 barn).

ε) $2\beta^-$-Zerfall von Se^{82} (natürliche Isotopenhäufigkeit 9,19%).

Aus dem gemessenen Kr^{84}/Kr^{86}-Verhältnis folgt zunächst, daß der Gehalt an Spalt-$Kr^{86} \leqq 0{,}2\times10^{-11}$ cm³/g ist. (Spalt-Xe^{136}, das bei der Uranspaltung mit 8mal höherer Ausbeute als Kr^{86} gebildet wird (WETHERILL[21]), ist mit 1×10^{-11} cm³/g enthalten. Das Xenon dieser Probe wird in KIRSTEN und SCHAEFFER[24] ausführlicher diskutiert.) Kr^{84} und Kr^{86} entsprechen also ererbtem Krypton atmosphärischer Zusammensetzung. Die entsprechenden Mengen an Kr^{82} und Kr^{83} ergeben sich danach zu je $3{,}2\times10^{-11}$ cm³/g. Zu deuten bleiben $1{,}6\times10^{-11}$ cm³/g Kr^{82} und 23×10^{-11} cm³/g Kr^{83}.

Kr^{83} stammt aus den Reaktionen

$$Se^{80}(\alpha, n)Kr^{83} \quad \text{und} \quad Se^{82}(n, \gamma)Se^{83} \xrightarrow{\beta^-} Br^{83} \xrightarrow{\beta^-} Kr^{83}.$$

[27] NIER, A. O.: Phys. Rev. **79**, 450 (1950).

MERRIHUE[23] hat die Kryptonausbeute bei der Bestrahlung von natürlichem Selen mit 10 MeV und 15 MeV α-Teilchen berechnet (Fig. 32 seiner Arbeit). Es ergab sich das Häufigkeitsverhältnis: $Kr^{82}:Kr^{83}:Kr^{84}:Kr^{86}=1:100:1:0$. Vergleich der Daten für 10 MeV und 15 MeV zeigt, daß für niedrigere α-Energien die Dominanz von Kr^{83} noch stärker wird. Der Kr^{83}-Überschuß unserer Probe kann also zwanglos durch (α, n)-Reaktionen am Selen erklärt werden. Ein Teil kann auch aus der Reaktion $Se^{82}(n, \gamma)Se^{83} \xrightarrow{\beta^-} Br^{83} \xrightarrow{\beta^-} Kr^{83}$ stammen. Der folgende Vergleich dieser mit der unter 5a beschriebenen Probe Nr. 147 gibt eine interessante Bestätigung der Korrelation von Kr^{83}-Überschuß einerseits und internem Neutronen- bzw. α-Fluß und Selengehalt andererseits: Der integrale Neutronen- und α-Fluß während der geologischen Existenz von Probe Nr. 147 war etwa 25mal größer als im Umangit, weil die Xe^{136}_{Spalt}-Menge etwa 25mal größer ist. Der Selengehalt von Probe Nr. 147 ist etwa 500mal kleiner als im Umangit. Daher sollte ihr absoluter Kr^{83}-Überschuß etwa 20mal kleiner sein als der des Umangits. Das gemessene Verhältnis ist ~35. Bedenkt man die völlig verschiedene chemische Zusammensetzung der verglichenen Proben (daher z. B. unterschiedliche Neutronenabsorption), so ist dieses Ergebnis erstaunlich gut. – Wenn der Kr^{83}-Überschuß aber richtig gedeutet ist, so kann gefolgert werden, daß die Produktion von Kr^{82} durch α-Reaktionen an Selen höchstens 1% des so produzierten Kr^{83} (also $\leqq 0{,}23\times10^{-11}$ cm³/g) ausmachen kann. Es verbleibt also noch ein Überschuß von $1{,}4\times10^{-11}$ cm³/g Kr^{82}.

Die Reaktion von $Se^{78}(n, \gamma)Se^{79}(\alpha, n)Kr^{82}$ ist nur von theoretischem Interesse, da sie wegen des Zerfalls von Se^{79} ($T_{\frac{1}{2}}=7\times10^4$ a) nicht effektiv wird. Da der Urangehalt (und damit der Neutronenfluß) noch nicht gemessen wurde, kann für die Reaktionen $Rb^{85}(n, \alpha)Br^{82} \xrightarrow{\beta^-} Kr^{82}$ und $Br^{81}(n, \gamma)Br^{82} \xrightarrow{\beta^-} Kr^{82}$ vorläufig keine Abschätzung gegeben werden. Durch die folgende Überlegung läßt sich aber ausschließen, daß sie wirksam sind:

Es wurde auch eine Calcitverwachsung vom gleichen Handstück, aus dem die Umangitprobe präpariert wurde, gemessen. Ihr Gehalt an Spalt-Xenon ist 30mal größer als der der Umangitprobe, woraus etwa der 30fache Urangehalt folgt. Diese Probe zeigt *keinen* Kr^{82}-Überschuß. Die Spurenelemente Brom und Rubidium sind im Calcit sicher nicht seltener als im Umangit (eher häufiger). Bei 30fachem Neutronenfluß müßte also (auch bei größeren Diffusionslängen der Neutronen) ein großer Kr^{82}-Überschuß resultieren, wenn die fraglichen Reaktionen wirksam wären.

Wir können also nunmehr folgern, daß der noch zu erklärende Rest von $1{,}4\times10^{-11}$ cm³/g Kr^{82} aus dem $\beta\beta$-Zerfall von Se^{82} stammt. Wegen der noch fehlenden Altersbestimmung kann die daraus folgende Halbwertszeit des Se^{82} wieder nur abgeschätzt werden.

Kupferselenide sind fast immer mesozoisch (SINDEEVA[26]), so daß wir als mögliches Alter wieder 60 bis 230 Millionen Jahre annehmen. Da auch noch keine Selenanalyse vorliegt, nehmen wir für diese Abschätzung an, daß es sich um ziemlich reinen Umangit mit 40% Selengehalt handelt. Bei 60 Millionen Jahren Alter ergibt sich dann $T_{\frac{1}{2}}(Se^{82}) = 3 \times 10^{19}$ a und bei 230 Millionen Jahren $T_{\frac{1}{2}}(Se^{82}) = 1 \times 10^{20}$ a.

Diese Zahlen sind vorläufig, endgültig ist jedoch der positive Effekt.

6. Zusammenfassung aller bisher bestimmten Halbwertszeiten und Schlußfolgerungen

Vor 17 Jahren haben INGHRAM und REYNOLDS[17,18] zum ersten Male massenspektrometrisch die Halbwertszeit eines $\beta\beta$-Zerfalls bestimmt. Sie erhielten aus Messungen eines Tellurerzes von Boliden eine Halbwertszeit von $1{,}4 \times 10^{21}$ a für den $\beta\beta$-Zerfall von Te^{130}.

1966 bestimmten TAKAOKA und OGATA[19] aus dem Xenon eines japanischen Tellurerzes die Halbwertszeit von Te^{130} zu $8{,}2 \times 10^{20}$ a.

In beiden Fällen war der Xe^{130}-Überschuß von Xe^{129}- und Xe^{131}-Anomalien begleitet. Besonders deshalb wurden von Skeptikern noch Zweifel angemeldet, ob der $\beta\beta$-Zerfallsprozeß mit diesen Messungen wirklich bewiesen wurde.

Durch den Nachweis von isoliertem Xe^{130} in der hier unter 5c beschriebenen Probe Nr. 98589 können diese Zweifel endgültig ausgeräumt werden. Aus den Ergebnissen, die aus dieser Probe erhalten wurden, kann jetzt auch für die früher gemessenen Proben, in denen Xe^{130} nur als eine von mehreren Anomalien auftrat, gefolgert werden, daß die Deutung des Xe^{130}-Überschusses als $\beta\beta$-Zerfallsprodukt richtig war. Mit den Ergebnissen, die an der unter 5d beschriebenen Probe Nr. 108432 erhalten wurden, ist nunmehr auch der $\beta\beta$-Zerfall von Se^{82} nachgewiesen worden. Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß der $\beta\beta$-Zerfall jetzt experimentell bewiesen ist.

Eine andere Frage ist die Genauigkeit der ermittelten Halbwertszeiten. Zum Vergleich werden alle verfügbaren Daten in Tabelle 2 zusammengestellt. Um einen Eindruck zu vermitteln, wie stark die durch den $\beta\beta$-Zerfall bewirkte Anomalie die isotopische Zusammensetzung des Gesamtxenons (bzw. des Gesamtkryptons) beeinflußt, ist in der Tabelle für jede Messung angegeben, wieviel Prozent des Gesamtxenons (bzw. Kryptons) das $\beta\beta$-Zerfallsprodukt ausmacht. Man sieht, daß der Xe^{130}-Überschuß in den Proben Nr. 25742 und 98589 besonders signifikant ist. Nun sollen die gefundenen Halbwertszeiten verglichen werden.

Für den Te^{130}-Zerfall fanden INGHRAM und REYNOLDS[18] $T_{\frac{1}{2}} = 1{,}4 \times 10^{21}$ a. In dieser Arbeit wurde jedoch das Alter des Minerals nicht bestimmt, sondern zu $1{,}5 \times 10^{9}$ a angenommen. Wenn das wahre Alter

Tabelle 2. *Massenspektrometrische Bestimmungen von Halbwertszeiten des ββ-Zerfalls*

Zerfall	Probe	Alter (10^6 a)	Altersbestimmung	Zusammensetzung des Edelgases*	Menge ββ-Zerfallsprodukt Gesamtxenon (bzw. Krypton)	Halbwertszeit in 10^{20} a	Autor**
$Te^{130} \xrightarrow{\beta\beta} Xe^{130}$	Tellurid Boliden	1500	geologische Schätzung	2, 3, 4, 8	2,3%	14	18
		wenn 540	siehe Text			5	18, &
$Te^{128} \xrightarrow{\beta\beta} Xe^{128}$		540	siehe Text		$\leqq$ 0,2%	> 70	18***
$Te^{130} \xrightarrow{\beta\beta} Xe^{130}$	Tellurid Oya Mine Japan	90	am Nachbargestein	2, 3, 4, 8	6,1%	8,2	19
$Te^{128} \xrightarrow{\beta\beta} Xe^{128}$					$\leqq$ 0,06%	> 300	19
$Te^{130} \xrightarrow{\beta\beta} Xe^{130}$	Tellurid Boliden Probe Nr. 147	540	am Erz selbst	1, 2, 3, 4, 8	0,47%, evtl. 0,25%	6,2 oder 12	&, 20
$Te^{128} \xrightarrow{\beta\beta} Xe^{128}$					$\leqq$ 0,2%	> 14	&, 20
$Se^{82} \xrightarrow{\beta\beta} Kr^{82}$				5, 6, 7	$\leqq$ 2,1%	> 0,01	&, 20
$Te^{130} \xrightarrow{\beta\beta} Xe^{130}$	Tellurid Boliden Probe Nr. 25742	540	anderes Erz derselben Lagerstätte	2, 3, 8	$\leqq$ 10,7%	6	&, 25
$Te^{130} \xrightarrow{\beta\beta} Xe^{130}$	Natürliches Tellur Colorado, Nr. 98589	wenn 60	geologische Schätzung	4, 8	67%	0,85	&, 24
		wenn 230	geologische Schätzung			3,3	&, 24
$Te^{128} \xrightarrow{\beta\beta} Xe^{128}$					$\leqq$ 2,1%	> 20	&, 24
$Se^{82} \xrightarrow{\beta\beta} Kr^{82}$	Umangit Habri Probe Nr. 108432	wenn 60	geologische Schätzung	6, 7, 9	2,7%	0,3	&, 24
		wenn 230	geologische Schätzung			1	&, 24

* Die Ziffern bedeuten: 1 Spaltxenon aus Uran, 2 Xe aus Neutroneneinfang am Tellur, 3 Xe^{129}-Überschuß, 4 Xe atmosphärischer Zusammensetzung, 5 Spaltkrypton aus Uran, 6 Kr aus Neutronen- oder α-induzierten Reaktionen an Se, 7 Kr atmosphärischer Zusammensetzung, 8 Xe aus ββ-Zerfall von Te^{130}, 9 Kr aus ββ-Zerfall von Se^{82}.

** & bedeutet Ergebnis dieser Arbeit.

*** Diese Zahl ist in der zitierten Arbeit nur implizit enthalten.

der Probe ebenso wie das der unter 5a beschriebenen Probe $0{,}54 \times 10^9$ a ist (gleiche Lagerstätte), dann reduziert sich $T_{\frac{1}{2}}$ zu 5×10^{20} a.

TAKAOKA und OGATA[19] erhielten $T_{\frac{1}{2}} = 8{,}2 \times 10^{20}$ a aus der Annahme, daß das Alter eines benachbarten Porphyrits mit dem Alter des Tellurids übereinstimmt. Der Ablauf der hydrothermalen Erzbildung macht es jedoch wahrscheinlicher, daß die Tellurerze später als das Silikatmagma kristallisierten. Deshalb kann diese Halbwertszeit etwas zu hoch sein. Wir erhielten $6{,}2 \times 10^{20}$ a, evtl. auch 12×10^{20} a für Probe Nr. 147 und 6×10^{20} a für Probe Nr. 25742. Der Wert für Probe Nr. 98589 (zwischen 0,85 und 3×10^{20} a) kann erst weiter diskutiert werden, wenn eine Altersbestimmung tatsächlich ausgeführt sein wird.

Die Übereinstimmung der anderen vier Halbwertszeiten ist überraschend gut, und die wahrscheinlichste Halbwertszeit des Te^{130} ist danach 6×10^{20} a. Wegen der Unsicherheit der Altersbestimmungen könnte sich diese Zahl noch innerhalb eines Faktors 2 ändern (nur für Probe Nr. 147 wurde das Alter wirklich am Tellurmineral bestimmt). Das vollständige Ergebnis lautet demnach

$$T_{\frac{1}{2}}(Te^{130}) = 6 \times 10^{20 \pm 0{,}3}\,\text{a}\,.$$

Für die Halbwertszeit des Se^{82} (gemessen an Probe Nr. 108432) ergab sich ein Wert innerhalb $6 \times 10^{19 \pm 0{,}3}$ a. Diese Zahl gilt nur unter dem Vorbehalt, daß die in 5d gemachten Annahmen bezüglich des Alters sich bestätigen.

Der Nachweis des $\beta\beta$-Zerfalls von Te^{128} ist bisher nicht gelungen. Die höchste untere Grenze fanden TAKAOKA und OGATA[19] mit $3 \times 10^{22}\text{a} \leqq T_{\frac{1}{2}}(Xe^{128})$.

Zum Schluß soll nun diskutiert werden, welche theoretischen Folgerungen aus den Ergebnissen gezogen werden können.

Wir vergleichen dazu die Resultate mit den theoretischen Voraussagen in Tabelle 3.

Tabelle 3

	Effektive Halbwertszeit (experimentell)	Theoretische Halbwertszeiten 2ν	keine ν
Te^{130}	$6 \times 10^{20 \pm 0{,}3}$ a	$4 \times 10^{22 \pm 2{,}5}$ a	$2 \times 10^{16 \pm 2}$ a
Se^{82}	$6 \times 10^{19 \pm 0{,}3}$ a	$1 \times 10^{22 \pm 2{,}5}$ a	$1 \times 10^{16 \pm 2}$ a

Beide Ergebnisse liegen innerhalb der Fehlergrenzen der für den neutrinobegleiteten Zerfall erwarteten Halbwertszeiten, wodurch die Theorie bestätigt wird. Bezüglich der Leptonenerhaltung folgt aus den Ergebnissen:

Entweder: 2ν-$\beta\beta$-Zerfall findet tatsächlich statt, aber kein neutrinoloser $\beta\beta$-Zerfall.

Oder: Beide Zerfallsarten finden statt, der neutrinolose $\beta\beta$-Zerfall aber höchstens bis zu einem durch das Verhältnis

$$V = \left(\frac{\lambda_{\text{Majorana}}}{\lambda_{\text{Dirac}}}\right)_{\text{experim.}} \Big/ \left(\frac{\lambda_{\text{Majorana}}}{\lambda_{\text{Dirac}}}\right)_{\text{theoret.}} \tag{3}$$

bestimmten Grade (λ sind die Zerfallskonstanten). Das heißt, die Leptonenerhaltung ist zu höchstens $V \times 100\,\%$ verletzt.

Berechnung von V aus $T_{\frac{1}{2}}(\mathrm{Te}^{130})$:

Wir sind durch das positive Resultat jetzt zu dem Schluß berechtigt, daß die tatsächliche Zerfallskonstante für den neutrinobegleiteten Zerfall innerhalb der theoretisch vorhergesagten Grenzen liegt, d.h.

$$(\lambda_{\text{Dirac}})_{\text{experim.}} = (\lambda_{\text{Dirac}})_{\text{theoret.}} = 0{,}17 \times 10^{-22\pm2{,}5}.$$

Außerdem gilt

$$(\lambda_{\text{Majorana}})_{\text{experim.}} = (\lambda_{\text{effektiv}})_{\text{gemessen}} - (\lambda_{\text{Dirac}})_{\text{experim.}}.$$

Dann wird

$$V = \frac{12 \times 10^{-22\pm0{,}3} - 0{,}17 \times 10^{-22\pm2{,}5}}{0{,}17 \times 10^{-22\pm2{,}5}} \times \frac{0{,}17 \times 10^{-22\pm2{,}5}}{0{,}35 \times 10^{-16\pm2}}$$

$$\leqq \frac{12 \times 10^{-22\pm0{,}3}}{0{,}35 \times 10^{-16\pm2}} \leqq 34 \cdot \frac{10^{18}}{10^{21{,}7}} \leqq 0{,}007.$$

Die Leptonenerhaltung ist also zu höchstens 0,7 % verletzt. Diese Grenze liegt etwas tiefer als die auf anderem Wege von DAVIS[10] gefundene ($V \leqq 0{,}02$). Die gleiche Berechnung für den Fall des Se^{82} ergibt $V \leqq 0{,}033$.

Eine Verfeinerung dieses Ergebnisses wäre möglich, wenn es gelänge, die Fehlergrenzen der theoretischen Halbwertszeiten im speziellen Fall des Te^{130} durch detailliertere Berücksichtigung der Matrixelemente einzuengen. Falls V größer als Null ist, könnte das dann festgestellt werden.

Für wertvolle Diskussionen danken wir Dr. R. DAVIS jr., Brookhaven National Lab. Ein Teil dieser Arbeit wurde gefördert von der US Atomic Energy Commission unter der Kontrakt-Nummer AT (30-I) 3629.

Zeitschrift für Physik 202, 293–300 (1967)

Concerning Internal Conversion Coefficients in Hf^{180}*

G. C. Nelson and E. N. Hatch

Institute for Atomic Research and Department of Physics, Iowa State University, Ames, Iowa, 50010 (USA)

Received February 27, 1967

The gamma-ray relative intensities from transitions in Hf^{180} following the 5.5 hour Hf^{180m} decay have been measured using a bent-crystal gamma-ray diffraction monochromator and a least-squares fitting technique. From these measurements it was possible to deduce a value for the internal conversion coefficient for the 93.3-keV transition of $\alpha_T^{93} = 4.91 \pm 0.23$. From previous measurements of conversion electron intensities by Edwards and Boehm and our gamma-ray relative intensities, internal conversion coefficients for all transitions except the 57.5-keV transition were obtained. These coefficients agree well with the previous determinations by Edwards and Boehm, however, our measurements have improved precision, particularly in the case of 501.3-keV transition. The present measurements of α_K for the 215.3-, 332.5- and 443.8-keV $E2$ transitions are 11% lower than theoretical values while α_K for 93.3 keV $E2$ transition agrees closely with the theoretical value. These results are in close agreement with the previous measurements of Edwards and Boehm. The present experimental α_K for the 501-keV transition agrees closely with the theoretical α_K for an $E3$ multipolarity.

1. Introduction

The level structure exhibited in the nucleus Hf^{180} following the decay of Hf^{180m} has been extensively studied and shows some rather interesting features. For example, the 57.5-keV transition represents the slowest observed $E1$ transition, which was explained by Scharff-Goldhaber, *et al.*[1] as due to the K-forbiddenness of the transitions from the 5.5-hour, 1.142-MeV isomeric state to the rotational levels of the ground-state band. Another interesting feature of this decay is that the decay of the 641-keV level consists of three $E2$ transitions in cascade with no observed cross-over transitions. This means that the total transition intensities of these three transitions are equal. It is possible to use this fact to determine the total internal conversion coefficient, α_T, for the 93.3-keV transition from a measurement of the gamma-ray relative intensity of this transition along with that of the 332-keV transition. Measurements of the gamma-ray relative intensities and internal conversion electron relative intensities for all of the other observed transitions enable the determination of the internal conversion coefficients for the transitions using the previously determined coefficient (α_T) for the 93.3-keV transition for normalization.

* Work was performed in the Ames Laboratory of the U.S. Atomic Energy Commission. Contribution No. 2062.

[1] Scharff-Goldhaber, G., M. McKeown, and J. W. Mihelich: Bull. Am. Phys. Soc. **1**, 206 (1956).

EDWARDS and BOEHM[2] have carried out precise measurements of the gamma-ray and internal conversion line relative intensities and have obtained quite accurate values for the Hf^{180} internal conversion coefficients through a least-squares adjustment of their data. They reported that the *K*-shell internal conversion coefficient for the 93.3-keV transition was in agreement with theory and those for the 215.3-, 332.5- and 443.8-keV transitions were approximately 10% lower than the theoretical coefficients of ROSE[3]. Although such a discrepancy could not be considered very significant, the fact that the deviation is of the same size and in the same direction for each of the latter three *E*2 transitions is interesting.

Recently a new technique for accurately determining gamma-ray relative intensities has been developed in this laboratory[4]. Because of the possible deviation in the *K*-shell internal conversion coefficients for three *E*2 transitions, which is larger than would be expected based on most of the recent results for high precision determinations of α_K for pure *E*2 transitions, an investigation of the Hf^{180} internal conversion coefficients was undertaken using a method for measuring gamma-ray relative intensities which is basically different from the method used by EDWARDS and BOEHM[2].

In our method a complete scintillation pulse-height spectrum was recorded in the NaI detector of the bent-crystal spectrometer by placing a thin line source of Hf^{180m} on the focal circle of the spectrometer with the diffracting crystal removed. The collimator-detector system was adjusted to accept all gamma rays coming directly from this source. After the gamma-ray pulse-height spectrum was recorded, the thin source was removed and the diffraction crystal replaced. A regular line source of Hf^{180m} for the spectrometer was then used to diffract each gamma-ray separately into the NaI detector of the spectrometer by setting the instrument at the proper Bragg angles. This procedure provided monoenergetic response functions of the detector system for the gamma rays coming from the source. These response functions were then fit by a least-squares technique to the observed composite gamma-ray scintillation spectrum from Hf^{180m} in order to obtain the gamma-ray relative intensities.

Using this technique an independent measurement of the Hf^{180m} gamma-ray intensities could yield the total internal conversion coefficient for the 93.3-keV transition. The atomic shell conversion coefficients for this transition were then determined from conversion electron relative intensities measured by EDWARDS and BOEHM[2].

---

[2] EDWARDS, W. F., and F. BOEHM: Phys. Rev. **121**, 1499 (1961).

[3] ROSE, M. E.: Internal conversion coefficients. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1958.

[4] BROWN, J. E., and E. N. HATCH: Nuclear Instr. and Meth. **47**, 185 (1967).

The remaining internal conversion coefficients were obtained by dividing the conversion electron intensities of EDWARDS and BOEHM[2] by the present measurements of the gamma-ray intensities, using our determination of the α_T for the 93.3-keV transition as a normalization standard. In this work we have contributed new precise measurements of the Hf^{180m} gamma-ray relative intensities from which an independent value of the α_T for the 93-keV transition could be calculated. One goal of this work was to see if with these new measurements, the deviation of the α_K for the 215.3-, 332.5- and 443.8-keV transitions, which had been observed by EDWARDS and BOEHM[2] would still remain.

2. Experimental Details

The present measurements of the gamma-ray relative intensities were carried out with a two-meter bent crystal spectrometer patterned after that described by SEPPI *et al.*[5]. The (400) planes of a 1.5-mm thick germanium crystal were used to diffract the gamma rays for the monenergetic response functions. The scintillation detector of the spectrometer was a Harshaw Integral Line Assembly Type 12S containing a 3×3 inch NaI(Tl) crystal. The amplified pulses from the detector were fed into a 400-channel pulse-height analyzer. The output of the analyzer was punched paper tape. The data on the tapes were then converted to IBM cards for computer analysis.

The thin source for the composite pulse-height spectrum was made by depositing approximately 0.6 mg of Hf^{180m} source material on a strip of 0.00025 inch thick aluminized mylar over an area 0.2 cm × 3 cm. The regular line sources for the spectrometer were made by filling quartz capillary tubes, which were about 2.5 cm long with an inside diameter of about 0.2 mm, with 11 mg of HfO_2 enriched to 57 percent in Hf^{179} and containing 30 percent Hf^{180}. The materials for the sources were irradiated with neutrons in the Ames Laboratory Research Reactor at a neutron flux of 7×10^{13} neutrons/cm^2/sec. The 5.5 hour Hf^{180m} activity was obtained from neutron capture by the Hf^{179}. The 45-day Hf^{181} activity was also present in our sources. The time from the reactor shut down until data were taken was approximately two hours. Data could be taken during approximately two half lives for each source.

In order to correct for the presence of Hf^{181} in the source, a Hf^{181} source was prepared from neutron capture of Hf^{180}. This source was allowed to decay for several days. The scintillation gamma-ray pulse-height spectrum was then recorded with the Hf^{181} source. This spectrum

[5] SEPPI, E. J., H. HENRIKSON, F. BOEHM, and J. W. DUMOND: Nuclear Instr. and Meth. **16**, 17 (1962).

was fit to the observed composite spectrum as a response function in exactly the same way as the monoenergetic response functions were.

Six sets of data were taken and analyzed with our linear least-squares computer program [6]. Corrections for absorption in the air path between the source and the detector and the other necessary corrections were carried out in the manner described in Ref.[4].

3. Results and Conclusions

The response functions used in the least-squares fitting procedure are shown in Fig. 1. Each of these response functions was recorded with the spectrometer set at the Bragg angle corresponding to the wavelength of the particular gamma ray recorded.

Fig. 2 displays the composite spectrum along with the monoenergetic response functions and the calculated composite spectrum. The bottom curve shows the deviation of the calculated spectrum from the experimental composite spectrum.

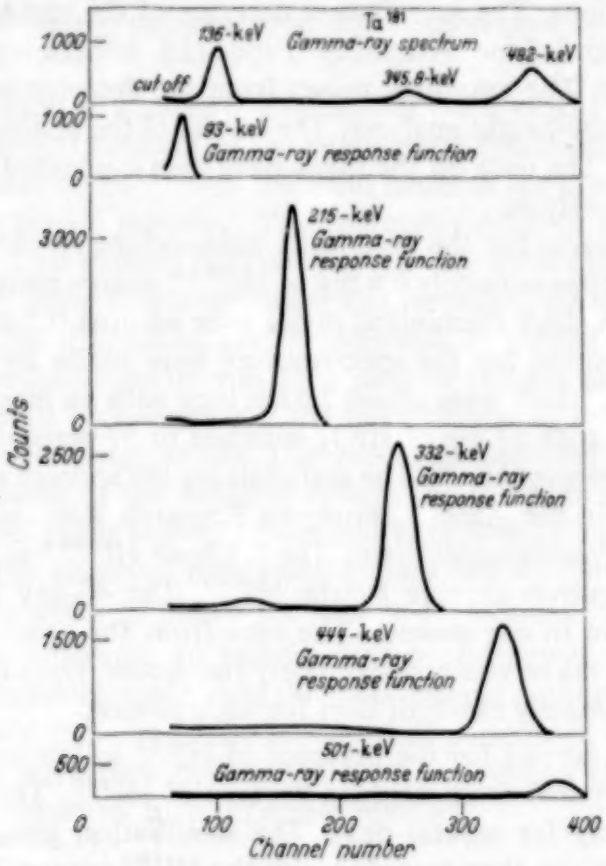


Fig. 1. Response functions used in the least-squares fitting procedure

[6] BROWN, J. E., and E. N. HATCH: USAEC Rept. IS-993 Iowa State University of Science and Technology 1963.

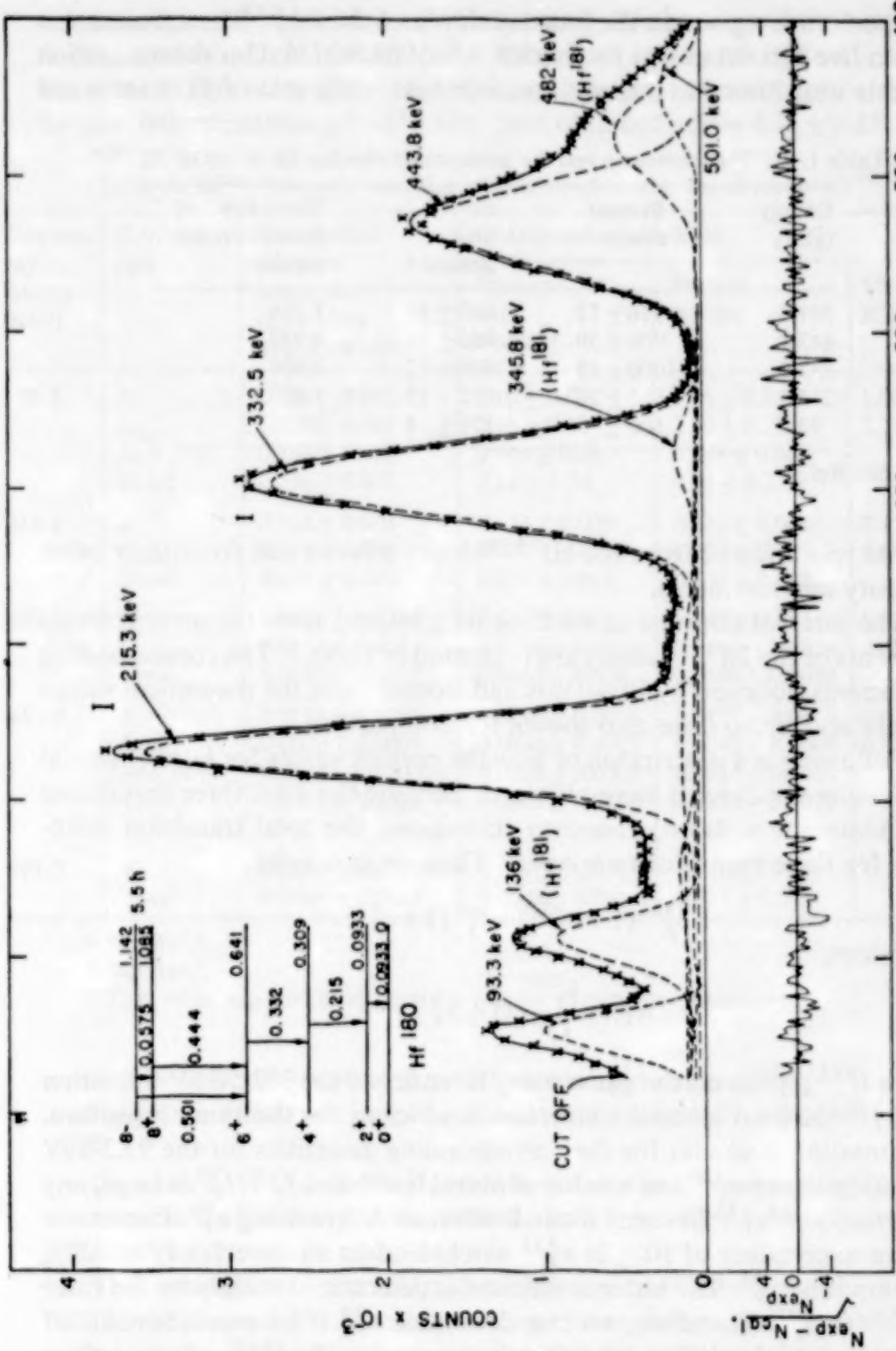


Fig. 2. Hf^{180} composite spectrum with calculated composite spectrum and monoenergetic components. —— Calculated composite spectrum; × Experimental composite spectrum; - - - Response functions

The results of the least-squares fitting yielded the relative intensities for the Hf^{180m} gamma-rays which are presented in Table 1. The ratios of the values obtained by EDWARDS and BOEHM[2] to the present values for

comparison are given in the fourth column of the table. The agreement is within five percent except for the 501.3-keV transition. Our determination for this transition was a direct measurement while that of EDWARDS and

Table 1. *Hf^{180} Gamma-ray relative intensities following the decay of Hf^{180m}*

Energy (keV)	Present results	EDWARDS and BOEHM[a]	EDWARDS and BOEHM/Present results
501.3	136 ± 12	180 ± 55	1.324
443.8	904 ± 30	866 ± 46	0.958
332.5	1000 ± 25	1000 ± 42	1.000
215.3	865 ± 20	882 ± 25	1.020
93.3	180 ± 5	176 ± 4	0.978

[a] See Ref.[2].

BOEHM was inferred from the Hf^{180m} decay scheme and from their other intensity measurements.

The internal conversion coefficients obtained from the present measurements of the Hf^{180m} decay are presented in Table 2. The corresponding coefficients obtained by EDWARDS and BOEHM[2] and the theoretical values of SLIV and BAND[7] are also shown for comparison.

Following is a description of how the present values for Hf^{180} internal conversion coefficients were obtained. Because the final three transitions are in cascade with no cross-over transitions, the total transition intensities for these transitions are equal. Thus we can write

$$I_\gamma^{332}(1+\alpha_T^{332}) = I_\gamma^{93}(1+\alpha_T^{93}).$$

Therefore,

$$\alpha_T^{93} = \frac{I_\gamma^{332}}{I_\gamma^{93}}(1+\alpha_T^{332}) - 1,$$

where I_γ^{332} represents the gamma-ray intensity of the 332.5-keV transition and α_T^{332} the total internal conversion coefficient for the same transition. The notation is similar for the corresponding quantities for the 93.3-keV transition. Since α_T^{332} has a value of about 0.060 and $I_\gamma^{332}/I_\gamma^{93}$ is large, any uncertainty in α_T^{332} has only a small effect in determining α_T^{93}. For example, an uncertainty of 10% in α_T^{332} would lead to an uncertainty of 0.7% in computing α_T^{93}. The latter coefficient is determined mainly by the ratio of I_γ^{332} to I_γ^{93}. Therefore, we can determine α_T^{93} from measurements of the gamma-ray relative intensities compared with I_γ^{332}, along with a

[7] SLIV, L. A., and I. M. BAND: Tables of Internal Conversion Coefficients, in: Alpha-, Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy, p. 1639–1672 (K. SIEGBAHN, ed.). Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1965.

correction for α_T^{332}, which is relatively small. We have used the previous determination of $\alpha_T^{332}=0.060\pm0.004$ by EDWARDS and BOEHM[2]. Since the error in this value is only 6.5%, it contributes an uncertainty of 0.5% to our determination of α_T^{93}. We thus obtained $\alpha_T^{93}=4.91\pm0.23$. The

Table 2. *Hf^{180} Internal conversion coefficients following the decay of Hf^{180m}*

Gamma-ray energy (keV)	Conversion line	Conversion electron intensities (EDWARDS and BOEHM)[a]	Conversion coefficients		
			EDWARDS and BOEHM[a]	Present results	Theoretical[b] *E2*
93.3	*K*	0.205 ± 0.012	1.10 ± 0.09	1.05 ± 0.09	1.06
	L_{Total}	0.582 ± 0.017	3.13 ± 0.19	2.99 ± 0.22	2.75
	$M+N+\ldots$	0.169 ± 0.012	0.909 ± 0.08	0.868 ± 0.08	
	Total	0.956 ± 0.023	5.14 ± 0.24	4.91 ± 0.23[c]	
215.3	*K*	0.114 ± 0.005	0.123 ± 0.009	0.122 ± 0.009	0.137
	L_{Total}	0.072 ± 0.006	0.0077 ± 0.007	0.077 ± 0.008	0.070
	Total	0.221 ± 0.010	0.237 ± 0.017	0.236 ± 0.018	
332.5	*K*	0.0400 ± 0.0016	0.038 ± 0.003	0.037 ± 0.003	0.042
	L_{Total}	0.0154 ± 0.0012	0.0146 ± 0.0015	0.0142 ± 0.0014	0.0132
	Total	0.0634 ± 0.0025	0.0603 ± 0.004	0.0586 ± 0.0044	
443.8	*K*	0.0173 ± 0.0010	0.0189 ± 0.0017	0.0177 ± 0.0016	0.020
	L_{Total}	0.0040 ± 0.0005	0.0044 ± 0.0007	0.0041 ± 0.0006	0.0049
	$M+N+\ldots$	0.00141 ± 0.00028	0.0015 ± 0.0003	0.0014 ± 0.0003	
	Total	0.0227 ± 0.0012	0.0249 ± 0.0022	0.0232 ± 0.0020	
					M2 *E3*
501.3	*K*	0.0070 ± 0.0009	0.0370 ± 0.012	0.048 ± 0.008	0.121 0.038
	Total	0.0104 ± 0.0011	0.0549 ± 0.018	0.071 ± 0.011	

[a] See Ref.[2].
[b] See Ref.[7].
[c] This value was obtained from the present gamma-ray intensities.

same procedure was not used to determine α_T^{215} since $I_\gamma^{332}/I_\gamma^{215}$ is near 1 and any uncertainty in the value of α_T^{332} has a large effect in determining α_T^{215}.

Once we have obtained α_T^{93}, we can obtain the corresponding internal conversion coefficients for the atomic shells from $K:L:M+N\ldots$ ratios obtained by EDWARDS and BOEHM[2].

The remainder of the internal conversion coefficients for the 215.3-, 332.5-, 443.8- and 501.3-keV transitions were determined by taking the ratios of the internal conversion electron intensities of EDWARDS and BOEHM[2] to the present values of the gamma-ray relative intensities. These ratios were then normalized using the value of α_T^{93} which was obtained from the present gamma-ray relative intensity measurements. Thus, our

conversion coefficients depend on the conversion line relative intensities of EDWARDS and BOEHM[2] but have been computed using new measurements of the gamma-ray relative intensities and an independently obtained normalization constant. The conversion coefficients obtained in this manner are presented in Table 2 along with the coefficients obtained by EDWARDS and BOEHM[2] and theoretical values obtained by interpolating values from the tables of SLIV and BAND[7]. Since our gamma-ray relative intensities agree well with those of EDWARDS and BOEHM[2], it is not surprising that our internal conversion coefficients also agree closely. Our value for α_K^{93} is in closer agreement with the theoretical value. It is of interest to note that the experimental value for α_K^{501} is slightly larger than the theoretical value for an $E3$ transition.

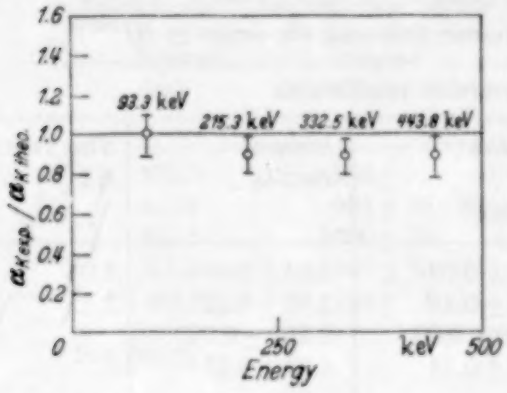


Fig. 3. Comparison of the present results for the K conversion coefficients of the $E2$ transitions in Hf^{180} to the theoretical values of SLIV and BAND[7]. The error bars include the assigned experimental errors and a 5% uncertainty for errors in the theoretical valves

In Fig. 3 are displayed the ratios of the present determinations to the theoretical values of SLIV and BAND[7] for the K-shell conversion coefficients of the Hf^{180} $E2$ transitions. The α_K^{93} agrees closely with the theoretical value, but the previously observed deviation of the experimental from the theoretical values for the 215.3-, 332.5- and 443.8-keV transitions remains. In fact, while this deviation for the coefficients of EDWARDS and BOEHM[2] was 10%, our coefficients are slightly lower and the deviation of our values from theoretical values is 11% for these three $E2$ transitions. This deviation is larger than has been recently found in other precise measurements for $E2$ transitions.

The authors would like to thank K. L. MALABY and H. S. OLSON for assistance in preparing and handling the Hf^{180m} sources. The cooperation and assistance of B. W. LINK and his staff during the reactor irradiations of the sources has been most appreciated.

Zeitschrift für Physik 202, 301 – 320 (1967)

A Shell-Model Calculation in the Continuum* for the Reaction $N^{15}(n, n')N^{15*}$

W. Ebenhöh, W. Glöckle, J. Hüfner, and H. A. Weidenmüller
Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg, W.-Germany

Received March 9, 1967

Using the shell-model approach to nuclear reactions, the Lippmann-Schwinger equation for elastic and inelastic nucleon scattering is solved numerically. The procedure is based upon an adaptation of a method due to Weinberg. The differential and total elastic and inelastic cross-sections and the asymmetry of the scattering of a transversally polarised beam of neutrons are calculated. The positions (energies and total widths) and residues (partial widths) of the scattering matrix in the complex plane are determined. The results are discussed and compared with previous treatments.

1. Introduction

In the present paper, we describe the numerical application of a shell-model approach to nuclear reactions[1–3] to a specific example, the reaction $N^{15}(n, n')N^{15}$. The motivation of this undertaking is threefold. Firstly, we want to demonstrate that the method described earlier[3] is useful not only as a conceptual tool, but also for numerical work. Secondly, we want to study numerically the quality of the approximations involved, and how the parameters which enter the calculation influence the various quantities like cross sections and polarisation, poles and residues (partial widths) of the S-matrix. Thirdly, by presenting our results we hope to stimulate extended experimental investigations on reactions amenable to theoretical treatments which in turn would justify an increased numerical effort, like for instance the use of a finite-range interaction rather than the δ-function employed presently.

Our approach differs from the various calculations of nuclear reaction cross sections performed previously. Lemmer and Shakin[4], who employ Feshbach's theory of nuclear reactions[4], use an approach very similar in spirit, but neglect inelastic scattering and part of the continuum-continuum interaction. MacDonald[5] uses an effective nonhermitean

* A preliminary account of this work was published in Physics Letters.

[1] Weidenmüller, H. A.: Nuclear Phys. **75**, 189 (1966).

[2] Weidenmüller, H. A., and K. Dietrich: Nuclear Phys. **83**, 332 (1966).

[3] Glöckle, W., J. Hüfner, and H. A. Weidenmüller: Nuclear Phys. A **90**, 481 (1967).

[4] Lemmer, R. H., and C. M. Shakin: Ann. Phys. (N.Y.) **27**, 13 (1964). – Feshbach, H.: Ann. Phys. (N.Y.) **5**, 357 (1958); **19**, 287 (1962).

[5] MacDonald, W. M.: Nuclear Phys. **54**, 393 (1964); **56**, 636 (1964).

residual interaction, which contains the continuum-continuum interaction. HAGLUND and ROBSON[6] start from R-matrix theory, while DANOS and GREINER[7] work with the eigen-channel representation of the S-matrix. Finally, BLOCH and GILLET[8] diagonalize numerically the continuum-continuum interaction, dividing the energy interval into finite sections. In contrast, we use a modification[3] of WEINBERG's method: The Lippmann-Schwinger integral operator for the scattering problem is divided into two parts. One of them is an operator of finite rank and can be treated exactly. The other part can be treated in perturbation theory and it is shown in section 5 that first order perturbation theory gives good results. One further difference between our approach and previous ones is that we calculate all quantities of interest not only for real but also for complex energies. This makes it possible to search for the poles of the S-matrix and to determine the residues (partial widths).

In section 2, we give the relevant formulas and definitions. These formulas are not derived. They can either be found in ref. [3] or obtained from that reference by algebraical manipulations. In section 3, we discuss why we picked the particular reaction $N^{15}(n, n')N^{15}$ and give the parameters relevant for this case. The computer program is described in section 4 and section 5 contains the results together with a discussion.

2. Theoretical Formulae

2.1. The General Method

We restrict ourselves to states with no more than one nucleon in the continuum of the shell-model operator H_0. Then, the Lippman-Schwinger equation of the corresponding scattering problem is given in Eq. (I.A.14)*, abbreviated in the form of Eq. (I.5.1),

$$\Psi_E^{(+)} = \chi_E^{(\mu)} + I_1 \Psi_E^{(+)} + I_2 \Psi_E^{(+)}. \tag{2.1}$$

Here, the operator I_1 is defined in Eq. (I.5.2a) and contains the interaction matrix elements between the bound states of H_0, and also the bound-state-continuum interaction, while the continuum-continuum interaction is contained in the operator I_2, see Eq. (I.5.2b). We rewrite the operator I_2 in Eq. (2.1) in the form $\{(I_2 - O_{2,N}) + O_{2,N}\}$ with $O_{2,N}$ defined by Eq. (I.5.3).

The operator

$$I_{2,N} = I_2 - O_{2,N} \tag{2.2}$$

* We refer to ref. [3] as I, so that (I.A.14) means Eq. (A.14) of ref. [3].

[6] HAGLUND, M. E., and D. ROBSON: Phys. Letters **14**, 225 (1965). — HAGLUND, M. E.: To be published.

[7] DANOS, M., and W. GREINER: Phys. Rev. **146**, 708 (1966).

[8] BLOCH, C., and V. GILLET: Phys. Letters **16**, 62 (1965); **18**, 58 (1965).

is then treated in perturbation theory, i.e. it is assumed that the resolvent operator $F_{2,N}$ of $I_{2,N}$ is given by

$$F_{2,N} \simeq I_{2,N}, \tag{2.3}$$

where we have used the definition (I.2.2) for the resolvent. The operator $O_{2,N}$ is constructed according to the prescription given in section (I.5), i.e. $O_{2,N}$ contains the Weinberg states of the *unperturbed* Hamiltonian H_0. It is then verified that the operator $I_{2,N}$, in contrast to the operator I_2, does not contain the first N single-particle resonances. We write the operator of finite rank explicitely as

$$I_1 + O_{2,N} = \sum_s |\bar{s}\rangle \langle s|, \tag{2.4}$$

where the states $|\bar{s}\rangle$ and $\langle s|$ are defined below. Then, simple algebraic operations show that the resolvent operator F of the operator $I_1 + I_2$ is given by

$$F = F_{2,N} + (1 + F_{2,N}) \sum_{s,t} |\bar{s}\rangle M^{-1}_{st} \langle t| (1 + F_{2,N}) \tag{2.5}$$

where the matrix M_{st} is given by

$$M_{st} = \delta_{st} - \langle s| 1 + F_{2,N} |t\rangle. \tag{2.6}$$

Using the approximation (2.3) in Eqs. (2.5) and (2.6), the resolvent F can be calculated and the solution of Eq. (2.1) be found. We point out that we did not use the approximation leading to Eq. (I.2.25b), because it would not have simplified the numerical work; our only approximation is that of Eq. (2.3). The states $|\bar{s}\rangle$ and $\langle s|$ are constructed from the M bound states $|\Phi_i\rangle$ of H_0 and from the N Weinberg states $|\Gamma_a\rangle$ in the following way:

$$|\bar{i}\rangle = |\Phi_i\rangle;$$

$$\langle i| = \frac{1}{E - E_i} \left\{ \sum_{j=1}^{M} \langle \Phi_i | V | \Phi_j \rangle \langle \Phi_j | + \sum_{\lambda} \int_0^{\infty} dE \langle \Phi_i | V | \chi_E^{(\lambda)} \rangle \langle \chi_E^{(\lambda)} | \right\}, \quad i = 1, \ldots M \tag{2.7a}$$

$$|\bar{i}\rangle = \sum_{\lambda} \int_0^{\infty} dE' |\chi_{E'}^{(\lambda)}\rangle \frac{1}{E^+ - E' - \varepsilon_\lambda} \langle \chi_{E'}^{(\lambda)}| V | \Phi_{i-M} \rangle, \quad \langle i| = \langle \Phi_{i-M}|, \quad i = M+1, \ldots 2M, \tag{2.7b}$$

$$|\bar{i}\rangle = \sum_{\lambda} \int_0^{\infty} dE' |\chi_{E'}^{(\lambda)}\rangle \frac{1}{E^+ - E' - \varepsilon_\lambda} \langle \chi_{E'}^{(\lambda)}| \hat{V} | \Gamma_{i-2M} \rangle,$$

$$\langle i| = \frac{1}{\langle \Gamma^*_{i-2M}| \hat{V} | \Gamma_{i-2M} \rangle} \sum_{\lambda} \int_0^{\infty} dE' \langle \Gamma^*_{i-2M}| \hat{V} | \chi_{E'}^{(\lambda)} \rangle \langle \chi_{E'}^{(\lambda)}|, \quad i = 2M+1, \ldots 2M+N. \tag{2.7c}$$

The operator $\hat{V}$ is defined in Eq. (I.A.15). It is easily seen that Eq. (2.4) holds with (2.7a) to (2.7c) when the sum over s is extended from 1 to $2 \cdot M + N$.

2.2. *The S-Matrix*

The S-matrix elements $S_{\alpha\beta}(E)$ are calculated from the resolvent operator F Eq. (2.5) by taking the limit $\lim_{r \to \infty} (1+F)\, \chi_E^{(\alpha)}$. We write

$$S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^B + S_{\alpha\beta}^R . \tag{2.8}$$

The term $S_{\alpha\beta}^B$ originates from $F_{2,N}$ in Eq. (2.5) while $S_{\alpha\beta}^R$ stems from $F - F_{2,N}$, the separable part of the resolvent. $S_{\alpha\beta}^B$ may be called the Born term as it is calculated in Born approximation and as it does not give rise to poles of the S-matrix. Using the approximation (2.3) we get

$$S_{\alpha\beta}^B = -2\pi i\, e^{i(\delta(\alpha)+\delta(\beta))} \langle \chi_{E-\varepsilon_\alpha}^{(\alpha)} |\, \hat{V}_{2,N} \,| \chi_{E-\varepsilon_\beta}^{(\beta)} \rangle , \tag{2.9}$$

where $\delta(\alpha)$ is the phase shift for potential scattering in channel α and $\hat{V}_{2,N}$ is the modified residual interaction

$$\hat{V}_{2,N} = \hat{V} - \sum_\rho \frac{\hat{V} |\Gamma_\rho\rangle \langle \Gamma_\rho^* |\, \hat{V}}{\langle \Gamma_\rho^* |\, \hat{V} \,| \Gamma_\rho \rangle} . \tag{2.10}$$

The other term, $S_{\alpha\beta}^R$, can be written as a function of two determinants

$$S_{\alpha\beta}^R = e^{i(\delta(\alpha)+\delta(\beta))} \left(\delta_{\alpha\beta} - 1 + \frac{D_{\alpha\beta}}{D} \right) . \tag{2.11}$$

The denominator D is the determinant of the matrix M_{st} Eq. (2.6) and can be brought into the following form: $D = \det(d_{st})$ with

$$d_{st} = \begin{pmatrix} \overleftarrow{\qquad t=1,M \qquad} & \overleftarrow{\qquad t=M+1,M+N \qquad} & \\ \begin{pmatrix} \delta_{st}(E-E_s) - \langle \Phi_s |\, V \,| \Phi_t \rangle \\ -\sum_\lambda F_{E,\lambda}^{(+)}(s,t) - \sum_{\lambda,\lambda'} G_{E,\lambda,\lambda'}^{(+)}(s,t) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\sum_\lambda F_{E,\lambda}^{(+)}(s,t) \\ -\sum_{\lambda,\lambda'} G_{E,\lambda,\lambda'}^{(+)}(s,t) \end{pmatrix} & \begin{matrix} \uparrow \\ s=1,M \\ \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -\sum_\lambda F_{E,\lambda}^{(+)}(s,t) \\ -\sum_{\lambda,\lambda'} G_{E,\lambda,\lambda'}^{(+)}(s,t) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \delta_{st} \langle \Gamma_{s-M}^* |\, \hat{V} \,| \Gamma_{s-M} \rangle \\ -\sum_\lambda F_{E,\lambda}^{(+)}(s,t) - \sum_{\lambda,\lambda'} G_{E,\lambda,\lambda'}^{(+)}(s,t) \end{pmatrix} & \begin{matrix} \uparrow \\ s=M+1,M+N \\ \downarrow \end{matrix} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

where s and t run over the M bound states Φ_s and over the N-Weinberg states Γ_ρ. The expression (2.12) for D generalizes Eq. (I.5.5) as it does not only contain the energy dependent functions

$$F_{E,\lambda}^{(+)}(s,t) = \int_0^\infty \langle s |\, V \,| \chi_{E'}^{(\lambda)} \rangle \frac{dE'}{E^+ - E' - \varepsilon_\lambda} \langle \chi_{E'}^{(\lambda)} |\, V \,| t \rangle , \tag{2.13}$$

but also the correction terms

$$G^{(+)}_{E,\lambda,\lambda'}(s,t)=\int_0^\infty \langle s|\,V\,|\chi^{(\lambda)}_{E'}\rangle\,\frac{dE'}{E^+-E'-\varepsilon_\lambda}\,\langle\chi^{(\lambda)}_{E'}|\,\hat{V}_{2,N}\,|\chi^{(\lambda')}_{E''}\rangle\times \\ \times\frac{dE''}{E^+-E''-\varepsilon_{\lambda'}}\,\langle\chi^{(\lambda')}_{E''}|\,V\,|t\rangle\,. \tag{2.14}$$

The determinant $D_{\alpha\beta}$ in the numerator of Eq. (2.11) depends on the channel indices

$$D_{\alpha\beta}=\det(d_{st}-2\pi i\,a^{(\alpha)}_s\,a^{(\beta)}_t)\,, \tag{2.15}$$

where the vectors $a^{(\alpha)}_s$ are defined by

$$a^{(\alpha)}_s(E)=\begin{cases}\langle\Phi_s|\,V\,|\chi^{(\alpha)}_E\rangle+\sum_\lambda H^{(+)}_{E,\lambda}(s,\alpha) & \text{for}\quad 1\leqq s\leqq M\\ \langle\Gamma^*_{s-M}|\,\hat{V}\,|\chi^{(\alpha)}_E\rangle+\sum_\lambda H^{(+)}_{E,\lambda}(s,\alpha) & \text{for}\quad M+1\leqq s\leqq M+N\end{cases} \tag{2.16}$$

with

$$H^{(+)}_{E,\lambda}(s,\alpha)=\int_0^\infty \langle s|\,V\,|\chi^{(\lambda)}_{E'}\rangle\,\frac{dE'}{E^+-E'-\varepsilon_\lambda}\,\langle\chi^{(\lambda)}_{E'}|\,\hat{V}_{2,N}\,|\chi^{(\alpha)}_E\rangle\,. \tag{2.17}$$

The expressions for the S-matrix as given by Eqs. (2.8) to (2.17) simplify greatly, if we do not take $F_{2,N}$ in first order approximation [i.e. Eq. (2.3)] but put it equal to zero. Then

$$S^B_{\alpha\beta}=0\,,\quad G^{(+)}_{E,\lambda,\lambda'}(s,t)=0\,,\quad H^{(+)}_{E,\lambda}(s,\alpha)=0\,. \tag{2.18}$$

We may compare the S-matrix given in Eqs. (2.8) to (2.17) with the one containing the simplification (2.18) and thus get an indication how well our perturbation approach to the resolvent operator works.

The expressions for the differential cross-section, polarisation and total cross section can be calculated from $S_{\alpha\beta}$ and are given in the appendix.

2.3. Poles of the S-Matrix

The S-matrix elements $S_{\alpha\beta}(E)$ have poles only at those energies E_ρ, where the determinant D [Eq. (2.12)] has a zero. We give the expression for the residue of $S_{\alpha\beta}$ and for the Gamov function G, which is the "wave function" of the system at the pole. The brief derivation given in this subsection follows the work of ref.[9] where further details may be found. We assume the pole at E_ρ to be simple. Then there exists an eigenvector A with

$$\sum_{t=1}^{N+M} d_{st}\,A_t=0\quad\text{and}\quad\sum_{s=1}^{N+M}A_s^2=1\,. \tag{2.19}$$

[9] GLÖCKLE, W.: Z. Physik **190**, 391 (1966). If $\sum A_s^2=0$ eq. (2.24) still holds as can be shown along the lines of ref. [11]).

The vector $\boldsymbol{A}$ and $(N+M-1)$ further linearly independent vectors $\boldsymbol{B}^{(J)}$ form the columns of a matrix $\mathbf{0}$ with the properties

$$\mathbf{0}\mathbf{0}^T=1=\mathbf{0}^T\mathbf{0} \quad \text{provided that} \quad \sum_{s=1}^{N+M} B_s^{(J)} A_s=0 \quad \text{and} \quad \sum_{s=1}^{N+M} B_s^{(J)} B_s^{(I)}=\delta_{IJ}. \tag{2.20}$$

For energies E in the neighborhood of E_ρ we find

$$D=\det(d_{st})=(E-E_\rho)\det\left(\sum_{p,q=1}^{N+M} B_p^{(s)} d_{pq} B_q^{(t)}\right)\cdot \cdot \sum_{p,q=1}^{N+M} A_p A_q \left(\frac{d}{dE} d_{pq}\right)\Big|_{E=E_\rho} + C\cdot(E-E_\rho)^2. \tag{2.21}$$

In the same way the determinant $D_{\alpha\beta}$ in the numerator of Eq. (2.11) can be written as

$$D_{\alpha\beta}=-\det\left(\sum_{p,q=1}^{N+M} B_p^{(s)} d_{pq} B_q^{(t)}\right)\cdot\left(\sum_{p=1}^{N+M} A_p a_p^{(\alpha)}\right)\left(\sum_{q=1}^{N+M} A_q a_q^{(\beta)}\right) \tag{2.22}$$

with $a_s^{(\alpha)}$ from Eq. (2.16).

Using the definition for the partial widths

$$\lim_{E\to E_\rho}(E-E_\rho) S_{\alpha\beta}=-i\,\Gamma_\alpha^{\frac{1}{2}}\Gamma_\beta^{\frac{1}{2}} \tag{2.23}$$

we get

$$\Gamma_\alpha^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2\pi}\,e^{i\delta(\alpha)}\frac{\sum_{s=1}^{N+M} A_s a_s^{(\alpha)}(E_\rho)}{\left[\sum_{s,t} A_s A_t \frac{d}{dE} d_{st}\Big|_{E=E_\rho}\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.24}$$

The Gamov function $|G\rangle$ is obtained from the residue of the resolvent operator F at $E=E_\rho$

$$\lim_{E\to E_\rho}(E-E_\rho)F=|G\rangle\langle G^*| \tag{2.25}$$

which we calculate aside from a normalization constant to be

$$|G\rangle=\sum_{s=1}^{N} A_s|\Phi_s\rangle+\sum_{s=1}^{N+M} A_s\left\{\sum_\lambda\int_0^\infty|\chi_{E'}^{(\lambda)}\rangle\frac{dE'}{E_\rho-E'-\varepsilon_\lambda}\langle\chi_{E'}^{(\lambda)}|V|s\rangle+\right.$$
$$+\sum_{\lambda,\lambda'}\int_0^\infty\int_0^\infty|\chi_E^{(\lambda)}\rangle\frac{dE}{E_\rho-E-\varepsilon_\lambda}\langle\chi_E^{(\lambda)}|\hat{V}_{2,N}|\chi_{E'}^{(\lambda')}\rangle\cdot \tag{2.26}$$
$$\left.\cdot\frac{dE'}{E_\rho-E'-\varepsilon_{\lambda'}}\langle\chi_{E'}^{(\lambda')}|V|s\langle\right\}.$$

3. The Reaction $N^{15}(n, n')N^{15}$

This reaction seems to be favourable for a numerical calculation in several respects:

i) Elastic and inelastic neutron scattering are the only open channels up to 7.6 MeV above threshhold.

ii) Some of the compound states in N^{16} are expected to arise from simple excitations of the O^{16} core. We confine ourselves to the 1 particle − 1 hole states with a proton hole in the 1 p-shell and one extra neutron, put into the $1d_{5/2}$- or $2s_{1/2}$-bound states or into the continuum with angular momentum $l=0, 2$. Then the wave functions which enter into the formulae of section 2 are the following:

$$
\begin{aligned}
|\Phi_i\rangle &= \{|1d^B_{5/2}, 1p^{-1}_{1/2}\rangle, |1d^B_{5/2}, 1p^{-1}_{3/2}\rangle, |2s^B_{1/2}, 1p^{-1}_{1/2}\rangle, |2s^B_{1/2}, 1p^{-1}_{3/2}\rangle\} \\
|\chi^{(\lambda)}_E\rangle &= \{|d^C_{3/2}, 1p^{-1}_{1/2}\rangle, |d^C_{3/2}, 1p^{-1}_{3/2}\rangle, |d^C_{5/2}, 1p^{-1}_{1/2}\rangle, \\
&\qquad |d^C_{5/2}, 1p^{-1}_{3/2}\rangle, |s^C_{1/2}, 1p^{-1}_{1/2}\rangle, |s^C_{1/2}, 1p^{-1}_{3/2}\rangle\} \\
|\Gamma_\rho\rangle &= \{|1d^W_{3/2}, 1p^{-1}_{1/2}\rangle \quad \text{or} \quad |1d^W_{3/2}, 1p^{-1}_{3/2}\rangle\}.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

The indices B, C and W indicate that the wave function of the neutron is a bound state function (B), a continuum function (C), or one of Weinberg type (W), all calculated with the average shell model potential.

All states of (3.1) have definite total spin ($0 \leqq J \leqq 4$), negative parity, and $T=1$.

iii) The effect of the spurious states on the calculation is hoped to be small in the case of N^{16} as a compound nucleus. We do not know how to eliminate spurious states in the present treatment. As we have used the same central potential for protons and neutrons, all spurious states arising from $1p-1h$ excitation of the O^{16} core should have $T=0$. Therefore we hope that such states affect our calculation very little. (We do not know either, of course, how to take into account recoil effects.)

The functions for the particles and holes which appear in Eqs. (3.1) are found numerically by solving the Schrödinger equation with a Saxon-Woods type potential (no Coulomb forces)

$$
U(r) = (-V_0)\cdot f(r) + (+V_{so})\frac{1}{m_\pi^2}\frac{d}{dr} f(r)\, \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\sigma}
$$

$$
f(r) = \begin{cases} \left(1+e^{\frac{r-R}{a}}\right)^{-1} & \text{for} \quad r \geqq a \\ \text{const} = \left(1+e^{\frac{a-R}{a}}\right)^{-1} & \text{for} \quad r \leqq a. \end{cases}
\tag{3.2}
$$

The strengths V_0 and V_{so} are adjusted for each l such as to give the observed single particle energies in O^{17} and N^{15}, respectively

$$\left.\begin{aligned} E_{2s_{1/2}} &= -3.27 \\ E_{1p_{1/2}} &= -12.11 \\ E_{1p_{3/2}} &= -18.44 \end{aligned}\right\} \quad V_0 = 53.93 \qquad\qquad$$

$$V_0 = 50.74, \quad V_{so} = 9.88 \qquad (3.3)$$

$$\left.\begin{aligned} E_{1d_{3/2}} &= 0.93 - 0.045\,i \\ E_{1d_{5/2}} &= -4.14 \end{aligned}\right\} \quad V_0 = 51.84, \quad V_{so} = 5.24$$

(all energies in MeV).

We choose $R = 3.08$ fm and $a = 0.53$ fm independent of l. A phenomenological residual interaction is assumed to act between the states (3.1)

$$V = \sum_{i<k} V_{ik} = -V_{res} \sum_{i<k} (q + p\,\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_k)\,\delta(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_k). \qquad (3.4)$$

The angular integrations for the matrixelements of V between the $1p\,1h$ states (3.1) have been performed by LEMMER and SHAKIN[4], whose formulae we use.

We also take their parameters

$$V_{res} = 4\pi\,b^3 \times 8.50\ \text{MeV}, \quad b = 1.76\ \text{f}, \quad q = 0.865, \quad p = 0.135. \qquad (3.5)$$

However, we have also investigated how changes in the parameters (3.5) affect the results.

A delta-force was chosen in Eq. (3.4) because there are few experimental results at present and because the programming of an interaction of finite range would have required much more effort.

4. The Numerical Calculations

All results have been obtained with an electronic computer CDC 3300 having a memory space of 16 K. The programm consists of 3 parts:

i) We start with a (possibly complex) energy E_1 and some definite total spin J. The radial Schrödinger equation is integrated according to the method of Runge and Kutta to give the single-particle functions in the interval $0 \leqq r \leqq 11$ fm. If these functions are defined by an eigenvalue problem (bound states or Weinberg functions), this problem is solved by iteration. As for the continuous wave functions, both the regular solution $f_E(r)$ and the irregular one $g_E(r)$ are calculated. All functions are stored.

ii) The matrix elements, which enter the expressions of section 2 are evaluated using SIMPSON's rule. If an energy integration is involved [e.g.

for $F_E^{(+)}(i,k)$, Eq. (2.13)], we do it analytically by using the single-particle GREEN's function:

$$\int_0^\infty \varphi_{E'}(r)\,\frac{dE'}{E^+-E'}\,\varphi_{E'}(r')=G_E^{(+)}(r,r')-\sum_i \frac{\varphi_i(r)\,\varphi_i(r')}{E-E_i}$$
$$G_E^{(+)}(r,r')=f_E(r_<)\,g_E^{(+)}(r_>) \tag{4.1}$$

where E_i and φ_i are the eigenvalues and eigenfunctions for the single-particle bound states and where $g_E^{(+)}(r)$ is the irregular solution i.e.

$$g_E^{(+)}(r)\sim r^{-l} \quad \text{for} \quad r\to 0, \qquad g_E^{(+)}(r)\sim e^{ikr} \quad \text{for} \quad r\to\infty. \tag{4.2}$$

iii) We repeat parts i) and ii) for an energy E_2. As we know the analytical structure of our matrix elements, especially the position of their dominant pole E_p in the complex energy plane, we can interpolate the matrix elements in the neighborhood of E_1 and E_2 by a "pole approximation", e.g.

$$F_{E,\lambda}^{(+)}(i,k)=\frac{c_1(i,k,\lambda)}{E-E_p(\lambda)}+c_2(i,k,\lambda). \tag{4.3}$$

If $|E_1-E_2|\lesssim 0.5$ or 1 MeV, the approximation (4.3) works to an accuracy of 1%, except near threshold.

Finally, either the S-matrix is evaluated at the (real) energies between E_1 and E_2 or the poles of the S-matrix are searched for in the complex plane by looking for the zeros of the determinant D Eq. (2.12). The residues are calculated. Using the values of the S-matrix another program calculates the differential and total cross section and the polarisation.

The time required for a run as described above depends on the number of states and continua involved and does not exceed 3 minutes. The numerical accuracy for the matrix elements was found to be 10^{-3}.

5. Numerical Results

5.1. Accuracy of the Method

The novel feature of the present approach is the way in which the kernel of the continuum-continuum interaction is treated. In the reaction considered here, the separable interaction $O_{2,N}$ was chosen in such a way that it contained only the $d_{3/2}\,p_{1/2}^{-1}$ resonance $|\Gamma_1\rangle$ for energies below 3 MeV and only the $d_{3/2}\,p_{3/2}^{-1}$ resonance $|\Gamma_2\rangle$ for energies above 4 MeV, c.f. Eq. (3.1). (Here and in the following, $E=0$ is the energy of the lowest neutron threshold.) Had the two resonances been closer together, we should have needed the more elaborate approximation scheme outlined in section I.3, see especially Eq. (I.3.10). This was not necessary as is evident from Table 1. This table shows positions and

partial widths of some poles of the scattering matrix, calculated either with $O_{2,N}=0$, $O_{2,N}$ containing only $|\Gamma_1\rangle$, or only $|\Gamma_2\rangle$. In each of these cases, the full set of functions Φ_i and three continua $\chi_E^{(\lambda)}$ of Eq. (3.1) were used, and first order Born approximation was applied to $I_{2,N}$.

Table 1. *The influence of the choice of the Weinberg states as explained in the text. The partial widths Γ_1, Γ_2 in keV are defined in Eq. (2.24) (in brackets: $|\Gamma_a|$)*

J^π	Weinberg states	$\|\Gamma_1\rangle=0=\|\Gamma_2\rangle$	$\|\Gamma_2\rangle=0$	$\|\Gamma_1\rangle=0$
	Position (MeV)	$4.347-.006i$	$4.346-.006i$	$4.346-.006i$
1^-	Γ_1 $(s_{1/2}\,p_{1/2}^{-1})$	$-4+12i$ (12)	$-4+12i$ (12)	$-4+11i$ (12)
	Γ_2 $(d_{3/2}\,p_{1/2}^{-1})$	$-i$ (1)	$-.3i$ (.3)	$-.5i$ (.5)
	Position	$3.629-.055i$	$3.632-.067i$	$3.629-.067i$
2^-	Γ_1 $(d_{5/2}\,p_{1/2}^{-1})$	$38-8i$ (39)	$39-6i$ (40)	$43-5i$ (43)
	Γ_2 $(d_{3/2}\,p_{1/2}^{-1})$	$66-54i$ (85)	$65-74i$ (98)	$70-67i$ (97)
	Position	$3.319-.039i$		$3.246-.039i$
3^-	Γ_1 $(d_{5/2}\,p_{1/2}^{-1})$	$72-28i$ (77)		$75-27i$ (80)

The positions of the levels are seen to change by several keV. Total and partial widths behave similarly. In view of the crude particle-hole model employed, we do not believe such changes significant. As pointed out in ref. [3], we cannot ascertain the convergence of the Born series in $I_{2,N}$ in any rigorous way, since we cannot calculate the norm of the operator $I_{2,N}$ of ref. [3]. We can, however, determine the influence of the low-order Born terms. The necessity of using the present method altogether (rather than applying the Born series throughout) is demonstrated in Table 2, in which we compare matrix elements of the operator I_2 [see Eq. (2.1)] with those of the operator $I_{2,N}$. The influence of the first order Born terms of $I_{2,N}$ on the scattering matrix is shown in Table 3 for a specific example. We compare S-matrix elements for $J^\pi=1^-$ for a 2-channel case. Of the functions $\chi_E^{(\lambda)}$ in Eq. (3.1), only $|s_{1/2}\,p_{1/2}^{-1}\rangle$ (channel 1) and $|d_{3/2}\,p_{1/2}^{-1}\rangle$ (channel 2) were used for the open channels, and $|d_{3/2}\,p_{3/2}^{-1}\rangle$ for the closed channel. The S-matrix was calculated either in the approximation (2.18), or with 1st. order Born approximation [Eqs. (2.8)–(2.17)]. In the former case, the elastic element S_{11} is solely due to potential or resonance scattering. The coupling of channel 1 to itself through the residual interaction changes S_{11} by about 0.20 in first order. The change in S_{22} is similar, except at the energy of the $d_{3/2}$ resonance ($\sim$1 MeV). This shows that the separable kernel approximates the full interaction in channel 2 very well at 1 MeV, as is to be expected. We also calculated the second order terms in the Born series for a few simple cases and found that they were reduced by a factor of ten compared

Table 2. *The importance of subtracting a Weinberg state from the kernel of the continuum-continuum interaction* ($|s\rangle = |d^{B}_{5/2}\, p^{-1}_{3/2}\rangle$, $|\chi^{(g)}_{E}\rangle = |d^{C}_{3/2}(E)\, p^{-1}_{1/2}\rangle$, $J^{\pi}=1^{-}$). *All matrixelements in MeV. The quantities* $F^{(+)}$, $G^{(+)}$, $H^{(+)}$ *are defined in section 2. The summations over* λ, λ' *extend over all elastic continua and a single inelastic* ($|d^{C}_{3/2}\, p^{-1}_{3/2}\rangle$) *one*

	$E=1$ MeV		$E=2$ MeV	
	$\|\Gamma_1\rangle=\|\Gamma_2\rangle=0$	$\|\Gamma_1\rangle\neq 0, \|\Gamma_2\rangle=0$	$\|\Gamma_1\rangle=\|\Gamma_2\rangle=0$	$\|\Gamma_1\rangle\neq 0, \|\Gamma_2\rangle=0$
$\langle s \mid V \mid s\rangle$	4.476	4.476	4.476	4.476
$\sum_{\lambda} F^{\{+\}}_{\lambda}(s,s)$	$22.296-i\ 19.343$	$22.296-i\ 19.343$	$1.949-i\ 0.594$	$1.949-i\ 0.594$
$\sum_{\lambda\lambda'} G^{\{+\}}_{\lambda\lambda'}(s,s)$	$96.166-i\ 634.525$	$0.022+i\ 0.015$	$3.073-i\ 1.699$	$0.018+i\ 0.018$
$\langle s \mid V \mid \chi^{(g)}_{E}\rangle$	2.479	2.479	0.418	0.418
$\sum_{\lambda} H^{\{+\}}_{E,\lambda}(s,\alpha)$	$40.725-i\ 35.020$	$-0.0001-i\ 0.0000$	$0.646-i\ 0.170$	$-0.0004+i\ 0.0001$

Table 3. *The influence of the first order Born term on the elements of the S-matrix* (1^{-}), *see text*

E [MeV]	First order Born term	S_{11}	S_{12}	S_{22}	$\lvert\sum S_{1\alpha} S^{*}_{\alpha 1}\rvert$	$\lvert\sum S_{1\alpha} S^{*}_{\alpha 2}\rvert$	$\lvert\sum S_{2\alpha} S^{*}_{\alpha 2}\rvert$
1	no	$-.630-.776i$	$.017+.009i$	$.992+.124i$	1.0001	.0002	1.0002
	yes	$-.776-.660i$	$.006+.001i$	$.993+.117i$	1.033	.003	1.0001
2	no	$-i\,.981-.101i$	$-.116+.118i$	$-.107-.984i$	.9997	.003	1.008
	yes	$-1.015+.112i$	$-.037+.083i$	$-.343-.938i$	1.05	.025	1.007

to the first-order terms. Therefore, our numerical results for the S-matrix and quantities derived from it are believed to have an error of $1-5\%$ which originates only from the omission of higher-order Born terms. (The numerical error was tested in several cases and was found to be smaller by a factor 3 to 5.)

As long as we subtract $|\Gamma_1\rangle$ and $|\Gamma_2\rangle$ in the region of either single-particle resonance, our results do not depend upon the precise choice of the energies where we put the Weinberg states $|\Gamma_i\rangle$ equal to zero. Any change in the separable kernel is compensated for by the Born series as long as it converges.

5.2. Resonances and Partial Widths

A complete list of the poles and residues (partial widths) of the S-matrix (including the first Born term in $I_{2,N}$), calculated with the residual interaction of Eqs. (3.4) and (3.5), is given in Table 4. The partial widths $\hat{\Gamma}_a$ are those of Eq. (2.25) divided by the factor $\exp(2i\delta(\alpha))$. Naturally, we find as many levels (poles) as would be the case in an ordinary shell-model calculation (this contradicts a remark made at the end of ref. [4]); the spectrum is approximately the same. This can be seen from the last column of Table 4 (taken from ref. [4]) which gives the energies of a bound-state calculation using the same residual interaction. Generally speaking, the energy difference between the highest and the lowest state of a given spin and parity is smaller in our case than in a bound-state calculation by up to 0.5 MeV. It thus seems that the effective interaction between states of the same multiplet is decreased when one takes into account the continuum [10]. Furthermore, the distances between neighbouring levels of the same spin and parity differ in the two calculations by up to several 100 keV. The total widths Γ (determined by the positions of the poles) depend upon the distance from threshold and from the admixture of single-particle resonances and nonresonating continua. It is interesting to notice that even for narrow resonances the partial widths $\hat{\Gamma}_a$ can be far from being real (cf. also below). The ratio $\sum|\Gamma_a|/\Gamma=q$ takes values both larger and smaller than one. The latter possibility is known to exist both in the frame of a model [11] and from a recent analysis [12] of experimental data. We are not sure, however, that the numerical accuracy is sufficient to attach significance to these numbers.

The influence of the first-order Born terms upon our results is, for a few typical examples, displayed in Table 5. The differences are seen to be rather small. This is in keeping with our remarks in the last subsection and, furthermore, seems to indicate that the Born approximation is more

[10] BERES, W. P.: Phys. Rev. Letters **27**, 1180 (1966).
[11] WEIDENMÜLLER, H. A.: Ann. Phys. (N.Y.) **29**, 378 (1964).
[12] HUMBLET, J., and A. LEJEUNE: Phys. Letters **23**, 561 (1966).

Table 4. *The poles of the S-matrix together with the partial widths. The last column is taken from ref.* [4]

J^π	Position (MeV)	Γ (keV)	Partial widths $\hat{\Gamma}_\alpha$ (keV)						$\frac{\sum \lvert \Gamma_\alpha \rvert}{\Gamma}$	Position (MeV) standard shell model
			$d_{5/2}\,p_{1/2}^{-1}$	$d_{5/2}\,p_{3/2}^{-1}$	$s_{1/2}\,p_{1/2}^{-1}$	$s_{1/2}\,p_{3/2}^{-1}$	$d_{3/2}\,p_{1/2}^{-1}$	$d_{3/2}\,p_{3/2}^{-1}$		
0^-	−2.359	–	–	–	–	–	–	–	–	−2.16
0^-	9.253	1375	–	–	$59-i\,53$	–	–	$1186-i\,450$	.90	9.98
1^-	−2.196	–	–	–	–	–	–	–	–	−1.92
1^-	1.790	365	–	–	$.5-i.8$	–	$359+i\,7$	–	.98	2.01
1^-	4.215	.6	–	–	$3.3-i\,1.3$	–	$.4-i.3$	–	~6	4.45
1^-	6.296	532	–	–	$116-i\,53$	–	$407-i\,99$	–	.99	6.66
1^-	8.696	1244	–	$-5+i\,2$	$7+i\,2$	$26-i\,51$	$252-i\,297$	$727-i\,297$	.93	9.44
2^-	−2.952	–	–	–	–	–	–	–	–	−2.99
2^-	1.827	396	$1.4-i\,1.1$	–	–	–	$389+i$	–	.98	2.06
2^-	3.573	122	$34+i\,3$	–	–	–	$92-i\,19$	–	1.04	3.51
2^-	4.157	111	$40-i\,12$	–	–	–	$64-i\,36$	–	1.03	4.24
2^-	7.778	356	$43-i\,18$	$2-i$	–	$6-i\,3$	$46-i\,20$	$239-i\,2$	.98	7.81
3^-	−2.424	–	–	–	–	–	–	–	–	−2.48
3^-	3.298	68	$73-i\,11$	–	–	–	–	–	1.07	3.02
3^-	8.982	1038	$7-i\,8$	$15-i\,15$	–	–	–	$955-i\,264$	.92	9.49
4^-	4.190	–	–	–	–	–	–	–	–	3.86

significant in adding a "direct interaction" correction to the S-matrix elements and the partial widths than it is in correcting for the positions of the poles. Again, this would indicate that our procedure converges very well.

The dependence of the energies of the bound states and resonances upon the various continua $\chi_E^{(\lambda)}$ of Eq. (3.1) is shown for a few examples

Table 5. *The influence of the first order Born term on the parameters of the* 1^- *poles (only the three continua listed below are included in the calculation)*

First order Born term	Position (MeV)	Width (keV)	Partial Widths $\hat{\Gamma}_\alpha$ (keV)		
			$s_{1/2}\, p_{1/2}^{-1}$	$d_{3/2}\, p_{1/2}^{-1}$	$d_{3/2}\, p_{3/2}^{-1}$
yes	−2.137				
no	−2.151				
yes	1.795	364	$.6-.9i$	$355+8i$	
no	1.754	347	$4.-2i$	$339+11i$	
yes	4.347	13	$12-3i$	$.6-.3i$	
no	4.332	13	$12-.6i$	$1-.4i$	
yes	6.996	794	$170-69i$	$654-74i$	$-1.8-.3i$
no	7.001	751	$183-4i$	$586+26i$	$-1.4-.4i$
yes	8.751	1309	$-.2+3i$	$296-420i$	$767-310i$
no	8.757	1268	$3+2i$	$323-323i$	$778-297i$

in Table 6. For some of the states with $J^\pi = 1^-, 2^-$ it is meaningless to omit the $d_{3/2}\, p_{1/2}^{-1}$ or $d_{3/2}\, p_{3/2}^{-1}$ continuum since the resonance in that continuum determines the position of the state in a very essential way. The energy variations amount to up to several 100 keV, c.f. also ref. [10]. For that reason, it is quite difficult and probably meaningless to try to reproduce the observed order[13] of the $1^-, 2^-, 3^-$ bound states. In the terminology of a shell-model calculation with harmonic oscillator wave functions, this uncertainty is related to the admixture of higher modes.

In order to carry through a further comparison with the bound-state calculations and to understand better the values of the partial widths, we give in Table 7 the values of the coefficients A_s defined in Eq. (2.19) for the 1^- states. Eqs. (2.24) and (2.26) show that these coefficients essentially determine the partial widths and the Gamow function, the latter being the analogue of the bound-state wave function. For comparison, we have included the corresponding coefficients obtained from a bound-state calculation[4]. The close correspondence between the two sets of coefficients (which is not perfect, because we omit the Weinberg states $|\Gamma_1\rangle$ above 3 and $|\Gamma_2\rangle$ below 4 MeV) suggests that a fairly reliable calculation of the partial widths may be performed from the coefficients

[13] Ajzenberg, F., and T. Lauritsen: Nuclear Phys. **11**, 1 (1959).

Table 6. *The shifts (in keV) of the bound states and the 1^- poles, which arise by omitting the indicated continua*

J^π	Position	Widths	Total shifts					
	(MeV)	(keV)	$d_{5/2}\,p_{1/2}^{-1}$	$d_{5/2}\,p_{3/2}^{-1}$	$s_{1/2}\,p_{1/2}^{-1}$	$s_{1/2}\,p_{3/2}^{-1}$	$d_{3/2}\,p_{1/2}^{-1}$	$d_{3/2}\,p_{3/2}^{-1}$
0^-	−2.359	–	–	–	58	–	–	46
2^-	−2.952	–	42	20	–	9	2	39
3^-	−2.424	–	93	19	–	–	–	−.3
1^-	−2.196	–	–	57	80	1	1	7
1^-	1.790	365	–	$-2+i$	$-i.5$	$6-i$	–	$240-i\,68$
1^-	4.215	.6	–	$39-i\,5$	$.5+i.1$	$79-i.5$	$50-i\,2$	$43+i$
1^-	6.296	532	–	$581-i\,139$	$87+i\,46$	$105-i\,8$	–	$-14-i27$
1^-	8.696	1244	–	$-17+i\,.4$	$2+i\,6$	$70-i\,22$	$-62+i\,233$	–

Table 7. *The coefficients A_s [Eq. (2.20)] for the 1^--states (case A) compared with the eigenvector from a standard shell model calculation (case B). The Weinberg states are arbitrarily normalized to one within a sphere of radius 6 fm. Same restriction as in Table 8*

Position (MeV)	Γ (keV)	Case	$d_{5/2}\,p_{3/2}^{-1}$	$s_{1/2}\,p_{1/2}^{-1}$	$s_{1/2}\,p_{3/2}^{-1}$	$d_{3/2}\,p_{1/}^{-1}$	$d_{3/2}\,p_{3/2}^{-1}$
−2.137	–	A	−0.042	0.998	−0.046	0.003	
		B	−0.069	0.996	−0.058	0.0003	−0.015
1.795	365	A	$-0.366+i$ 0.021	$-0.018+i$ 0.003	$-0.098+i$ 0.003	$0.925+i$ 0.009	
		B	−0.369	−0.028	−0.085	0.900	0.213
4.347	13	A	$-0.180+i$ 0.003	$0.039-i$ 0.004	$0.983+i$ 0.001		
		B	−0.241	0.040	0.966	−0.024	0.076
6.996	794	A	$0.978-i$ 0.001	$0.051-i$ 0.012	$0.170+i$ 0.012		$0.108-i$ 0.002
		B	0.890	0.077	0.211	0.338	0.207
8.751	1309	A	$0.087-i$ 0.089	$-0.001-i$ 0.004	$0.096+i$ 0.008		$-0.966-i$ 0.007
		B	0.093	−0.002	0.105	0.273	−0.952

A_s as obtained from a bound-state calculation. Clearly, this would be advantageous as a device to save effort and time. Such a calculation would determine the partial widths from Eqs. (2.24) and (2.16), omitting, of course, the denominator of Eq. (2.24). (The calculation of the latter would imply the solution of the full continuum problem.) We have tried this, omitting the denominator of (2.24), suppressing the factor $e^{i\delta^{(\alpha)}}$ and applying the approximation (2.18) to evaluate the $a_s^{(\alpha)}$.

$$\Gamma_\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi} \sum_{s=1}^{N+M} A_s a_s^{(\alpha)};$$

$$a_s^{(\alpha)} = \begin{cases} \langle \Phi_s | V | \chi_E^{(\alpha)} \rangle, & s = 1, \ldots, M \\ \langle \Gamma_{s-M}^* | \hat{V} | \chi_E^{(\alpha)} \rangle, & s = M+1, \ldots, M+N. \end{cases} \tag{5.1}$$

The quantities occuring in this expression would be easily accessible in a standard shell model calculation, (c.f. also ref. [18]) replacing, of course, the Weinberg state $|\Gamma_{s-M}\rangle$ by a bound state wave function. The absolute values of the widths from Eq. (5.1) can be found in Table 8, the numbers

Table 8. *The absolute values of the partial widths calculated according to (5.1) are compared with the exact ones Eq. (2.24) (in brackets). Only the $d_{3/2}\, p_{3/2}^{-1}$ inelastic continuum is included in the calculation*

J^π	Position (MeV)	Γ (keV)	$d_{5/2}\, p_{1/2}^{-1}$	$s_{1/2}\, p_{1/2}^{-1}$	$d_{3/2}\, p_{1/2}^{-1}$	$d_{3/2}\, p_{3/2}^{-1}$
1^-	1.795	364		4 (1)	344 (352)	
1^-	4.347	13		12 (12)	1.5 (0.6)	
1^-	6.996	794		192 (167)	612 (632)	2 (2)
1^-	8.751	1309		2 (3)	280 (484)	511 (765)
2^-	1.827	395	4 (2)		404 (384)	
2^-	3.632	134	60 (40)		112 (98)	
2^-	4.271	140	67 (50)		87 (83)	
2^-	7.798	359	150 (56)		73 (42)	547 (251)

in brackets give the absolute values of the exact partial widths from Eq. (2.24). The expression (5.1) seems to be a fair approximation for resonances close to the elastic threshold; for higher energies deviations up to a factor 2 can be observed. These deviations mainly arise from the neglect of the denominator in Eq. (2.24). The approximation (2.18) and the omission of the factor $e^{i\delta^{(\alpha)}}$ (which is not of modulus one, as it has to be calculated at the complex energy of the pole) do not give rise to significant changes (compared with the main one) (c.f. also Table 5).

5.3. Cross Sections and Polarizations

In Fig. 1 to 3 we display the energy dependence of the parameters B_L and C_L characterizing the differential cross-section and polarization

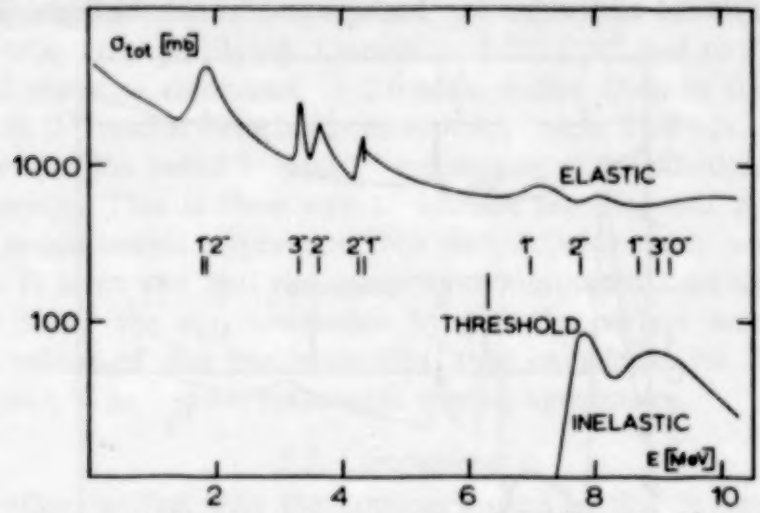


Fig. 1. The elastic and inelastic total cross-sections for $N^{15}(n, n')N^{15}$ in a logarithmic scale as a function of energy. All elastic continua (3.1) and a single inelastic one, $|d_{3/2}\, p_{3/2}\rangle$, were used in the calculation. Potential scattering p-phase shifts were included. The positions of the resonances are indicated

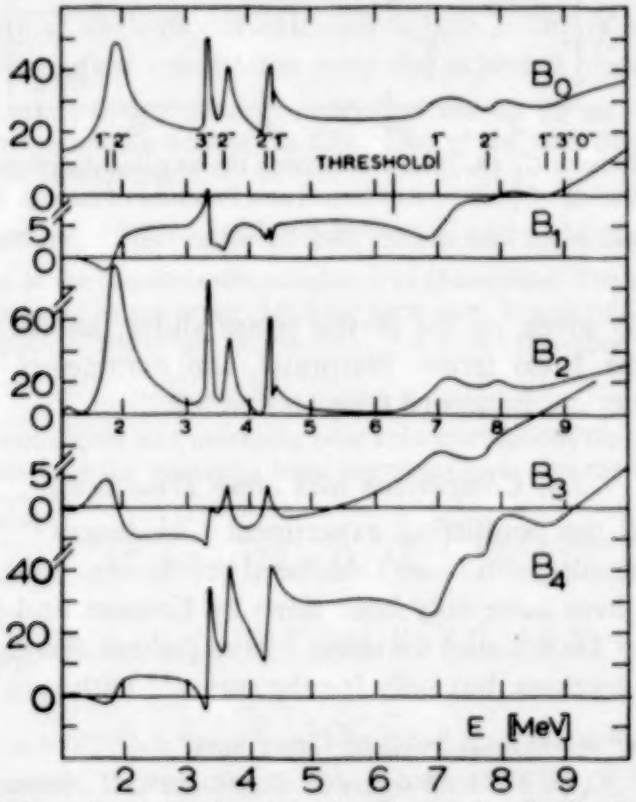


Fig. 2. The coefficients B_L (A.2), characterizing the angular distribution of unpolarized neutrons as a function of energy. Same restrictions as in Fig. 1

according to Eqs. (A.2) and (A.7) and the total elastic and inelastic cross section. The knowledge of these quantities cannot be immediately inferred from the poles and residues of the S-matrix, as we need also to know the elastic and inelastic "background" contributions. The latter

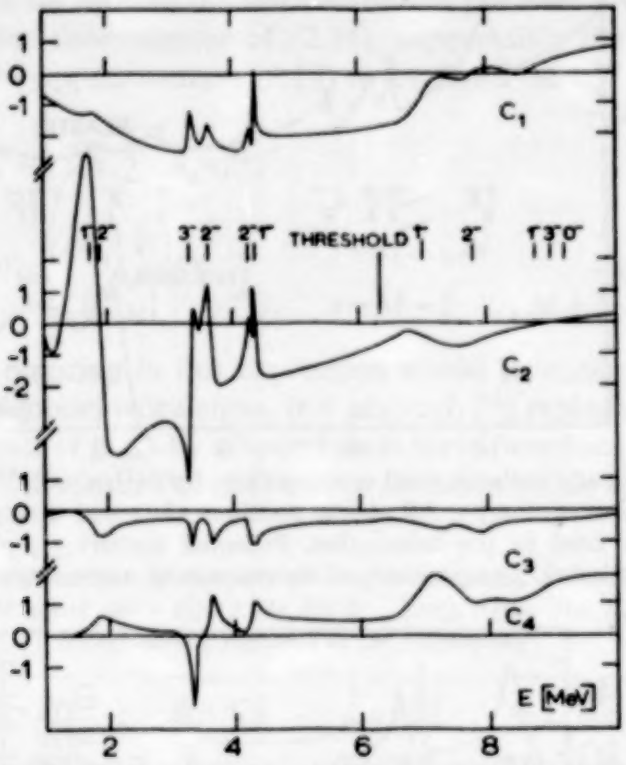


Fig. 3. The coefficients C_L (A.7), characterizing the angular distribution of the asymmetry in the scattering of polarized neutrons as a function of energy. Same restrictions as in Fig. 1

are only partly given by the elastic phase shifts; another contribution arises from the Born terms. Naturally, the parameters B_L, C_L show resonance structure, in accord with section 5.2.

5.4. Comparison with other Treatments

In view of the conflicting experimental evidence[14,15] we can but compare our results with those calculated previously. Calculations of the type reported here have only been done by LEMMER and SHAKIN[4]. The calculations by DANOS and GREINER[7] have yielded the eigenphaseshifts and the cross sections, but only for the states[16] with spin 1^-. Work by

[14] SIKKEMA, C. P.: Nuclear Phys. **32**, 470 (1962).

[15] HEWKA, P. V., C. H. HOLBROW, and R. MIDDLETON: Nuclear Phys. **88**, 561 (1966).

[16] WAHSWEILER, H. G., M. DANOS and W. GREINER: Phys. Letters **23**, 257 (1966).

BLOCH and GILLET[8], HILL and BUCK[17] and FUJII[18] has been confined to γ-induced reactions on O^{16} which we have not studied. A comparison with ref. [4] shows excellent overall agreement, if one takes into account the stronger restrictions imposed in ref. [4]. We find the following phenomenon particularly gratifying. LEMMER and SHAKIN[4] had to choose the energy of the $d_{3/2}$ resonance at 2.6 MeV rather than at 0.9 MeV as observed in O^{17} and as done in the present approach. This was necessary[4] in order to put the broad 1^- and 2^- resonances at the position observed experimentally. This is their way to include the diagonal part of the continuum-continuum interaction. No such adjustment is necessary in our case. It turns out that the continuum-continuum interaction automatically shifts the $d_{3/2}$ resonance by just the correct amount. The absolute values of the partial widths were calculated by BERES and MACDONALD[19] and show reasonable overall agreement.

5.5. Conclusions

Altogether we feel that the approach used in this paper has been thoroughly successful. Although the effort required in setting up the computer program used is quite sizeable, such a program yields, in the end, much more information than a conventional shell-model calculation. In view of the close relationship between our results and those obtained by a conventional shell-model calculation, the latter is still useful, of course, in giving a first orientation over the expected phenomena.

The authors would like to thank Prof. W. GENTNER for his generosity in making available to them computing time at the CDC 3300 of the Max-Planck-Institute for Nuclear Physics in Heidelberg.

Appendix. Differential Cross-Section and Polarisation

The elements of the S-matrix are calculated in jj-coupling. The different angular momenta were coupled in the order: $\frac{1}{2}l(j)$ for each particle and $ji(J)$ for the particle coupled to the spin i of the target to give total spin J. We therefore write

$$S_{\alpha\beta} = S^J_{l_a j_a i_a, l_b j_b i_b}.$$

Using standard techniques and averaging over spin orientations the differential cross section is calculated for the scattering from the target state a to the taget state b:

$$\frac{\overline{d\sigma_{ba}}}{d\Omega_b} = \frac{(-)^{2(i_a+\frac{1}{2})}}{(2\cdot\frac{1}{2}+1)(2i_a+1)} \frac{1}{4k_a^2} \sum_L B_L P_L(\cos\vartheta) \tag{A.1}$$

with

$$B_L = \sum_{\substack{l_a j_a \\ l'_a j'_a}} \sum_{\substack{l_b j_b \\ l'_b j'_b}} \sum_{J J'} 3(l_a j_a, l'_a j'_a, J J' L)\, 3(l_b j_b, l'_b j'_b, J J' L) \cdot (S^J_{l_b j_b i_b, l_a j_a i_a} - \delta_{l_a l_b}\delta_{j_a j_b}\delta_{i_a i_b})(S^{*J'}_{l'_b j'_b i_b, l'_a j'_a i_a} - \delta_{l'_a l'_b}\delta_{j'_a j'_b}\delta_{i_a i_b}) \tag{A.2}$$

[17] BUCK, B., and A. D. HILL: Nuclear Phys. A **95**, 271 (1967).

[18] FUJII, S.: Phys. Letters **24B**, 7 (1967).

[19] BERES, W. P., and W. MACDONALD: Nuclear Phys. A **91**, 529 (1967).

and

$$\Im(l_a j_a, l'_a j'_a, J J' L)=(-)^{\frac{1}{2}(l'_a-l_a+L)}(-)^{\frac{1}{2}+i_a}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{2L+1}\sqrt{2J+1}\sqrt{2J'+1}\sqrt{(2l_a+1)(2l'_a+1)(2j_a+1)(2j'_a+1)}\cdot \quad \text{(A.3)}$$
$$\cdot\begin{pmatrix} l_a & l'_a & L \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} j'_a & \frac{1}{2} & l'_a \\ l_a & L & j_a\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j_a & j'_a & L \\ J' & J & i_a\end{Bmatrix}.$$

Integrating (A.1) over the angles the total elastic ($a=b$) or inelastic ($a\neq b$) cross section is evaluated to be

$$\overline{\sigma_{ba}}=\frac{1}{(2\cdot\frac{1}{2}+1)}\frac{1}{(2i_a+1)}\frac{\pi}{k_a^2}\sum_{l_a j_a}\sum_{l_b j_b}\sum_{J}(2J+1)\cdot$$
$$\cdot|S^J_{l_b j_b i_b, l_a j_a i_a}-\delta_{l_a i_b}\delta_{j_a j_b}\delta_{i_a i_b}|^2. \quad \text{(A.4)}$$

To calculate the asymmetry in the scattering of a totally transversally polarized beam, we define the azimuthal angle φ of the outgoing particle as follows. Looking in the direction $\boldsymbol{k}_a$ of the incoming particle let φ be measured in the plane orthogonal to $\boldsymbol{k}_a$ and starting clockwise from the polarization vector. Then the asymmetry is given by

$$P_{r-l}=\frac{\frac{d\sigma_{ba}}{d\Omega_b}(\vartheta,\varphi)-\frac{d\sigma_{ba}}{d\Omega_b}(\vartheta,\varphi+\pi)}{\frac{d\sigma_{ba}}{d\Omega_b}(\vartheta,\varphi)+\frac{d\sigma_{ba}}{d\Omega_b}(\vartheta,\varphi+\pi)}=\frac{W_{ba}(\vartheta,\varphi)}{\frac{\overline{d\sigma_{ba}}}{d\Omega_b}} \quad \text{(A.5)}$$

with

$$W_{ba}(\vartheta,\varphi)=\frac{(-)^{2(i_a+\frac{1}{2})}\sqrt{3}}{(2i_a+1)\cdot 4k_a^2}\sum_L C_L\cdot P^1_L(\cos\vartheta)\cdot\sin\varphi. \quad \text{(A.6)}$$

The coefficients C_L are given by

$$C_L=-\sum_{\substack{l_a j_a\\ l'_a j'_a}}\sum_{\substack{l_b j_b\\ l'_b j'_b}}\sum_{J J'}\Im(l_a j_a, l'_a j'_a, J J' L)\,\hat{\Im}(l_b j_b, l'_b j'_b, J J' L)\cdot$$
$$\cdot\operatorname{Im}\{(S^J_{l_b j_b i_b, l_a j_a i_a}-\delta_{l_a i_b}\delta_{j_a j_b}\delta_{i_a i_b})\cdot \quad \text{(A.7)}$$
$$\cdot(S^{*J'}_{l'_b j'_b i_b, l'_a j'_a i_a}-\delta_{l'_a l'_b}\delta_{j'_a j'_b}\delta_{i_a i_b})\}$$

and

$$\hat{\Im}(l_b j_b, l'_b j'_b, J J' L)=(-)^{j'_b+1/2}(-)^{1/2+i_b}(-)^{1/2(l_b+l'_b+L)}\cdot$$
$$\cdot(2L+1)^{3/2}\sqrt{\frac{(L-1)!}{(L+1)!}}\begin{pmatrix} L & 1 & L \\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot$$
$$\cdot\sqrt{2J+1}\sqrt{2J'+1}\sqrt{(2l_b+1)(2l'_b+1)(2j_b+1)(2j'_b+1)}\cdot \quad \text{(A.8)}$$
$$\cdot\begin{pmatrix} l_b & l'_b & L \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} j_b & j'_b & L \\ J' & J & i_b\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ j_b & j'_b & L \\ l_b & l'_b & L\end{Bmatrix}.$$

As usual $P_L(x)$ and $P^1_L(x)$ denote the Legendre and associated Legendre polynomials.

Zeitschrift für Physik 202, 321–339 (1967)

Untersuchung gestörter Winkelverteilungen an F^{19} in ferromagnetischen Gittern

J. Braunsfurth, J. Morgenstern und H. Schmidt
II. Institut für Experimentalphysik, Universität Hamburg

H. J. Körner
Physik-Department, Technische Hochschule München

Eingegangen am 27. Februar 1967

The perturbation of the 197 keV transition angular distribution in F^{19} was investigated by time-dependent spin rotation measurements following excitation with a pulsed beam. The recoil implantation technique was used to determine the internal magnetic fields for F^{19} in Fe, Co and Ni lattices. The results are:

$$H_{HF}(F^{19} \text{ in Fe}) = +(95700 \pm 500)\,\text{Oe},$$
$$H_{HF}(F^{19} \text{ in Co}) = +(59500 \pm 1500)\,\text{Oe},$$
$$H_{HF}(F^{19} \text{ in Ni}) = -(21830 \pm 350)\,\text{Oe}.$$

The temperature and field dependence of the effective fields was studied. Strong satellite fields due to lattice perturbations were detected.
The half life and the gyromagnetic ratio of the 197 keV $5/2^+$ state in F^{19} were redetermined as $T_{1/2} = (80.2 \pm 0.5)$ nsec and $g = +1.436 \pm 0.007$.

1. Einführung

Die Untersuchung von Hyperfeinfeldern in magnetisch geordneten Gittern hat in jüngster Zeit zunehmendes Interesse gefunden, insbesondere seit der Entdeckung[1], daß am Kernort nichtmagnetischer Atome hohe Magnetfelder induziert werden, wenn sie in ferromagnetische Wirtsgitter eingebaut werden. Die Größe dieser induzierten Felder variiert stark mit der Kernladungszahl und kann, vor allem bei den $4d$- und $5d$-Übergangselementen, bis zu 10^6 Oe betragen. Ein Überblick über die vorliegenden experimentellen Daten ist in Ref.[2] gegeben. Bisher war es nicht möglich, eine quantitative Interpretation zu finden, es konnten lediglich allgemeine Trends festgestellt und Hinweise auf den Erzeugungsmechanismus erhalten werden. Im allgemeinen sind die beobachteten Felder negativ, d.h. entgegengesetzt zur Richtung eines polarisierenden äußeren Feldes, insbesondere in der oberen Hälfte der d-Schalen-Elemente. Die größten Werte wurden für Atome mit hoher Kernladungszahl gefunden.

[1] Samoilov, B. N., V. V. Sklyarevskii, and E. P. Stepanov: Soviet Phys. JETP **9**, 448 (1959).

[2] Shirley, D. A.: Ann. Rev. Nuclear Sci. **16**, 89 (1966).

Daraus schlossen Shirley und Westenbarger [3], daß Leitungselektronenpolarisation ein wesentlicher Mechanismus sei. Maxima der Felder für die *d*-Schalen-Elemente weisen zusätzlich daraufhin, daß Rumpfpolarisation eine wichtige Rolle spielt.

Bei allen experimentellen Verfahren zur Ermittelung von Hyperfeinfeldern erhält man die Meßgröße $\hbar\omega_L = g_I \mu_K H_{\text{eff}}$, wobei g_I das gyromagnetische Verhältnis des betrachteten Kernniveaus und H_{eff} das am Kernort wirksame Magnetfeld ist. Das Interesse, solche Felder zu vermessen, hat zwei Gründe:

1. Genaue Werte für möglichst viele Elemente sollten es ermöglichen, eine quantitative Erklärung des Ursprungs dieser Felder zu finden.

2. Die Größe der Hyperfeinfelder macht sie zu einem nützlichen Hilfsmittel für kernphysikalische Untersuchungen. Man gewinnt damit praktisch eine universell anwendbare Methode, Kerne bei tiefen Temperaturen zu polarisieren. Weiterhin werden Messungen der Hyperfeinwechselwirkung in isomeren und kurzlebigen angeregten Kernzuständen möglich, z. B. mit den Techniken der Kernpolarisation, des Mößbauereffekts oder gestörter Winkelverteilungen. Dadurch werden magnetische Momente angeregter Kernniveaus mit Lebensdauern bis herab zu 10^{-11} sec der Messung zugänglich.

Beim Arbeiten mit relativ langlebigen radioaktiven Isotopen können die Fremdatome vor Beginn des Experiments in das ferromagnetische Wirtsgitter eingebaut werden. Eine Variante stellt der Einbau durch Rückstoß dar. In diesem Fall wird ein kurzlebiger Kernzustand durch Coulomb-Anregung oder eine Kernreaktion bevölkert. Der auf die Kerne übertragene Rückstoß wird ausgenutzt, um sie aus einem dünnen Target heraus in ein ferromagnetisches Gitter zu schießen. Die Hyperfeinwechselwirkung im angeregten Kernzustand läßt sich dann durch Beobachtung der gestörten γ-Winkelverteilung oder durch ein Mößbauerexperiment ermitteln. Experimente dieser Art wurden bereits durchgeführt [4–6], um die magnetische Wechselwirkung in den 2^+- und 4^+- Rotationsniveaus stark deformierter *gg*-Kerne und in 2^+-Vibrationsniveaus sphärischer *gg*-Kerne durch die Analyse der zeitlich integralen gestörten Winkelverteilung zu bestimmen. Dieses Verfahren erlaubt jedoch nicht, den störenden Einfluß zusätzlicher Wechselwirkungen genau zu studieren, z. B. eine Streuung der Hyperfeinfelder um einen mittleren Wert oder zeitabhängige Relaxationsphänomene.

---

[3] Shirley, D. A., and G. A. Westenbarger: Phys. Rev. **138**, A 170 (1965).

[4] Boehm, F., G. B. Hagemann, and A. Winther: Phys. Letters **21**, 217 (1966).

[5] Grodzins, L., R. Borchers, and G. B. Hagemann: Phys. Letters **21**, 214 (1966).

[6] Borchers, R., J. D. Bronson, D. E. Murnick, and L. Grodzins: Phys. Rev. Letters **17**, 1099 (1966).

In der vorliegenden Arbeit wurde die gestörte Winkelverteilung der 197 keV-Strahlung im F^{19} untersucht. Das 197 keV-Niveau wurde dabei durch inelastische Streuung von Protonen oder α-Teilchen bevölkert. Es hat eine Halbwertszeit von 80 nsec. Durch Anregung mit einem gepulsten Strahl war es möglich, das zeitliche Verhalten der γ-Winkelverteilung direkt zu verfolgen. In einem ersten Experiment wurde zunächst die Halbwertszeit und das magnetische Moment des 197 keV-Zustands sehr genau neu vermessen. Dazu wurde die Störung der Winkelverteilung durch ein äußeres Magnetfeld ermittelt. Daraufhin wurde die Rückstoßtechnik ausgenutzt, um die F^{19}-Kerne in Fe, Co und Ni einzubauen. Die zeitlich differentielle Beobachtung der gestörten Winkelverteilung erlaubt, die Hyperfeinwechselwirkungen mit großer Präzision zu bestimmen und eine genaue Analyse des Einflusses zusätzlicher Wechselwirkungen durchzuführen. Auf diese Weise können die Hyperfeinfelder für F^{19} in Fe, Co und Ni sowie ihre Abhängigkeit von der Temperatur und einem äußeren Magnetfeld ermittelt werden.

2. Meßprinzip

Ein vereinfachtes Niveauschema des ${}_9F^{19}_{10}$ ist in Fig. 1 dargestellt. Der Grundzustand hat Spin und Parität $1/2^+$ und ein magnetisches Moment $\mu_{1/2} = +2{,}628\,\mu_K$. Lebensdauer und magnetisches Moment des 197 keV $5/2^+$-Niveaus wurden zu $\tau = (124 \pm 4)$ nsec und $\mu_{5/2} = +(3{,}69 \pm 0{,}04)\,\mu_K$ bestimmt [7]. SUGIMOTO et al.[8] ermittelten das Quadrupolmoment dieses Niveaus durch die Untersuchung gestörter Winkelverteilungen in polykristallinen ClF- und $(C_2F_4)_n$-Targets zu $-(0{,}13 \pm 0{,}03)b$. Das 197 keV-Niveau kann durch Coulomb-Anregung oder durch inelastische

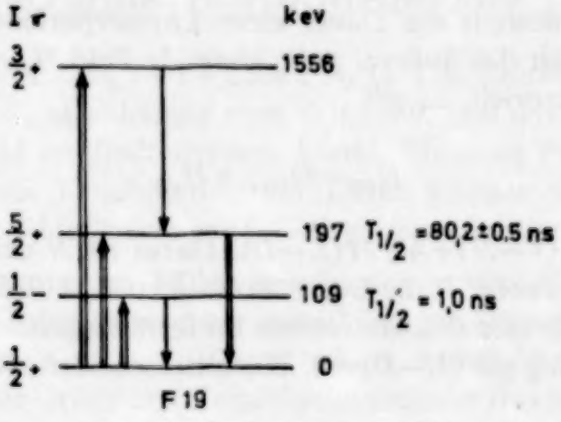


Fig. 1. Niveauschema des F^{19}

[7] DREIZLER, R. M.: Phys. Rev. **136**, B 321 (1964).

[8] SUGIMOTO, K., A. MIZOBUCHI, and K. NAKAI: Phys. Rev. **134**, B 539 (1964).

Streuung von Protonen und α-Teilchen bevölkert werden. Bei $E_p = 2{,}850$ MeV bzw. $E_\alpha = 3{,}290$ MeV treten Resonanzen für die inelastischen Prozesse auf, für die die Winkelverteilung der 197 keV γ-Strahlung stark anisotrop ist. Wird das gestreute Teilchen nicht nachgewiesen, so läßt sich die ungestörte Winkelverteilung darstellen durch [9]

$$W(\theta) = 1 + A_2 P_2(\cos\theta) + A_4 P_4(\cos\theta),$$

wobei der Winkel θ relativ zur Einschußrichtung zu zählen ist, und die Koeffizienten $A_{2,4}$ nur von der relativen Besetzung der m-Subniveaus im 197 keV-Zustand und der Strahlungscharakteristik des γ-Übergangs abhängig sind. Im vorliegenden Fall ist $A_4 = 0$ innerhalb der Meßgenauigkeit und soll daher im folgenden vernachlässigt werden. Bei Anregung des Niveaus mit einem gepulsten Strahl ist der zeitliche Verlauf der γ-Zählrate in diesem Fall (ungestörte Winkelverteilung) gegeben durch

$$N(\theta, t) = W(\theta) \cdot e^{-\lambda t} = [1 + A_2 P_2(\cos\theta)]\, e^{-\lambda t},$$

wobei $\lambda = 1/\tau$ und t die Verweilzeit der Kerne im angeregten Zustand ist.

In einem magnetisch geordneten Gitter kubischer Symmetrie wird die Winkelverteilung durch ein statisches Magnetfeld gestört, d. h. daß das am Kernort wirksame Magnetfeld H_{eff} eine konstante Größe und Orientierung für mindestens die Dauer einer Larmorperiode hat. In diesem Fall addieren sich das äußere, polarisierende Feld H_{ext} und das Hyperfeinfeld H_{HF} vektoriell. Es gilt

$$\boldsymbol{H}_{\text{eff}} = \boldsymbol{H}_{\text{lokal}} + \boldsymbol{H}_{\text{HF}}$$

mit $H_{\text{lokal}} = H_{\text{ext}}(1 - N) + 4\pi M(L - D)$. Dabei ist N der Entmagnetisierungsfaktor der Probe, L die Lorentzkorrektur und D der effektive Entmagnetisierungsfaktor des Gastatoms im ferromagnetischen Wirtsgitter. In erster Näherung gilt $(L - D) = 0$. Wir unterscheiden zwei spezielle Geometrien:

1. Das am Kernort wirksame Feld H_{eff} steht senkrecht zur Beobachtungsebene. Die zeit- und winkelabhängige Zählrate ist gegeben durch

$$N(\theta, t, H_{\text{eff}}) = [1 + A_2 P_2 \cos(\theta - \omega_L t)]\, e^{-\lambda t},$$

wobei $\omega_L = g_I \mu_K H_{\text{eff}}$. Die Larmorfrequenz läßt sich also direkt aus der Modulation des gemessenen Zeitspektrums entnehmen. Im Prinzip genügt dazu die Registrierung der Zählraten $N(\theta, t, H_{\text{eff}})$ bei einem Winkel θ

[9] Ferguson, A. J.: Angular correlation methods in gamma-ray spectroscopy. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1965.

und einem Wert für H_{eff}. In der Praxis bestimmt man meist die Größe

$$R(t)=\frac{N(45°,t,+H_{\text{eff}})-N(45°,t,-H_{\text{eff}})}{N(45°,t,+H_{\text{eff}})+N(45°,t,-H_{\text{eff}})}$$
$$=\frac{6A_2}{4+A_2}\sin 2\omega_L t\,.$$

Wenn das Vorzeichen des Koeffizienten A_2 bekannt ist, läßt sich das Vorzeichen des Produkts $g_I H_{\text{eff}}$ direkt aus der Phase von $R(t)$ entnehmen. Der Normierungsfaktor

$$\tfrac{1}{2}\left[N(45°,t,+H_{\text{eff}})+N(45°,t,-H_{\text{eff}})\right]$$

ist proportional zu $\exp(-\lambda t)$ und kann zur Bestimmung der Lebensdauer benutzt werden.

2. Im Fall einer statistisch orientierten magnetischen Wechselwirkung, der z. B. in einem magnetisch geordneten Gitter realisiert ist, wenn kein äußeres polarisierendes Magnetfeld angelegt wird, ist die zeitliche Verteilung der Zählrate beim Winkel θ gegeben durch

$$N(\theta,t,H_{\text{eff}})=\left[1+A_2\,G_2(t)\,P_2(\cos\theta)\right]e^{-\lambda t}$$

wobei $G_2(t)=\frac{1}{5}\left[2\cos\omega_L t+1+2\cos 2\,\omega_L t\right]$. Die Amplitude der Modulation $A_2 P_2(\cos\theta)$ ist abhängig vom Winkel θ, und das Vorzeichen von $g_I H_{\text{eff}}$ kann nicht ermittelt werden. Durch Messung bei zwei Winkeln und eine geeignete Kombination der Daten können die Störfunktion $A_2 G_2(t)$ und die Abfallkurve $\exp(-\lambda t)$ getrennt bestimmt werden.

In beiden diskutierten Fällen würde eine zusätzliche zeitabhängige Wechselwirkung lediglich zu einer zeitabhängigen Dämpfung des Koeffizienten A_2 führen, $A_2(t)=A_2(0)\exp(-\lambda_2 t)$, wobei die Relaxationskonstante λ_2 durch die Größe und Zeitabhängigkeit der fluktuierenden Felder vorgegeben ist. Bei nicht zu starker Dämpfung läßt sich die Larmorfrequenz jedoch immer noch exakt erhalten.

3. Experimentelle Anordnung

Die Experimente wurden am Hamburger 3 MeV-van de Graaff-Beschleuniger durchgeführt. Er liefert einen doppelt gepulsten Protonen- oder He^4-Strahl, wobei die Teilchenpakete eine Folgefrequenz von 1 MHz und eine zeitliche Länge von 0,5 nsec haben. Unter diesen Bedingungen beträgt der maximal erreichbare mittlere Strom ~ 1 μA. Als Target wurde CaF_2 benutzt, das auf 0,2 mm dicke runde (9 mm Durchmesser) Unter-

lagen aus Fe, Co oder Ni aufgedampft wurde. Die Targetdicke bei den verschiedenen Hyperfeinstrukturuntersuchungen variierte zwischen 20 und 50 $\mu g/cm^2$, entsprechend einem maximalen Energieverlust von 50 keV für 3 MeV-Protonen. Für die Messung des g-Faktors in einem äußeren Feld wurde ein 760 $\mu g/cm^2$ dickes CaF_2-Target auf einer Cu-Unterlage verwendet. Das Target wurde durch einen Ta-Zylinder von innen auf das Kopfende eines Targetbechers gepreßt, der von außen durch einen Strahl kalten N_2-Gases gekühlt werden konnte. Die Targettemperatur wurde mittels eines Cr-Ni-Constantan-Thermoelements in einer gesonderten Meßreihe direkt im Strahlfleck als Funktion der Strahlverlustleistung gemessen. Das Target befand sich zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten, der bei 12 mm Abstand und 15 mm Durchmesser der Polschuhe ein Feld von maximal 16 kOe senkrecht zur Beobachtungsebene erzeugte. Das Feld wurde mittels einer gegen eine Protonenresonanz geeichten Sonde auf 0,3% genau vermessen. Der Magnet war über der Mitte eines Goniometertisches montiert, auf dem zwei Szintillationszähler in 60 mm Abstand vom Target schwenkbar angebracht waren. Als Detektoren wurden wahlweise Valvo XP 1020/1021 oder 56 AVP mit 38 mm × 25 mm NaJ(Tl) Kristallen verwendet. Die Photomultiplier konnten durch zwei Mumetall- und einen Reineisenzylinder vollständig gegen das Streufeld abgeschirmt werden. Dies wurde durch eine geeignete Formgebung des Magnetjochs und der Spulen ermöglicht. Dadurch konnte auf eine Verwendung von Lichtleitern verzichtet werden, die eine Reduktion der Energie- und Zeitauflösung bewirkt hätten. Die zwei Detektoren dienten zur Verdoppelung der experimentellen Daten und wurden an zwei völlig voneinander getrennte Schnell-Langsam-Koinzidenzsysteme angeschlossen. Die zeitliche Analyse der registrierten γ-Quanten erfolgte mit Hilfe eines Zeit-Impulshöhen-Wandlers, der von einem Signal der 1 MHz-Pulsung des Beschleunigers gestartet wurde. Jeder Detektor lieferte die Zeit- und Energieinformation der beobachteten γ-Übergänge. Durch geeignete Aufsteuerung des Einkanaldiskriminators mit Hilfe des Zeitsignals konnte im „Langsam-Kreis" eine Zeitauflösung von $2\tau =$ 40 nsec erreicht werden, ohne dadurch den ausnutzbaren Zeitbereich des Zeit-Impulshöhen-Wandlers einzuengen. Durch diese Maßnahme konnte der Untergrund sehr wirksam unterdrückt werden. Durch geeignete Auslegung der Zeitmeßkreise und den Aufbau aus integrierten Motorola MECL Bausteinen konnten Zählraten bis zu $8 \cdot 10^4$/sec verarbeitet werden. Die Signale der Zeit-Impulshöhen-Wandler wurden in zwei getrennten 400 Kanal-Analysatoren gespeichert. Die Zeiteichung erfolgte mit Hilfe von Laufzeitkabeln, deren elektrische Länge durch Interferenzen mittels eines Hochfrequenzsenders auf besser als 0,3% geeicht wurde. Die Zeitauflösung des gesamten Systems betrug 2,0 nsec für die interessierende 197 keV-Strahlung des F^{19}.

4. Experimentelle Durchführung und Analyse

4.1. Lebensdauer und g-Faktor des 197 keV-Niveaus

Wie oben diskutiert, läßt sich durch eine geeignete Kombination der Meßdaten auch bei einer Störung der Winkelverteilung direkt der zeitliche Abfall $\exp(-\lambda t)$ der Zählrate und damit die Lebensdauer des untersuchten Kernniveaus ermitteln. Ein Beispiel ist in Fig. 2 dargestellt.

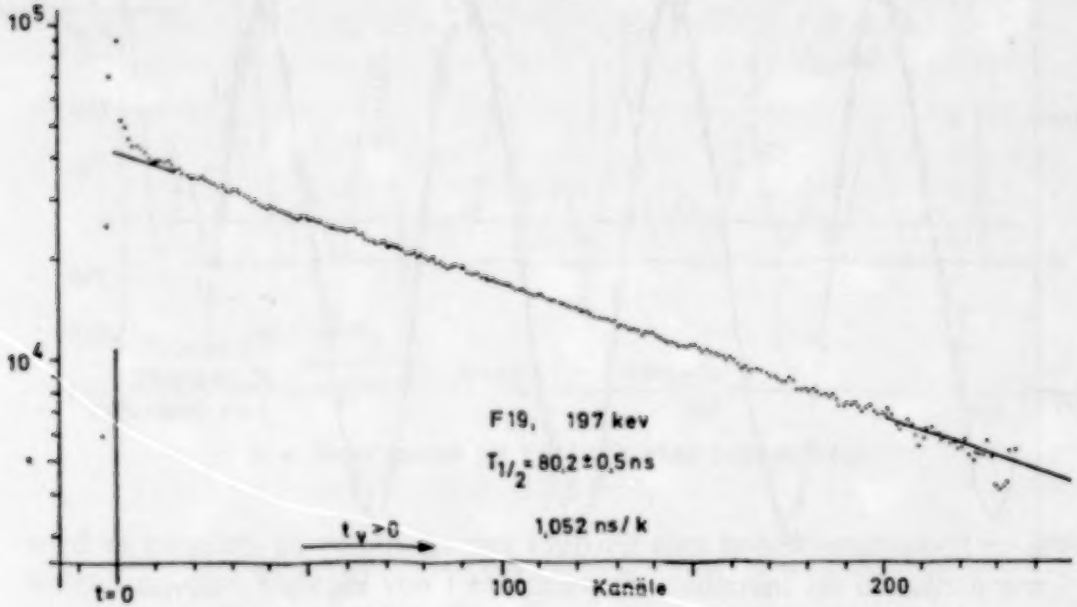


Fig. 2. Lebensdauer-Messung am 197 keV-Niveau des F^{19}

Als Mittel aus zehn voneinander unabhängigen Messungen erhielten wir den Wert

$$T_{1/2} = (80{,}2 \pm 0{,}5)\ \text{nsec}$$

für das 197 keV-Niveau des F^{19}. Der Fehler ist durch die Unsicherheit der Zeiteichung und des Untergrundes bestimmt. DREIZLER [7] gibt den aus älteren Experimenten gemittelten Wert $T_{1/2} = (85{,}8 \pm 2{,}6)$ nsec an. Innerhalb der doppelten Fehlerintervalle stimmen die Ergebnisse überein.

Fig. 3 zeigt das Resultat einer g-Faktor-Messung in einem äußeren Feld von ± 10465 Oe für ein 760 µg/cm² dickes Target. Insgesamt wurden 16 unabhängige Experimente ausgewertet. Daraus ergibt sich

$$g(F^{19}, 197\ \text{keV}) = +(1{,}436 \pm 0{,}007).$$

Der angegebene Fehler von 0,5% wurde dabei aus der Streuung der einzelnen Teilresultate entnommen. Der ermittelte g-Faktor stimmt wiederum innerhalb der doppelten Fehlerintervalle mit dem bei DREIZLER [7] aufgeführten Wert überein. Der Fehler wurde um mehr als einen Faktor zwei reduziert.

Weiterhin entnimmt man dem Experiment, daß zusätzliche Störungen durch Quadrupolwechselwirkungen oder Relaxationsphänomene in dem verwendeten CaF_2-Gitter vernachlässigbar sind. Aus den Messungen mit

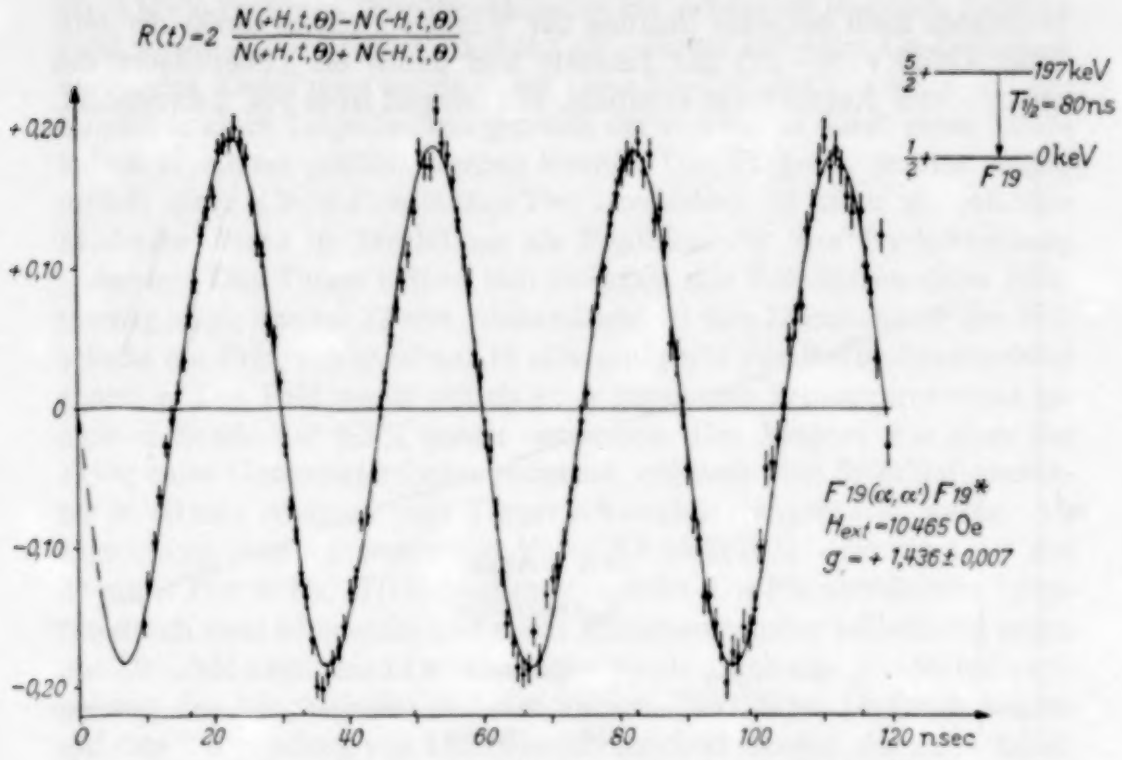


Fig. 3. g-Faktor-Messung am 197 keV-Niveau des F^{19}. Aufgetragen ist die relative Änderung der Zählrate $R(t)$ beim Umpolen eines äußeren Feldes von 10465 Oe als Funktion der Zeit

dünnen Targets erhält man für die auf den Öffnungswinkel der Detektoren korrigierten ungestörten Koeffizienten der Winkelverteilung

$$A_2 = +(0{,}139 \pm 0{,}003) \quad \text{bei} \quad E_p = 2{,}850\ \text{MeV},$$

$$A_2 = +(0{,}148 \pm 0{,}003) \quad \text{bei} \quad E_\alpha = 3{,}290\ \text{MeV}.$$

4.2. Hyperfeinfelder für F^{19} in Fe, Co und Ni

Bei einer Protonenenergie von 3 MeV erhalten die F^{19}-Kerne eine Rückstoßenergie von maximal 837 keV und minimal 25 keV. Nach LINDHARD et al.[10] berechnet sich daraus die mittlere Reichweite im Ni zu $R_{p,\,max} = 0{,}60\ \mu$ und $R_{p,\,min} = 0{,}03\ \mu$. Im CaF_2 sind die Reichweiten etwas größer, man erhält $R_{p,\,max} = 0{,}90\ \mu$ und $R_{p,\,min} = 0{,}05\ \mu$. Da bei den Messungen durchweg Targetdicken von 0,1 μ bis 0,25 μ CaF_2 verwendet wur-

[10] LINDHARD, J., M. SCHARFF, u. H. E. SCHIÖTT: Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd. **33**, No. 14 (1963).

den, erwartet man, daß ein merklicher Anteil der F^{19}-Kerne bereits in der CaF_2-Oberflächenschicht abgebremst wird. Diese Kerne führen eine Larmorpräzession im äußeren Feld H_{ext} durch.

Die verwendete Methode, die Spinrotation mit Hilfe eines gepulsten Beschleunigers zu untersuchen, erlaubt gegenüber $\gamma\gamma$-Winkelkorrelationsexperimenten eine um zwei Größenordnungen höhere Zählrate. Dadurch

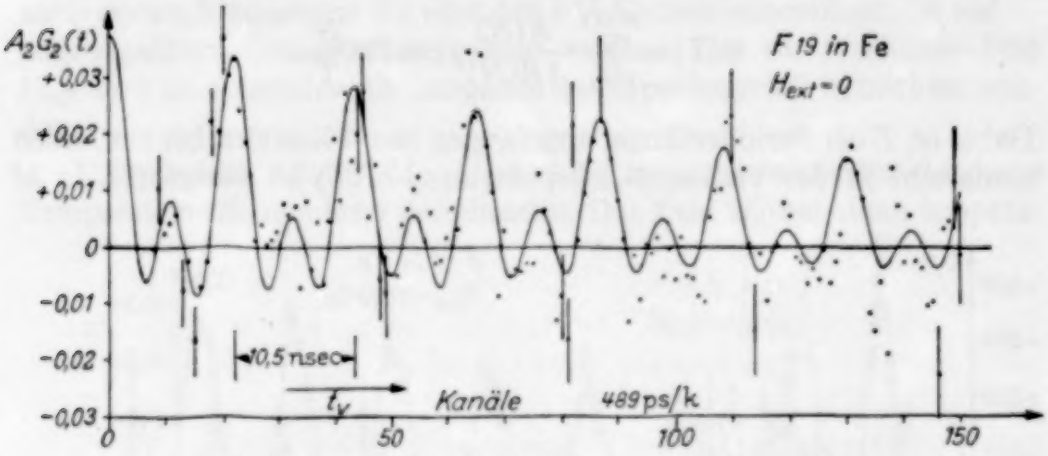


Fig. 4. Spinrotation für F^{19} in Fe ohne äußeres Feld

wird es möglich, in relativ kurzer Meßzeit eine hohe Genauigkeit zu erzielen und eine Vielzahl von Problemen zu studieren. Im einzelnen wurden folgende Punkte untersucht:

1. Die Größe der Hyperfeinfelder für F^{19} in Fe, Co und Ni.
2. Die Temperatur- und Magnetfeldabhängigkeit dieser Felder.
3. Das Auftreten von Satellitenfeldern, verursacht durch Gitterstörungen und Zwischengitterplätze, sowie deren Temperatur- und Magnetfeldabhängigkeit.

Insgesamt wurden Messungen bei 40 verschiedenen Parametersätzen (Art der Targetunterlage, Temperatur und Größe des äußeren Magnetfeldes) mit jeweils zwei voneinander unabhängigen Apparaturen parallel durchgeführt. Um den Überblick zu erhalten, werden im folgenden nur Beispiele und die Ergebnisse der Analysen diskutiert. In den Fig. 4, 5 und 6 sind Ergebnisse für je zwei Messungen an F^{19} in Fe und Ni dargestellt. Bei Experimenten ohne äußeres Feld (z. B. Fig. 4) wurde die Größe $A_2G_2(t)$ aus den bei zwei verschiedenen Winkeln aufgenommenen Daten ermittelt, bei Experimenten mit äußerem Feld wurde die oben definierte Größe $R(t)$ bestimmt.

4.2.1. Analyse der Daten. Alle Ergebnisse zeigen mehr oder weniger ausgeprägte Interferenzstrukturen und eine leichte Dämpfung der Amplituden. Daraus folgt, daß das Magnetfeld am Kernort der untersuchten

F^{19}-Atome nicht eindeutig ist, sondern eine diskrete oder kontinuierliche Verteilung aufweist. Diese Verteilung kann mit Hilfe einer Fourieranalyse untersucht werden. Die Fourierkoeffizienten sind gegeben durch

$$a(T)=\sum_{N=1}^{M(T)} \frac{R(N)}{\Delta R(N)^2} \sin 2\pi \frac{N}{T},$$

$$b(T)=\sum_{N=1}^{M(T)} \frac{R(N)}{\Delta R(N)^2} \cos 2\pi \frac{N}{T}.$$

Dabei ist T die Periodenlänge, angefangen von 4 Kanälen bis zur vollen Kanalzahl M des Vielkanal-Zeitspektrums; $M(T)$ ist das größte, in M

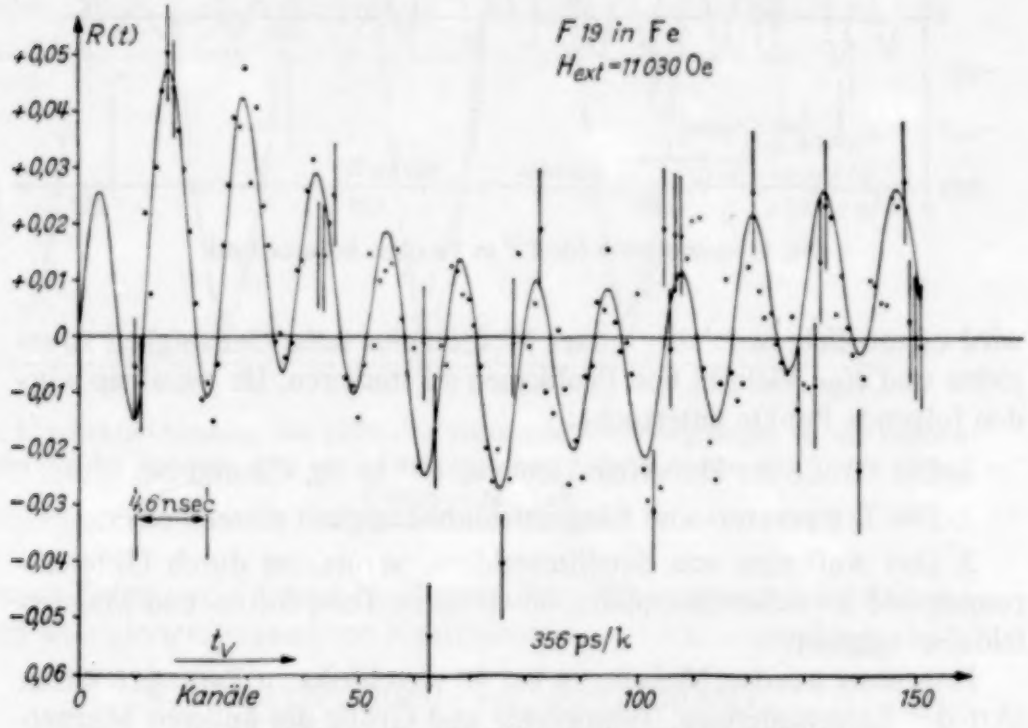


Fig. 5. Spinrotation für F^{19} in Fe bei $H_{ext}=11030$ Oe

enthaltene Vielfache der jeweiligen Periodenlänge T und $R(N)/(\Delta R(N))^2$ der mit dem Quadrat seines Fehlers bewichtete Meßwert im Kanal N des Vielkanalanalysators.

Die Analysen zeigen, daß die Zeitspektren jeweils vier Frequenzen enthalten, entsprechend vier Magnetfeldern H_{ext}, H_{HF}, H_1 und H_2. Die relativen Anteile der Kerne, die durch diese verschiedenen Felder beeinflußt werden, lassen sich aus den Amplituden der Spinpräzessionskurven entnehmen. Ohne zunächst Details zu diskutieren, können folgende Feststellungen getroffen werden:

1. Das mit H_{ext} bezeichnete Feld ist den Kernen zuzuordnen, die bereits im CaF_2 abgebremst wurden und damit nur dem Einfluß des äußeren Feldes unterliegen. Dieser Anteil läßt sich durch verschiedene Targetdicken variieren und liefert eine Larmorfrequenz, aus der der g-Faktor neu bestimmt werden kann.

2. Der zweite Anteil relativ großer Amplitude zeigt die höchste aller analysierten Frequenzen. Er wird den F^{19}-Kernen zugeordnet, die auf einem regulären Gitterplatz eingebaut wurden. Das entsprechende Feld H_{HF} wird im folgenden als „ungestörtes Hyperfeinfeld" bezeichnet werden.

3. Die beiden Satellitfelder H_1 and H_2 zeigen ein stark verschiedenes Temperaturverhalten ihrer Amplituden. Das Feld H_1 hat einen tempera-

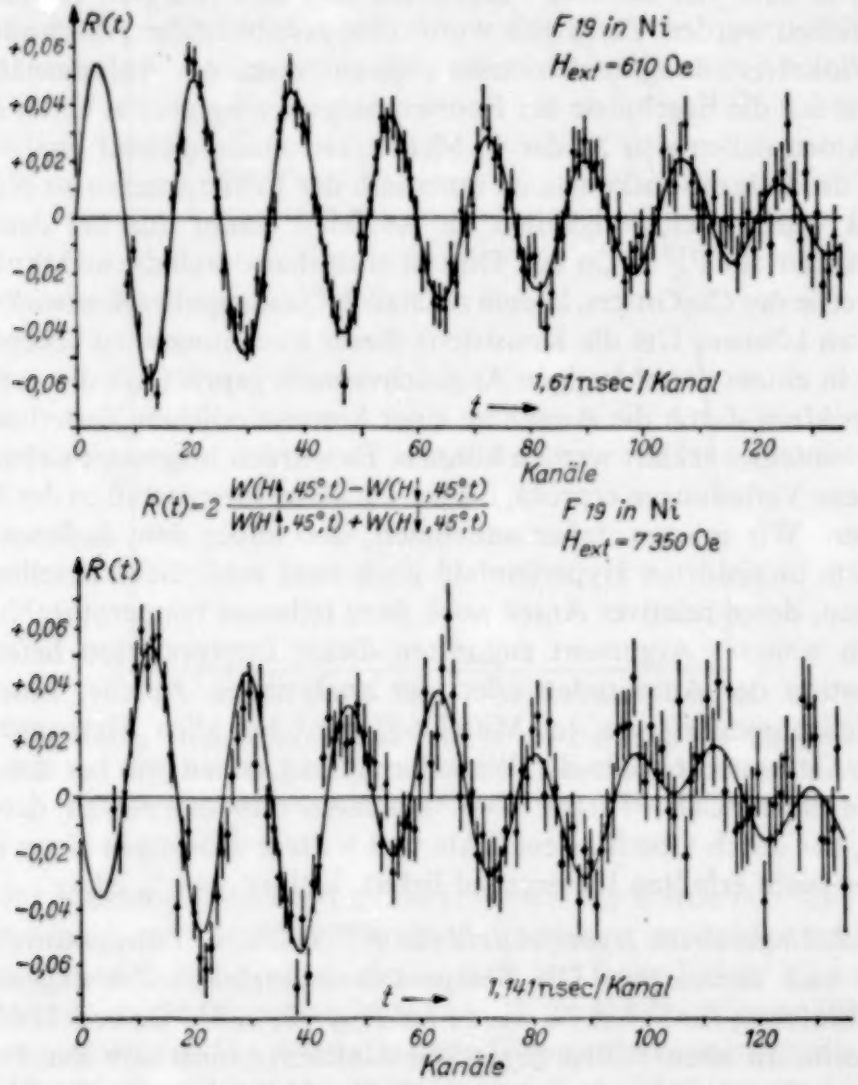


Fig. 6. Spinrotation für F^{19} in Ni für zwei verschiedene Werte des äußeren Feldes. Oberer Teil: $H_{eff} < 0$. Unterer Teil: $H_{eff} > 0$

turunabhängigen Anteil von ~15% des ungestörten Hyperfeinfeldes, wogegen die Amplitude des H_2-Feldes stark temperaturabhängig ist. Bei 200 °K ist der Anteil dieses Feldes nahezu gleich dem des ungestörten Hyperfeinfeldes; er nimmt nach höheren Temperaturen hin schnell ab und beträgt bei 450 °K nur noch ~25%.

Die Genauigkeit, mit der die verschiedenen Frequenzen durch die Fourieranalyse erhalten wurden, erschien nicht ausreichend, um detaillierte Aussagen zu erhalten. Die unzureichende Analyse ist begründet durch die nicht vernachlässigbaren statistischen Fehler ΔR der Meßdaten, nicht exakte Normierungen und die aus Rechenzeitgründen gewählte relativ grobe Schrittweite der Periodenlänge T. Daher wurden alle Daten einem Angleich nach der Methode der kleinsten Quadrate unterzogen, in dem vier diskrete Frequenzen und ihre relativen Amplituden angeglichen wurden. Zusätzlich wurde eine zeitabhängige Abschwächung der Winkelverteilungskoeffizienten angenommen. Als Anfangsnäherungen wurden die Ergebnisse der Fourieranalysen eingegeben. Unter diesen Annahmen ließen sich 38 der 40 Meßkurven ausgezeichnet analysieren, wobei die Relaxationskonstante innerhalb der Fehlergrenzen zu Null bestimmt wurde. Schwierigkeiten im Angleich traten nur bei den zwei Datensätzen für F^{19} in Co auf. Dies ist erklärbar durch die nichtkubische Symmetrie des Co-Gitters, in dem zusätzlich Quadrupolwechselwirkungen auftreten können. Um die Konsistenz dieser Rechnungen zu überprüfen, wurde in einem unabhängigen Angleichversuch geprüft, ob die gemessenen Spektren durch die Annahme einer kontinuierlichen Verteilung des Hyperfeinfeldes erklärt werden können. Es wurden insgesamt sieben verschiedene Verteilungen erprobt, die jedoch keine Interpretation der Daten erlauben. Wir müssen daher annehmen, daß außer dem äußeren Feld und dem ungestörten Hyperfeinfeld noch zwei zusätzliche Satellitfelder auftreten, deren relativer Anteil noch dazu teilweise temperaturabhängig ist. Ein weiteres Argument zugunsten dieser Interpretation liefert die Summation der Amplituden aller vier analysierten Anteile. Innerhalb der Meßgenauigkeit von im Mittel 6% wird bei allen Messungen die gleiche Gesamtamplitude der Winkelverteilung erzielt wie bei der Messung in einem CaF_2 Target. Dies bedeutet, daß der Anteil der F^{19}-Kerne, der durch Oberflächeneffekte und weitere Störungen einen in der Analyse nicht erfaßten Untergrund liefert, kleiner als 6% ist.

4.2.2. Ungestörtes Hyperfeinfeld für F^{19} in Ni. 1. Temperaturabhängigkeit und Vorzeichen: Die Temperaturabhängigkeit des ungestörten Hyperfeinfeldes für F^{19} in Ni wurde bei $H_{ext}=0$, 11030 Oe und 12650 Oe untersucht. In allen Fällen liegen die Meßwerte innerhalb der Fehlergrenzen auf entsprechend normierten Brillouin-Funktionen für Ni. Das Feld am F^{19}-Kernort zeigt also das gleiche Temperaturverhalten wie die

Sättigungsmagnetisierung des Wirtsgitters (Fig. 7). Das Vorzeichen des Hyperfeinfeldes erhält man aus zwei unabhängigen Informationen, einmal aus der Phase der Larmorpräzessionsfunktion $R(t)$, zum anderen aus der Variation des effektiven Feldes H_{eff} mit der Größe von H_{ext}. Da

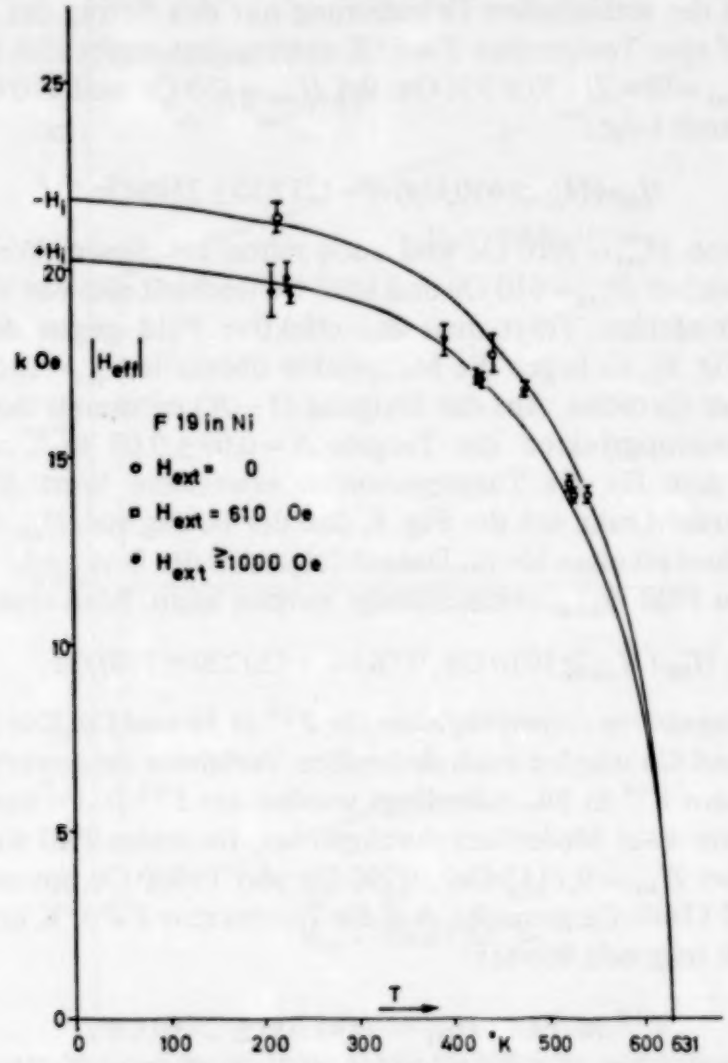


Fig. 7. Ungestörtes Hyperfeinfeld für F^{19} in Ni als Funktion der Temperatur. Bei Meßwerten mit $H_{\text{ext}} \neq 0$ wurde H_{ext} subtrahiert. Die ausgezogenen Kurven sind entsprechend normierte Brillouin-Funktionen für Ni

bei jeder Messung immer ein gewisser Anteil der Kerne im CaF_2 abgebremst wird, kann man durch Vergleich der Phasen zweifelsfrei schließen, ob das Hyperfeinfeld positiv oder negativ ist. Beim F^{19} in Ni wechselt das Vorzeichen des Hyperfeinfeldes bei $H_{\text{ext}} > 610$ Oe. Dieser Effekt ist eindeutig an den in Fig. 6 dargestellten Daten zu erkennen, da die Phase der beiden Meßresultate ($H_{\text{ext}} = 610$ Oe und $H_{\text{ext}} = 7350$ Oe) um 180° verschieden ist.

2. Abhängigkeit vom äußeren Magnetfeld H_{ext}: Insgesamt wurden für F^{19} in Ni Messungen bei 10 verschiedenen äußeren Feldern durchgeführt, und zwar bei 450 Oe, 610 Oe, 1010 Oe, 2100 Oe, 3145 Oe, 7350 Oe, 10910 Oe, 11030 Oe, 12650 Oe und 16100 Oe. Ohne äußeres Feld erhält man wegen der statistischen Orientierung nur den Betrag des effektiven Feldes. Auf eine Temperatur $T=0\,°K$ extrapoliert ergibt sich für F^{19} in Ni $H_{HF}(H_{ext}=0)=21830\pm350$ Oe. Bei $H_{ext}=450$ Oe und 610 Oe ist H_{eff} negativ. Damit folgt:

$$H_{HF}(H_{ext}\leqq 610\text{ Oe})=-(21830\pm350)\text{ Oe}.$$

Oberhalb von $H_{ext}=1010$ Oe und auch schon bei diesem Wert ist H_{eff} positiv. Zwischen $H_{ext}=610$ Oe und 1010 Oe wechselt also das Vorzeichen des Hyperfeinfeldes. Trägt man das effektive Feld gegen das äußere Feld auf (Fig. 8), so liegen die Meßpunkte oberhalb $H_{ext}=1010$ Oe sehr gut auf einer Geraden. Aus der Steigung $(1-N)$ entnimmt man für den Entmagnetisierungsfaktor des Targets $N=0{,}09\pm0{,}03$ in Übereinstimmung mit dem für die Targetgeometrie erwarteten Wert $N_{theor}=0{,}1$. Weiterhin ersieht man aus der Fig. 8, daß der Betrag von H_{eff} beim Vorzeichenwechsel erhalten bleibt. Daraus folgt, daß der Beitrag $4\pi M(L-D)$ zum lokalen Feld H_{lokal} vernachlässigt werden kann. Man erhält:

$$H'_{HF}(H_{ext}\geqq 1010\text{ Oe}, 0\,°K)=+(20220\pm350)\text{ Oe}.$$

4.2.3. Ungestörte Hyperfeinfelder für F^{19} in Fe und Co. Die Daten für F^{19} in Fe und Co wurden nach demselben Verfahren ausgewertet wie die Ergebnisse am F^{19} in Ni. Allerdings wurden am F^{19} in Fe nur vier, am F^{19} in Co nur zwei Meßreihen durchgeführt. Im ersten Fall wurden Experimente bei $H_{ext}=0{,}1143$ Oe, 10910 Oe und 11030 Oe, im zweiten bei $H_{ext}=0$ und 12650 Oe gemacht. Auf die Temperatur $T=0\,°K$ extrapoliert ergeben sich folgende Werte:

$$F^{19}\text{ in Fe:}\quad H_{HF}=+(95700\pm\ 500)\text{ Oe},$$

$$F^{19}\text{ in Co:}\quad H_{HF}=+(59500\pm1500)\text{ Oe}.$$

Es konnten keine Hinweise dafür gefunden werden, daß beim F^{19} in Fe ein ähnlicher Vorzeichenwechsel wie bei F^{19} in Ni auftritt. Wegen der hohen Meßgenauigkeit von $\pm0{,}5\%$ kann man aus dem Verlauf von H_{eff} mit H_{ext} mit einiger Sicherheit entnehmen, daß das Vorzeichen des ungestörten Hyperfeinfeldes im ganzen Meßbereich positiv ist. Beim F^{19} in Co lassen die wenigen experimentellen Daten keine Aussagen darüber zu.

4.2.4. Satellit-Hyperfeinfelder für F^{19} in Fe und Ni. Die Fourieranalyse der Meßergebnisse ergibt außer den beiden Hauptfrequenzen, die dem äußeren und dem ungestörten Hyperfeinfeld zuzuordnen sind, noch

zwei Satellitfrequenzen. Diese wurden für das Angleichverfahren nach der Methode der kleinsten Quadrate als Anfangsnäherungen verwendet. Hierbei muß jedoch eine gewisse Mehrdeutigkeit des Angleichs in Kauf

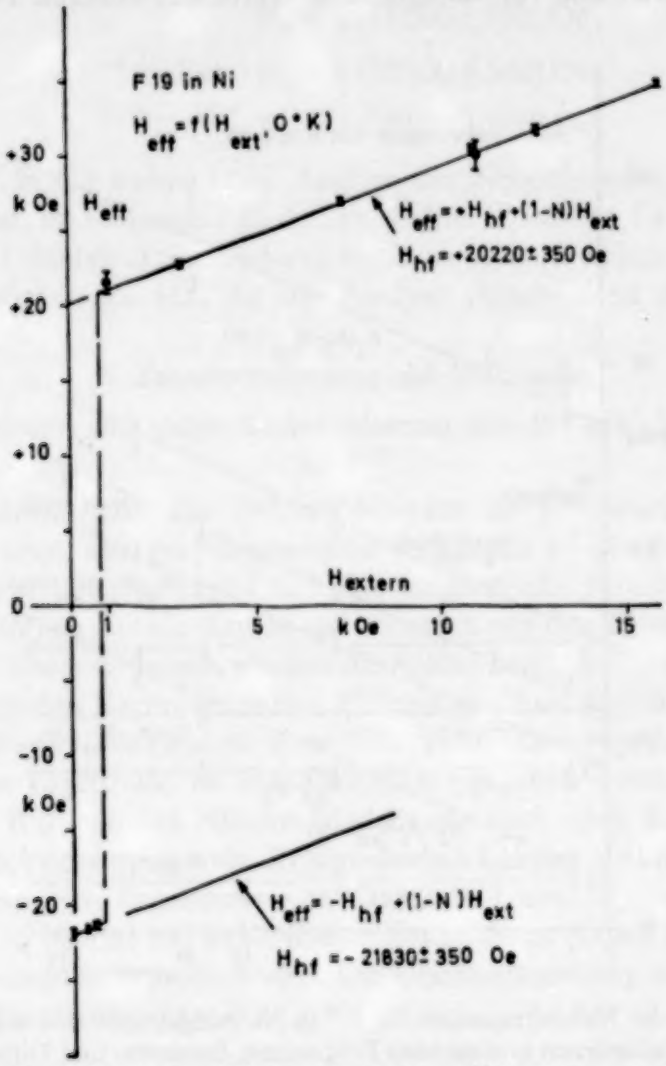


Fig. 8. Abhängigkeit des effektiven Feldes für F^{19} in Ni vom äußeren Feld

genommen werden, da innerhalb der statistischen Genauigkeit ein Kurvenzug, der sich aus mehreren periodischen Funktionen additiv zusammensetzt, durch mehrere analytische Ausdrücke dargestellt werden kann. In Praxis bedeutet das, daß als Ergebnis eines Angleichs außer den Frequenzen, die die Fourieranalyse liefert, noch deren Differenz- und Summenfrequenzen auftreten. Diesen Satz von erzeugenden Frequenzen, Differenz- und Summenfrequenzen kann man unabhängig von den Ergebnissen der Fourieranalyse auswerten. War die Voraussetzung, daß nur zwei Nebenfrequenzen zusätzlich auftreten, innerhalb der statistischen

Meßgenauigkeit richtig, so muß sich daraus eine eindeutige Lösung für die beiden Nebenfrequenzen ergeben. Das Ergebnis solch einer Analyse ist in Fig. 9 dargestellt, wobei die Frequenzen in Magnetfeldwerte umgerechnet worden und für verschiedene Werte des äußeren Feldes aufgetragen sind.

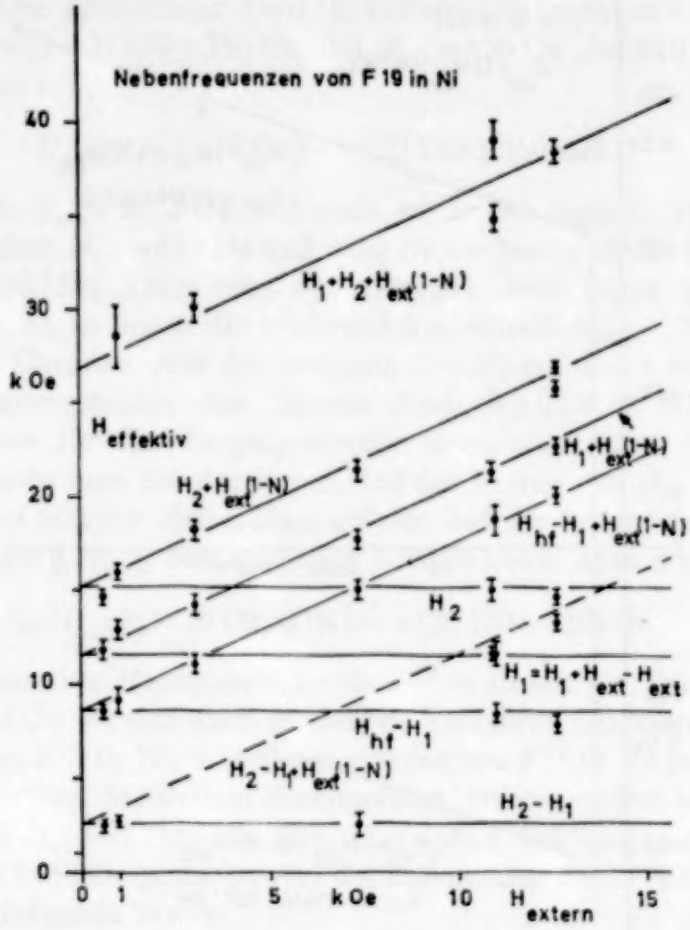


Fig. 9. Analyse der Nebenfrequenzen für F^{19} in Ni. Aufgetragen sind die im Angleich berechneten verschiedenen erzeugenden Frequenzen, Summen- und Differenzfrequenzen in Einheiten des zugeordneten Feldes für verschiedene Werte des äußeren Feldes

Die Satellit-Hyperfeinfelder zeigen in ihrer Größe die gleiche Temperaturabhängigkeit wie die ungestörten Hyperfeinfelder. Ihre relativen Anteile verhalten sich jedoch verschieden für verschiedene Temperaturen. Der H_1-Anteil ist in seiner Intensität praktisch temperaturunabhängig und beträgt $\sim 15\%$ des dem ungestörten Hyperfeinfeld zuzuordnenden Anteils. Der H_2-Anteil variiert dagegen stark mit der Temperatur. Er ist zwischen 200 °K und 300 °K von gleicher Größe wie der ungestörte Beitrag und nimmt mit steigender Temperatur des Targets rasch ab. Bei 450 °K beträgt er nur noch $\sim 25\%$ des ungestörten Anteils.

Auf die Temperatur 0 °K extrapoliert ergeben sich folgende Werte für die Satellitfelder:

$$F^{19} \text{ in Ni:} \quad H_1 = +(11600 \pm 350)\,\text{Oe},$$
$$H_2 = +(15200 \pm 350)\,\text{Oe},$$
$$F^{19} \text{ in Fe:} \quad H_1 = +(32800 \pm 500)\,\text{Oe},$$
$$H_2 = +(56900 \pm 500)\,\text{Oe}.$$

Für F^{19} in Co wurde keine Analyse der Nebenfrequenzen durchgeführt. Co hat, im Gegensatz zu den kubischen Kristallen Fe und Ni, eine hexagonale Gitterstruktur. Dadurch treten zusätzliche elektrische Quadrupolwechselwirkungen auf, die die Analyse entscheidend komplizieren.

5. Zusammenfassung und Diskussion

5.1. Lebensdauer und magnetisches Moment des 197 keV $5/2^+$-Zustands im F^{19}

Die Halbwertszeit des 197 keV-Niveaus im F^{19} wurde zu $T_{1/2} = (80{,}2 \pm 0{,}5)$ nsec, das gyromagnetische Verhältnis zu $g = +1{,}436 \pm 0{,}007$ neu bestimmt. Daraus ergibt sich das magnetische Moment zu $\mu_{5/2} = +(3{,}59 \pm 0{,}02)\,\mu_K$. Beide Ergebnisse stimmen mit den Resultaten älterer Messungen überein, jedoch wurden die Fehler beträchtlich reduziert. Die niedrig liegenden Kernniveaus des F^{19} mit positiver Parität sind theoretisch relativ gut verstanden. Eine Übersicht über experimentelle und theoretische Ergebnisse ist von DREIZLER[7] gegeben worden. F^{19} kann sowohl im Rahmen des Nilsson-Modells als auch eines Schalenmodells unter Berücksichtigung von Restwechselwirkungen diskutiert werden. Die theoretischen Ergebnisse von DREIZLER[7] sind $T_{1/2} = 85$ nsec und $\mu = +3{,}59\,\mu_K$ für das 197 keV-Niveau, das in dieser Arbeit als $s-d$-Loch im Ne^{20}-Rumpf interpretiert wird. Die Übereinstimmung mit den experimentellen Daten ist sehr gut.

5.2. Hyperfeinfelder für F^{19} in Fe, Co und Ni

Die Rückstoß-Einbautechnik wurde benutzt, um F^{19} in Fe, Co und Ni einzubauen. Die hier benutzte Methode, Hyperfeinstrukturwechselwirkungen durch eine zeitlich differentielle Beobachtung der gestörten Winkelverteilung zu studieren, erlaubt eine hohe Präzision und damit eine sorgfältige Analyse der Daten. Der Angleich zeigt eindeutig, daß drei verschiedene induzierte Felder am F^{19}-Kernort auftreten, die als H_{HF}, H_1 und H_2 bezeichnet werden. Ein Versuch, die Daten durch kontinuierliche Feldverteilungen anzugleichen, ergab keine befriedigenden Ergebnisse. Das größte auftretende Feld H_{HF} wird dem Anteil der Fluoratome zugeordnet, die auf einem regulären Gitterplatz eingebaut wurden.

Es folgt in seiner Temperaturabhängigkeit der Sättigungsmagnetisierung des Wirtsgitters. Auf die Temperatur $T=0\,°K$ extrapoliert ergeben sich folgende Werte:

$$F^{19} \text{ in Ni:} \quad H_{HF} = -(21830 \pm 350)\,Oe,$$
$$F^{19} \text{ in Co:} \quad H_{HF} = +(59500 \pm 1500)\,Oe,$$
$$F^{19} \text{ in Fe:} \quad H_{HF} = +(95700 \pm 500)\,Oe.$$

Das Hyperfeinfeld für F^{19} in Ni zeigt eine anomale Abhängigkeit vom äußeren Feld. Zwischen $H_{ext}=610\,Oe$ und 1010 Oe wechselt H_{HF} das Vorzeichen. Dieses Phänomen ist nicht verstanden. Die verwendete experimentelle Methode erlaubt, eventuelle experimentelle Fehler bei der Untersuchung des Effekts mit Sicherheit auszuschließen. Aus der Amplitude der Oszillation kann man zusätzlich entnehmen, daß auch unterhalb des Sprungpunktes, bei $H_{ext}=610\,Oe$, das effektive Magnetfeld um weniger als 10° von der Richtung des äußeren Feldes abweicht.

Trägt man die Hyperfeinfelder für F^{19} in Fe, Co und Ni gegen die Magnetonenzahl des Wirtsgitters auf (Fig. 10), so ergibt sich eine Gerade,

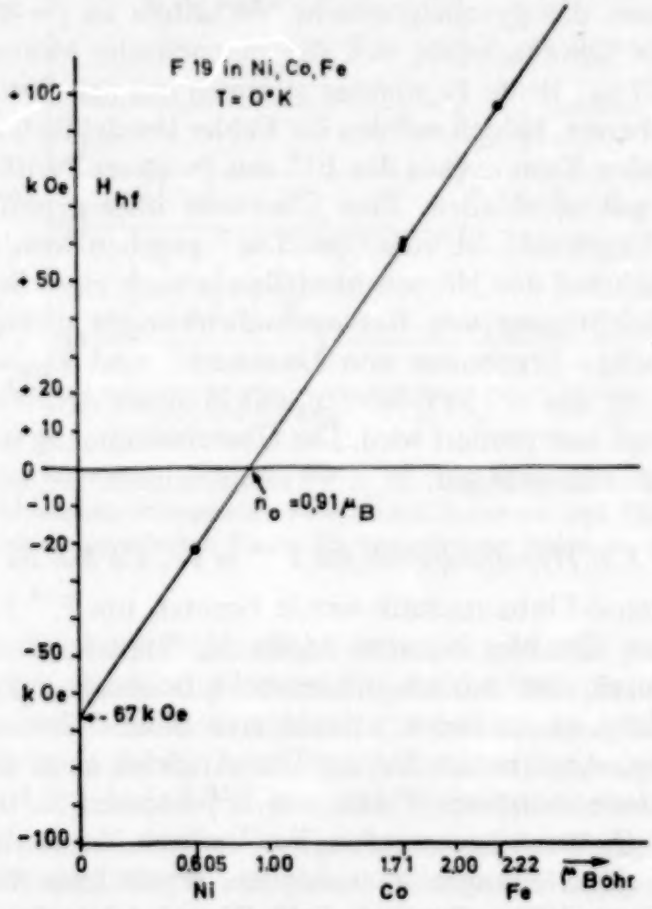


Fig. 10. Abhängigkeit der ungestörten Hyperfeinfelder für F^{19} in Fe, Co und Ni von der Magnetonenzahl des Wirtsgitters

wenn für H_{HF} (F^{19} in Ni) der für kleine äußere Felder bestimmte negative Wert eingetragen wird. Der Achsenabschnitt liegt bei $-(66900 \pm 300)$ Oe. Die Größenordnung der experimentell bestimmten Felder für F^{19} in Fe, Co und Ni ist vergleichbar mit den Werten, die durch Kernresonanzexperimente am F^{19}-Grundzustand für MnF_2 gefunden wurden[11].

Die zwei weiteren induzierten Felder H_1 und H_2 betragen $+(11600 \pm 350)$ Oe bzw. $+(15200 \pm 350)$ Oe für F^{19} in Ni sowie $+(32800 \pm 500)$ Oe bzw. $+(56900 \pm 500)$ Oe für F^{19} in Fe. Das H_1-Feld hat einen temperaturunabhängigen Anteil von $\sim 15\%$ relativ zum ungestörten Hyperfeinfeld. Es sollte Fluoratomen zuzuschreiben sein, die sich auf Zwischengitterplätzen befinden, wobei die thermische Bewegung nicht ausreicht, das Atom auf einen regulären Gitterplatz zu befördern. Der relative Anteil des Feldes H_2 variiert stark mit der Temperatur und sollte daher Fluoratomen zuzuschreiben sein, in deren Umgebung das Gitter gestört ist. Mit steigender Targettemperatur heilen die Störstellen schneller aus und der Anteil dieses Feldes geht zurück.

Obwohl das vorliegende Experiment sicher nicht typisch ist, und die Ergebnisse nicht ohne Einschränkung auf andere Experimente übertragen werden sollten, bei denen die Rückstoßtechnik zum Einbau in ferromagnetische Gitter benutzt wird, so zeigt es doch, daß in jedem Fall sehr genaue Messungen und sorgfältige Analysen durchgeführt werden müssen. Bei der Messung zeitlich integraler gestörter Winkelverteilungen dürfte die Empfindlichkeit der Methode kaum ausreichen, um den Einfluß mehrerer, am Kernort wirksamer Felder hinreichend genau zu studieren.

Wir danken Herrn Prof. W. JENTSCHKE für seine stetige Förderung und sein Interesse an dieser Arbeit. Die Untersuchung wurde durch das Bundesministerium für Wissenschaftliche Forschung unterstützt.

[11] Siehe FREEMAN, A. J., and R. E. WATSON, in: Magnetism, vol. II A, p. 167 (ed. by G. T. RADO and H. SUHL). New York and London: Academic Press 1965.

Zeitschrift für Physik 202, 340–348 (1967)

Shell Model Approach to Intermediate Resonances

W. BRENIG

Max-Planck-Institut für Physik
and Physik-Department, Technische Hochschule München

Received March 1, 1967

MIGDAL's theory of nuclear structure is extended to treat the low energy intermediate scattering resonances. It is shown that the position and width of resonances can be calculated using the same effective force as for the calculation of response functions and nuclear moments.

1. Introduction

There exist essentially two different approaches to nuclear scattering, the shell model approach to reaction theory (SMART)[1,2] and the projection operator approach to reaction theory (POP ART)[3]. In SMART one starts with uncoupled single particle states of the shell model and then couples them to the desired degree of accuracy, in POP ART one starts with the completely coupled compound system and then by a suitable projection procedure decouples it to the desired degree of approximation.

In SMART of course only the coupling of a few low lying states is considered explicitely. The coupling to the rest is taken into account by using an effective renormalized force instead of the bare nucleon force. An important problem then is the determination of this force.

Recently great progress has been made in this respect by MIGDAL and his collaborators[4]. They showed that two different types of observable quantities can be calculated using the same kind of effective force: The response function for γ-ray and electron scattering of the A-particle nucleus and the nuclear moments of the $A \mp 1$ particle nuclei.

The aim of this paper is to show that the same effective force can be used to calculate the strength function and the position and width of intermediate resonances for the scattering of a low energy nucleon by an A-particle nucleus.

A basic quantity of the theory is the so-called vertex part obeying the Bethe-Salpeter equation. This equation is very convenient for introducing renormalized quantities, in particular the effective forces. As

---

[1] MAC DONALD, W. M.: Nuclear Phys. **56**, 636, (1964).
[2] BROWN, G. E., J. A. EVANS, and D. J. THOULESS: Nuclear Phys. **45**, 164 (1963).
[3] BLOCK, B., and H. FESHBACH: Ann. Phys. (N.Y.) **23**, 47 (1963).
[4] MIGDAL, A. B., and A. I. LARKIN: Nuclear Phys. **51**, 501 (1964).

MIGDAL showed, from the renormalized vertex part one can read off the energy of collective states, and their transition probabilities as well as certain static moments[4]. We shall see later on, that also the resonating part of the nucleon selfenergy can be determined from the renormalized vertex part.

Knowing the selfenergy one can then solve the scattering problem and determine the crossections. In the following we shall pursue this way in the opposite direction i.e. first consider the scattering matrix, express this in terms of the single particle GREEN's function, which in turn is obtained from DYSON's equation using the selfenergy which finally is determined from the vertex part.

2. The Scattering Matrix

We start by defining the single particle shell model wave functions and the corresponding shell model scattering matrix $s_{kk'}$. The wave functions are supposed to be solutions of

$$(T+V)\,\varphi_\mu=\varepsilon_\mu\,\varphi_\mu \tag{1}$$

where V is an appropriate hermitian single particle potential which later on will be identified with the non resonating part of the selfenergy. In the continuum region (1) has to be supplemented by a boundary condition to make the solution unique. This may be done by choosing a plane wave state φ_k, being a solution of $(T-k^2/2m)\,\varphi_k=0$ and using the asymptotic condition in the form

$$\frac{i\eta}{k^2/2m-T-V+i\eta}\,\varphi_k \Rightarrow \overset{+}{\varphi}_k; \qquad \eta\to+0. \tag{2}$$

φ_μ then stands for φ_m (m the spin and radial quantum numbers) in the discrete part of the spectrum and for $\overset{+}{\varphi}_k$ in the continuum part. The shell model scattering matrix is given by

$$s_{k\,k'}=\langle\bar{\varphi}_k\,|\,\overset{+}{\varphi}_{k'}\rangle=\delta(k-k')-2\pi\,i\,\langle\varphi_k|\,V\,|\,\overset{+}{\varphi}_{k'}\rangle\,\delta\left(\frac{k^2-k'^2}{2m}\right) \tag{3}$$

where $\bar{\varphi}_k$ is defined similar to (2) by taking the limit $\eta\to-0$.

In order to define the antisymmetrized many body scattering states it is useful to introduce the field operators $\psi(r)$ and

$$\psi_\alpha=\int\varphi_\alpha^*(r)\,\psi(r)\,d_3r\,. \tag{4}$$

The asymptotic condition for the compound system then can be written as

$$\frac{i\eta}{k^2/2m-H+i\eta}\,\psi_k^*\,|0\rangle\Rightarrow|\overset{+}{k}\rangle\,. \tag{5}$$

Here $|0\rangle$ is the exact target ground state with energy E_0 and $H=H-E_0$ i.e.

$$H|0\rangle=0. \tag{6}$$

The difference of (5) as compared to SMART consists in the use of this correlated ground state instead of a model state. The elimination of correlations and the transformation to a quasi particle model is only reached after the renormalization procedure.

Of course this elimination could also be done by POP ART. We prefer the GREEN's function method since to our knowledge it is the only one which has lead to precise relations to the other nuclear properties mentioned in the introduction; and thus to a unification of linear response theory, the theory of nuclear moments and the theory of low energy scattering.

Another advantage of the GREEN's functions technique is the possibility to take the effect of collective ground state correlations into account by means of the so-called "backward going graphs" [2]. These are particularly important in treating the coupling of a particle to low lying collective states.

Using the standard techniques of scattering theory one derives from (5) for the S-matrix $S_{kk'}=\langle \bar{k}|\overset{+}{k'}\rangle$

$$S_{kk'}=\int s_{kp}\left\{\delta(p-k')-2\pi i\, t_{pk'}\,\delta\left(\frac{p^2-k'^2}{2m}\right)\right\}d^3p \tag{7}$$

with

$$\langle 0|\psi_p|\overset{+}{k}\rangle=\delta(p-k)-\frac{t_{pk}}{(p^2-k^2)/2m+i\eta}. \tag{8}$$

In order to determine the S-matrix from the single particle GREEN's function it is necessary to supplement (5) by

$$\frac{i\eta}{k^2/2m-H+i\eta}\psi_k|0\rangle\Rightarrow 0 \tag{9}$$

saying that asymptotically no holes are present.

3. The One Particle Green's Function

The one particle GREEN's function is defined in the usual way

$$G_{\mu\nu}(\omega)=\langle 0|\psi_\mu\frac{1}{\omega-H+i\eta}\psi_\nu^*+\psi_\nu^*\frac{1}{\omega+H-i\eta}\psi_\mu|0\rangle. \tag{10}$$

Combining this with (5) and (9) one learns how to read off the S-matrix from G namely

$$i\eta\, G_{\mu k}(k^2/2m)\Rightarrow\langle 0|\psi_\mu|\overset{+}{k}\rangle. \tag{11}$$

The selfenergy matrix $M(\omega)$ is related to G by DYSON's equation

$$\omega G_{\mu\lambda}(\omega)-\sum_{\nu}\left(T+M(\omega)\right)_{\mu\nu}G_{\nu\lambda}(\omega)=\delta_{\mu\lambda}. \tag{12}$$

(11) and (12) lead to a generalized wave equation[5] for $\langle 0|\psi_\nu|k'\rangle$

$$\sum_{\nu}\left(T+M(k'^2/2m)\right)_{k\nu}\langle 0|\psi_\nu|\overset{+}{k'}\rangle=\frac{k'^2}{2m}\langle 0|\psi_k|\overset{+}{k'}\rangle. \tag{13}$$

We are not going to use this equation but rather utilize (11) and (8) directly.

If one splits M into a nonresonating part M^0 for small ω and a singular part M^s and neglects M^s in lowest order one obtaines for G the expression

$$G_{\mu\nu}(\omega)=\frac{z_\mu\,\delta_{\mu\nu}}{\omega-\varepsilon_\mu\pm i\eta}=z_\mu\,g_\mu(\omega)\,\delta_{\mu\nu} \tag{14}$$

with the renormalization constant

$$z_\mu=\left(1-\left[\partial M^0_{\mu\mu}(\omega)/\partial\omega\right]_{\omega=\varepsilon_\mu}\right)^{-1}. \tag{15}$$

(12) then can be written as

$$(\omega-\varepsilon_\mu)\frac{G_{\mu\lambda}}{\sqrt{z_\mu z_\lambda}}-\sum\sqrt{z_\mu z_\nu}\,M^s_{\mu\nu}\frac{G_{\nu\lambda}}{\sqrt{z_\nu z_\lambda}}=\delta_{\mu\lambda}. \tag{16}$$

Let us now anticipate a result from the next section, namely that in the vicinity of a pole z M^s has the form

$$\hat{M}^s_{\mu\nu}(\omega)=\sqrt{z_\mu z_\nu}\,M^s_{\mu\nu}(\omega)=\frac{1}{2}\,\frac{f_{\mu,r}f^*_{\nu,r}}{\omega-\varepsilon_r+i\eta}+\cdots. \tag{17}$$

If this pole is sufficiently well separated from the rest one way write (12) as

$$(\omega-\varepsilon_\mu)\,\hat{G}_{\mu\lambda}-\frac{1}{2}\,\frac{f_{\mu,r}\sum f^*_{\nu,r}\,\hat{G}_{\nu\lambda}}{\omega-\varepsilon_r+i\eta}=\delta_{\mu\lambda} \tag{18}$$

with

$$\hat{G}_{\mu\lambda}=(z_\mu z_\lambda)^{-\frac{1}{2}}\,G_{\mu\lambda}.$$

This equation can be solved exactly. Introducing

$$\Delta_r(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{\mu}\frac{|f_{\mu,r}|^2}{\omega-\varepsilon_\mu} \tag{19}$$

and

$$\gamma_r(\omega)=\frac{1}{2}\,\pi\sum_{\mu}|f_{\mu,r}|^2\,\delta(\omega-\varepsilon_\mu) \tag{20}$$

[5] BELL, J. S., and E. J. SQUIRES: Phys. Rev. Letters 3, 96 (1959).

the solution is given by

$$(\omega-\varepsilon_\mu)\,\hat{G}_{\mu\lambda}-\frac{1}{2}\,\frac{f_{\mu,r}\,f^*_{\nu,r}}{\omega-\varepsilon_r-\Delta_r+i\gamma_r}\cdot\frac{1}{\omega-\varepsilon_\lambda+i\eta}=\delta_{\mu\lambda}. \tag{21}$$

Employing (11) one finds

$$\frac{\langle 0|\psi_p|\overset{+}{k}\rangle}{\sqrt{z_p\,z_k}}=\delta(p-k)-\frac{1}{2}\,\frac{f_{p,r}\,f^*_{k,r}/(k^2/2m-\varepsilon_r-\Delta_r(k^2/2m)+i\gamma_r)}{(p^2-k^2)/2m+i\eta}. \tag{22}$$

Comparing this result with (8) one has $z_k=1$ and

$$t_{pk}=\frac{1}{2}\,\frac{f_{p,r}\,f^*_{k,r}}{k^2/2m-\varepsilon_r-\Delta_r(k^2/2m)+i\gamma_r(k^2/2m)}. \tag{23}$$

This is the well known single level Breit-Wigner formula. It allows one to calculate the cross sections directly in terms of level shift Δ and width γ. Both are easily obtained from $z\,M^s$ using (19) and (20).

We conclude this section with a remark concerning the renormalization constants: As one can see they are either equal to one (in the continuum) because of the asymptotic condition or (in the discrete part of the spectrum) they can be completely absorbed in the effective force according to (17). This point will be made more explicite in the next section.

There are additional renormalization effects left in (23). If one defines the resonance energy E_r by

$$E_r=\varepsilon_r+\Delta_r(E_r) \tag{24}$$

one may expand (23) in the vicinity if this pole and write

$$t_{pk}=\frac{1}{2}\,\frac{z_r\,f_{p,r}\,f^*_{k,r}}{k^2/2m-E_r+i\,z_r\,\gamma_r(E_r)} \tag{25}$$

with the renormalization constant

$$z_r=\left(1-[\partial\Delta_r(\omega)/\partial\omega]_{\omega=E_r}\right)^{-1}. \tag{26}$$

This constant however can be calculated from (19) which in turn can be determined from the effective two particle interaction. Thus there are no unknown renormalization constants left in the cross sections[6].

In general there are several adjacent poles in $\hat{M}^s$. The r.h.s. of (17) then becomes a sum of pole terms. The denominator of (23) then becomes a matrix and the Eq. (24) for the resonance energy becomes an eigenvalue problem. Under some simplifying assumptions this problem can be solved[2].

[6] WERNER, E.: Z. Physik **198**, 242 (1967).

We now turn to the problem of determining $\hat{M}^s$ from the vertex part and thereby from the effective forces.

4. The Vertex Function

The vertex part $\tau(Q)$ of an operator Q may be defined by the equation

$$\langle 0|\, T\psi_x \psi^*_{x'} Q(\tau)\,|0\rangle - \langle 0|\, T\psi_x \psi^*_{x'}\,|0\rangle \langle 0|\, Q\,|0\rangle = \int G_{xy}\, \tau_{yy'}(Q)\, G_{y'x'}\, d^4y\, d^4y'. \tag{27}$$

Here $(x, x', \ldots)$ stands for $(r\,t,\ r'\ t',\ \ldots)$ and T is the time ordering operator.

Because of energy conservation the Fourier transform of the vertex part depends only on two frequencies $\tau = \tau(\varepsilon, \omega; Q)$ which are conveniently chosen according to the diagram.

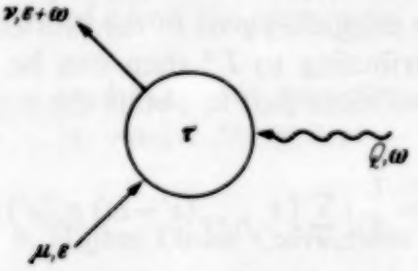


Fig. 1. Choice of variables for vertex part

The renormalized Bethe Salpeter equation[4] then may be written in the form

$$\hat{\tau}_{\mu\nu} = \hat{\tau}^{\omega}_{\mu\nu} - i \sum_{\rho,\sigma} \int f_{\mu\sigma,\nu\rho}\, g_\rho(\varepsilon')\, g_\sigma(\varepsilon'+\omega)\, \hat{\tau}_{\rho\sigma} \frac{d\varepsilon'}{2\pi} \tag{28}$$

where $f_{\mu\sigma,\nu\rho}$ are the matrix elements of the effective interaction and

$$\hat{\tau}_{\mu\nu} = \sqrt{z_\mu\, z_\nu}\, \tau_{\mu\nu}(\varepsilon, \omega; Q). \tag{29}$$

For the sake of completeness we mention, that the low energy resonating part of the Q-response

$$R(\omega, Q) = \langle 0|\, Q \frac{1}{\omega - H + i\eta} Q\,|0\rangle + (\omega \leftrightarrow -\omega) \tag{30}$$

as well as the change of the expectation value of Q under the addition of a particle in the state μ can be expressed in terms of $\hat{\tau}$. One finds[4] (n_μ the ground state occupation numbers)

$$R^s(\omega, Q) = \sum \hat{\tau}^{\omega}_{\nu\mu} \frac{n_\mu - n_\nu}{\omega - (\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu) + i\eta} \hat{\tau}_{\mu\nu} \tag{31}$$

for the resonant part of the response and

$$\delta^{(\mu)}\langle Q\rangle = \hat{\tau}_{\mu\mu}(\varepsilon_\mu, 0; Q) \tag{32}$$

for the change in $\langle Q\rangle$.

In order to express the doorway contribution $\hat{M}^s$ of the selfenergy in terms of the Landau-Migdal parameters $f_{\kappa\lambda,\mu\nu}$ one first considers the imaginary part $\hat{\Gamma}^s$ of $\hat{M}^s$. This is determined by summing up the contributions from all "three line cuts" to Γ[7]. The result expresses $\hat{\Gamma}^s$ in terms of the quasi particle "scattering cross section" $|t|^2$ [8]. The t-matrix determining this cross section obeys the Bethe-Salpeter equation

$$t_{\kappa\nu,\lambda\mu} = f_{\kappa\nu,\lambda\mu} - i\sum\int f_{\kappa\sigma,\lambda\rho}\, g_\rho(\varepsilon')\, g_\sigma(\varepsilon'+\omega)\, t_{\rho\nu,\sigma\mu}\frac{d\varepsilon'}{2\pi}. \tag{33}$$

By means of the optical theorem one may express the integrated cross section in terms of the imaginary part of the "forward scattering matrix". Each δ-function contributing to Γ^s then can be supplemented by the corresponding principal value part to obtain the total $\hat{M}^s$. The final result can be written as

$$\hat{M}^s_{\mu\nu} = \frac{1}{2} i \sum_\rho \int t_{\mu\rho,\rho\nu}(\varepsilon'-\omega)\, g_\rho(\varepsilon')\frac{d\varepsilon'}{2\pi}. \tag{34}$$

This result apart from renormalization looks just like R.P.A. In order to obtain a spectral representation of $\hat{M}^s$ one can make use of the spectral representation of the particle-hole GREEN's function R [9]

$$R_{\kappa\nu,\lambda\mu}(\omega) = -\sum_m \frac{X_{\kappa\lambda,m}\, X^*_{\mu\nu,m}\, N_m}{\omega-\omega_m+i\eta\, N_m} \tag{35}$$

where the sum runs over all positive and negative frequencies which are eigenvalues of the homogeneous B.S.eq., $N_m = \mathrm{sign}(\omega_m)$ and $X_{\kappa\lambda,m}$ are the eigenvectors of the homogeneous B.S. eq.normalized according to

$$\sum_m X_{\kappa\lambda,m}\, N_m\, X^*_{\mu\nu,m} = \delta_{\kappa\lambda,\mu\nu}(n_\kappa - n_\lambda) \tag{36}$$

and

$$\sum_{\kappa,\lambda} X_{\kappa\lambda,m}(n_\kappa - n_\lambda)\, X^*_{\kappa\lambda,n} = \delta_{m,n}\, N_m. \tag{37}$$

t can be expressed in terms of R as

$$t_{\kappa\nu,\lambda\mu}(\omega) = f_{\kappa\nu,\lambda\mu} - \sum f_{\kappa\beta,\lambda\alpha}\, R_{\alpha\sigma,\beta\rho}(\omega)\, f_{\rho\nu,\sigma\mu} \tag{38}$$

---

[7] ELIASHBERG, G. M.: JETP **41**, 1241 (1961), (Sov. Phys. **14**, 633 (1961)).
[8] LANDAU, L. D.: JETP **35**, 97 (1959), (Sov. Phys. **8**, 70 (1959)).
[9] THOULESS, D. J.: Nuclear Phys. **22**, 78 (1961).

using (35), (38) and

$$g_\rho(\varepsilon')=\frac{1-n_\rho}{\varepsilon'-\varepsilon_\rho+i\eta}+\frac{n_\rho}{\varepsilon'-\varepsilon_\rho-i\eta} \tag{39}$$

the ε'-integral in (34) can be carried out yielding

$$\hat{M}^s_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\sum_{\substack{m>0\\ \rho}} f_{\mu,\rho m} f^*_{\nu,\rho m}\left\{\frac{1-n_\rho}{\omega-\varepsilon_\rho-\omega_m+i\eta}+\frac{n_\rho}{\omega-\varepsilon_\rho+\omega_m-i\eta}\right\} \tag{40}$$

with

$$f_{\mu,\rho m}=\sum_{\kappa,\lambda} f_{\mu\lambda,\rho\kappa} X_{\kappa\lambda,m}. \tag{41}$$

This however is just the form we anticipated in (17). One only has to identify (ρ, m) with the label r and the poles with

$$\varepsilon_r=\begin{cases}\varepsilon_\rho+\omega_m & \text{for particles}\\ \varepsilon_\rho-\omega_m & \text{for holes.}\end{cases} \tag{42}$$

5. Higher Order Corrections

Higher order corrections to the scheme described above arise from two sources *i*) the coupling of the Fermion to the collective Boson, ii) the coupling of the three quasi particle "doorway state" to more complicated "hallway states".

The Fermion-Boson coupling so far occurs only via the Dyson equation (12). There is, however, additional coupling influencing the self-energy directly. If one writes (40) diagrammatically as

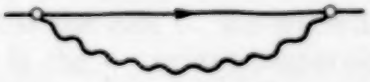


Fig. 2. Selfenergy in one Boson exchange approximation

where $\rightarrow\!-$ denotes a g-line (to be distinguished from the total G which includes the effect of M^s) and $\sim\!\sim$ the R-line, the next order terms would be given by

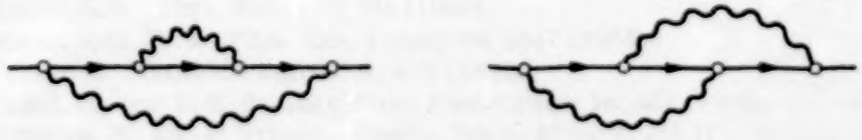


Fig. 3. Selfenergy corrections and vertex corrections to one Boson exchange

These corrections have been estimated in [2]. If one wants to sum up all Fermion-Boson coupling corrections one would have to solve an additional B.S. eq. of the form

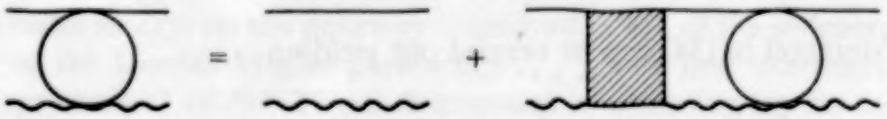


Fig. 4. Bethe-Salpeter-equation for Boson-Fermion coupling

Such equations can become quite complicated in realistic cases.

The doorway-hallway coupling will in most cases lead to a further splitting of the intermediate structure. The width γ_r of the doorway state then will be shared among the hallway states λ coupled to r according to the sum rule [10]

$$\gamma_r = \sum_\lambda \gamma_{r,\lambda}. \tag{43}$$

In special cases one may have additional coherence effects. For instance if a two-particle-two-hole surface Boson is pushed far down in energy.

I am indebted to W. GÖTZE, D. GROSS, H. J. MANG, H. WAGNER and W. WILD for interesting discussions.

[10] FERRELL, R. A., and W. M. MAC DONALD: Phys. Rev. Letters **16**, 187 (1966). — MAC DONALD, W. M., and A. MEKJIAN: Technical Report 653, January 1967, University of Maryland. — BRENIG, W.: Nuclear Phys. **13**, 333 (1959).

Zeitschrift für Physik 202, 349–363 (1967)

The Adler-Weisberger Sum Rule

V. F. MÜLLER
Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg
und Kernforschungszentrum Karlsruhe

J. ROTHLEITNER
Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg

Received January 3, 1967

Starting from a weak form of the axial current algebra and using FUBINI's covariant dispersion method we give a fairly rigorous derivation of the Adler-Weisberger sum rule. Special attention is given to the necessary continuation in the "pion mass". Combining the sum rule with the forward $\pi^{\pm}p$ dispersion relation we obtain a sum rule containing essentially low energy data. A numerical evaluation is given for two sets of existing s-wave πN scattering lengths. The one reproduces ADLER's and WEISBERGER's results, the other improves the agreement with experiment giving $r_A = 1.20$.

I. Introduction

GELL-MANN's[1] proposal that the 18 vector and axial vector currents of the weak interaction should form a closed algebra has stimulated great interest in this field of "current algebra". The really new dynamical hypothesis contained in this proposal is that the commutator of an axial vector with an axial vector should be the vector. From this commutation relation ADLER[2] and WEISBERGER[3] derived a sum rule for the $\pi^{\pm}p$ cross sections relating them to the ratio of the Gamow-Teller to the Fermi coupling constant. In the meantime many papers appeared dealing with applications. On the other hand in a few papers the basic assumptions and the derivation of the sum rules have been critically investigated[4–7].

Nevertheless no satisfactory derivation of the Adler-Weisberger sum rule has been given. It is the aim of the present paper to achieve this.

Our starting point is the covariant dispersion theoretic method of FUBINI[4] which avoids the difficulties connected with non conserved "charges"[5]. But its full significance this method gains only recognizing the fact that the currents are interpolating fields of the corresponding mesons. This fact implies that there is no need for a PCAC hypothesis. Moreover such a hypothesis would even be of no use in this context.

[1] GELL-MANN, M.: Phys. Rev. **125**, 1067 (1962).
[2] ADLER, S. L.: Phys. Rev. **140**, 736 (1965).
[3] WEISBERGER, W. I.: Phys. Rev. Letters **14**, 1047 (1965).
[4] FUBINI, S.: Nuovo cimento **43A**, 475 (1966).
[5] FABRI, E., and L. E. PICASSO: Phys. Rev. Letters **16**, 408 (1966).
[6] SCHROER, B., and P. STICHEL: Comm. Math. Phys. **3**, 258 (1966).
[7] DIETZ, K.: Phys. Rev. **152**, 1306 (1966).

For deriving the sum rule essentially 2 assumptions are necessary:

1) The current commutation relation in the form given in Eq. (15).

2) Certain functions fulfil unsubtracted dispersion relations. We shall give arguments in favour of this assumption using a Regge picture.

An essential step in the derivation is the continuation in the "pion mass". A careful discussion of this point is given in chapter III.

In the final part of the paper a numerical evaluation of the sum rule is performed by combining it with the forward $\pi^{\pm} p$ dispersion relation. This combination provides a sum rule which does not require high energy data for the $\pi^{\pm} p$ cross section. Such a type of sum rule may be useful in similar cases as a relation for the low energy behaviour of scattering processes. The high energy data are represented by the s-wave scattering lengths. For the $\pi - N$ case two different sets of scattering lengths exist, one given by HAMILTON[8], the other by HÖHLER[9]. Using HAMILTON's numbers we reproduce the results of ADLER and WEISBERGER whereas HÖHLER's numbers improve the agreement with experiment.

II. Derivation of the Sum Rule

In order to avoid purely kinematical complications due to spin, we consider at first an Adler-Weisberger type sum rule for πK scattering. We follow the covariant dispersion theoretic method of FUBINI[4] which reveals in a transparent manner the necessary continuation in the "pion mass". Furthermore this method does not use "axial charges" and thus avoids the difficulties connected with space-integrated time components of non-conserved currents[5, 6].

We start our derivation considering the Fourier transform of a retarded commutator of two axial vector currents belonging to an isospin triplet. This commutator is sandwiched between one-K-meson states of momentum p and $I_3 = i$ resp. $I_3 = i'$

$$T_{\mu\nu}(s, q^2) := i \int d^4x \, e^{iqx} \theta(x_0) \langle p, i' | [a_\mu^k(x), a_\nu^l(0)] | p, i \rangle . \qquad (1)$$

In the appendix we shall argue that such an expression always can be considered to be covariant.

This Fourier transform is a function of the two invariants q^2 and $s = (p+q)^2$. With M we denote the kaon mass, hence $p^2 = M^2$. The tensor $T_{\mu\nu}$ defined in (1) has the isospin decomposition

$$T_{\mu\nu}(s, q^2) = \delta_{kl} \delta_{i'i} T_{\mu\nu}^{(+)}(s, q^2) + \tfrac{1}{2} [\tau_k, \tau_l]_{i'i} T_{\mu\nu}^{(-)}(s, q^2) . \qquad (2)$$

---

[8] HAMILTON, J., and W. S. WOOLCOCK: Revs. Mod. Phys. **35**, 737 (1963).

[9] HÖHLER, G., J. BAACKE, and R. STRAUSS: Phys. Letters **21**, 233 (1966).

Requiring time-reversal covariance the tensors $T_{\mu\nu}^{(\pm)}$ can be decomposed as follows:

$$T_{\mu\nu}^{(\pm)}(s,q^2)=p_\mu p_\nu B_1^{(\pm)}(s,q^2)+q_\mu q_\nu B_2^{(\pm)}(s,q^2)+ \\ +g_{\mu\nu}B_3^{(\pm)}(s,q^2)+(p_\mu q_\nu+p_\nu q_\mu)B_4^{(\pm)}(s,q^2). \tag{3}$$

In addition to the tensor $T_{\mu\nu}$ defined in (1) we consider its absorptive part

$$t_{\mu\nu}(s,q^2)=\tfrac{1}{2}\int d^4x\, e^{iqx}\langle p,i'|\,[a_\mu^k(x),a_\nu^l(0)]\,|p,i\rangle. \tag{4}$$

Evidently its decomposition is completely analogous to that of $T_{\mu\nu}$:

$$t_{\mu\nu}^{(\pm)}(s,q^2)=p_\mu p_\nu b_1^{(\pm)}(s,q^2)+q_\mu q_\nu b_2^{(\pm)}(s,q^2)+ \\ +g_{\mu\nu}b_3^{(\pm)}(s,q^2)+(p_\mu q_\nu+p_\nu q_\mu)b_4^{(\pm)}(s,q^2) \tag{5}$$

with

$$b_k^{(\pm)}(s,q^2)=\operatorname{Im}B_k^{(\pm)}(s,q^2)\quad\text{for}\quad k=1,2,3,4. \tag{6}$$

These imaginary parts have the following crossing properties:

$$\begin{aligned} b_k^{(\pm)}(u,q^2)&=\mp b_k^{(\pm)}(s,q^2), \qquad k=1,2,3\\ b_4^{(\pm)}(u,q^2)&=\pm b_4^{(\pm)}(s,q^2)\end{aligned} \tag{7}$$

where $u=2M^2+2q^2-s$.

Furthermore we define

$$D^k(x):=\frac{\partial}{\partial x_\mu}a_\mu^k(x) \tag{8}$$

and consider the Fourier transform

$$T_\nu(s,q^2):=i\int d^4x\, e^{iqx}\theta(x_0)\langle p,i'|\,[D^k(x),a_\nu^l(0)]\,|p,i\rangle \tag{9}$$

as well as its absorptive part.

$$t_\nu(s,q^2)=\tfrac{1}{2}\int d^4x\, e^{iqx}\langle p,i'|\,[D^k(x),a_\nu^l(0)]\,|p,i\rangle. \tag{10}$$

Both (9) and (10) have the same isospin properties as the tensor $T_{\mu\nu}$ in Eq. (2) and the covariant decomposition of their $(\pm)$-isospin parts can be chosen as

$$T_\nu^{(\pm)}(s,q^2)=i\,p_\nu C_1^{(\pm)}(s,q^2)+i\,q_\nu C_2^{(\pm)}(s,q^2) \tag{11}$$

and

$$t_\nu^{(\pm)}(s,q^2)=i\,p_\nu c_1^{(\pm)}(s,q^2)+i\,q_\nu c_2^{(\pm)}(s,q^2) \tag{12}$$

respectively, with

$$c_k^{(\pm)}(s,q^2)=\operatorname{Im}C_k^{(\pm)}(s,q^2),\qquad k=1,2.$$

As can be seen from (1) and (9), $T_{\mu\nu}$ and T_ν are related by

$$-iq^\mu T_{\mu\nu}=T_\nu+i\int d^4x\, e^{iqx}\delta(x_0)\langle p,i'|\,[a_0^k(x),a_\nu^l(0)]\,|p,i\rangle \tag{13}$$

and the corresponding absorptive parts by

$$-i q^\mu t_{\mu\nu} = t_\nu . \tag{14}$$

Eqs. (13) and (14) follow from the fact that $T_{\mu\nu}$ and T_ν as well as $t_{\mu\nu}$ and t_ν are Fourier transforms of R^4-distributions. In general these distributions are not defined for fixed q^2; for example at $q^2 = m^2$ they do not exist, because the spin-0 part of $a_\mu^k(x)$ is an interpolating pion field. After multiplying with $(q^2 - m_\pi^2)^2$ they do however exist in the whole interval $0 \leqq q^2 \leqq m_\pi^2$.

Eq. (13) implies the existence of the equal-time commutator. There is indication that this is true only for the isospin $(-)$ part to which we restrict our interest in the following. There are two more reasons for doing this. The first one is connected with Schwinger terms and the second one with the high energy behaviour of the invariant functions $B_k^{(-)}$ and $C_k^{(-)}$. It may turn out that there is an intimate connection between them. The type of Schwinger terms appearing when one studies the vacuum expectation values of equal-time commutators is symmetric in the isospin indices. Therefore it does not appear in the isospin $(-)$ part which is anti-symmetric. It is sufficient for our purpose to postulate the following equal-time commutation relations for two axial vector currents:

$$\delta(x_0)\, \tfrac{1}{2} \{[a_0^k(x), a_\nu^l(0)] - [a_0^l(x), a_\nu^k(0)]\} = i\, \delta^4(x)\, \varepsilon^{klm}\, j_\nu^m(0) \tag{15}$$

where j_ν^m is the isospin current.

With this relation the isospin $(-)$ parts of Eqs. (13) and (14) become

$$-i q^\mu T_{\mu\nu}^{(-)} = T_\nu^{(-)} + i \frac{1}{(2\pi)^3} p_\nu ,$$

$$-i q^\mu t_{\mu\nu}^{(-)} = t_\nu^{(-)} .$$

Comparing the coefficients of p_ν we obtain

$$\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2}(s - M^2 - q^2) B_1^{(-)}(s, q^2) - q^2 B_4^{(-)}(s, q^2) = C_1^{(-)}(s, q^2) + \frac{1}{(2\pi)^3} \\ &-\tfrac{1}{2}(s - M^2 - q^2) b_1^{(-)}(s, q^2) - q^2 b_4^{(-)}(s, q^2) = c_1^{(-)}(s, q^2) . \end{aligned} \tag{16}$$

Due to the fact that only zero momentum transfer is considered in (1) and (9) dispersion relations in s for fixed q^2 in the range $0 \leqq q^2 < m_\pi^2$ can be rigorously proven. The final step consists in assuming unsubtracted dispersion relations in the variable s for the invariant functions $B_1^{(-)}$, $B_4^{(-)}$ and $C_1^{(-)}$ for fixed q^2. Clearly we can not prove this and can only give a plausibility argument. Suppose the tensor $T_{\mu\nu}$ contracted with polarization vectors $\varepsilon^\nu(q)$ and $\varepsilon'^\mu(q)$ for fixed $q^2 \geqq 0$ would be a scattering amplitude. The isospin $(-)$ part in the decomposition (2) is equal to the

isospin-1-exchange in the t-channel. In a simple Regge-picture for high-energy scattering therefore the $(-)$ part of the tensor would be determined by the ρ-trajectory.

$$\varepsilon'^{\mu} T^{(-)}_{\mu\nu} \varepsilon^{\nu} \sim s^{\alpha_\rho(0)}.$$

In the same way

$$\varepsilon'^{\mu} T^{(-)}_{\mu\nu} q^{\nu} \sim s^{\alpha_\rho(0)},$$

$$\varepsilon'^{\nu} T^{(-)}_{\nu} \sim s^{\alpha_\rho(0)},$$

As $\varepsilon^{\mu}(q) p_{\mu} \sim s$ for large s we would argue that $B_1^{(-)} \sim s^{\alpha_\rho(0)-2}$; $B_4^{(-)} \sim s^{\alpha_\rho(0)-1}$ and $C_1^{(-)} \sim s^{\alpha_\rho(0)-1}$.

Since $\alpha_\rho(0) < 1$, the three functions vanish sufficiently strong to obey unsubtracted dispersion relations. But as already stated this is only a suggestive argument. If the functions $B_1^{(-)}$, $B_4^{(-)}$ and $C_1^{(-)}$ obey unsubtracted dispersion relations in s for fixed q^2, then from (16) follows immediately the sum rule

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, b_1^{(-)}(s, q^2) = \frac{2}{(2\pi)^3}.$$

Together with the crossing property (7) of $b_1^{(-)}$ we finally obtain

$$\frac{1}{\pi} \int_{(M+m)^2}^{\infty} ds\, b_1^{(-)}(s, q^2) = \frac{1}{(2\pi)^3}. \tag{17}$$

Note that in the kaon-case considered here no one-particle intermediate state contributes to $b_1^{(-)}$.

III. Evaluation of the Sum Rule

Let us define the following Fourier transform

$$t(s, q^2) := \tfrac{1}{2} \int d^4x\, e^{iqx} (\Box + m^2)^2 \langle p, i' | [D^k(x), D^l(0)] | p, i \rangle \tag{18}$$

where m is the pion mass. Using the completeness relation in the commutator, one sees that t is related to the tensor $t_{\mu\nu}$ defined in (4) by

$$t(s, q^2) = (q^2 - m^2)^2 q^{\mu} t_{\mu\nu} q^{\nu}. \tag{19}$$

Now we know from π-decay that $\langle 0 | D^k(x) | \pi \rangle \neq 0$. Therefore, according to HAAG[10], $D^k(x)$ is an interpolating pion field. This leads to the relation

$$t(s, m^2) = m^4 f^2 A_{\pi K}(s) \tag{20}$$

[10] HAAG, R.: Phys. Rev. **112**, 669 (1958).

where $A_{\pi K}(s)$ is the absorptive part of the πK forward scattering amplitude. The constant f^2 is related to the pion lifetime by the equation

$$\frac{1}{m\,\tau_{\pi\to\mu+\nu_\mu}}=\frac{1}{4\pi}\,G^2 f^2 m_\mu^2\left(1-\frac{m_\mu^2}{m^2}\right)^2 \text{*}. \tag{21}$$

Via the optical theorem $A_{\pi K}(s)$ can be expressed in terms of total cross-sections. For the isospin $(-)$ part we obtain

$$t^{(-)}(s,m^2)=\frac{K(s,M^2,m^2)\sqrt{s}}{(2\pi)^3}\{\sigma_{\pi^- K^+}(s)-\sigma_{\pi^+ K^+}(s)\}\,m^4 f^2 \tag{22}$$

with the kinematical function K defined by

$$4s\,K^2(s,M^2,m^2)=s^2-2s(M^2+m^2)+(M^2-m^2)^2. \tag{23}$$

For convenience we define a pion current I^k by

$$I^k(x):=\frac{1}{m^2 f}(\Box+m^2)\,D^k(x). \tag{24}$$

Inserting this into Eq. (18) gives

$$t(s,q^2)=m^4 f^2\,\tfrac{1}{2}\int d^4x\,e^{iqx}\langle p,i'|\,[I^k(x),I^l(0)]\,|p,i\rangle. \tag{25}$$

On the other hand via Eq. (19) t can be written as a linear combination of the invariant functions belonging to the tensor $t_{\mu\nu}$. We again consider only the isospin $(-)$ part.

$$\begin{aligned}t^{(-)}(s,q^2)=(q^2-m^2)^2\{&\tfrac{1}{4}(s-M^2-q^2)^2\,b_1^{(-)}(s,q^2)+(q^2)^2\,b_2^{(-)}(s,q^2)+\\&+q^2\,b_3^{(-)}(s,q^2)+(s-M^2-q^2)\,q^2\,b_4^{(-)}(s,q^2)\}.\end{aligned} \tag{26}$$

From the 4 invariant functions only $b_2^{(-)}$ has a double pole at $q^2=m^2$. Its corresponding tensor $q_\mu\,q_\nu$ in the covariant decomposition (5) vanishes when contracted with a polarization vector $\varepsilon^\mu(q)$ whereas the other ones survive. A double pole in $b_1^{(-)}$, $b_3^{(-)}$ or $b_4^{(-)}$ at $q^2=m^2$ would be due to an axialvector particle degenerate in mass with the pion which has not been observed. Together with (20) from (26) follows

$$\lim_{q^2\to m^2}(q^2-m^2)^2\,b_2^{(-)}(s,q^2)=f^2\,A_{\pi K}^{(-)}(s). \tag{27}$$

As the function $b_1^{(-)}$ alone enters the sum rule (17) whereas the function $b_2^{(-)}$ only is connected with the physical πK scattering amplitude there has been argued [7] that this situation would make it difficult to understand the Adler-Weisberger relation. However, in spite of the fact that

* The constant G is the universal Fermi coupling constant,

$$(G\,M_p^2)^2=1.006\times10^{-10}.$$

$b_1^{(-)}$ and $b_2^{(-)}$ are formally independent functions there exists a connection between them. From Eq. (26) we see that at the points $q^2=0$ and $q^2=m^2$ on the right hand side only one invariant function appears.

$$\begin{aligned} t^{(-)}(s,0) &= m^4 \tfrac{1}{4}(s-M^2)^2 b_1^{(-)}(s,0) \\ t^{(-)}(s,m^2) &= \lim_{q^2\to m^2} (q^2-m^2)^2 m^4 b_2^{(-)}(s,q^2). \end{aligned} \tag{28}$$

On the other hand, using the completeness relation in the commutator of (25) the following representation for $t^{(-)}$ is obtained for $s \geqq (M+m)^2$ and $q^2 \leqq m^2$:

$$t^{(-)}(s,q^2) = m^4 f^2 \frac{(2\pi)^4}{2} \{\sum_n \delta(p+q-p_n) \langle p,i' \mid I^k \mid n\rangle \langle n \mid I^l \mid p\, i\rangle\}^{(-)}. \tag{29}$$

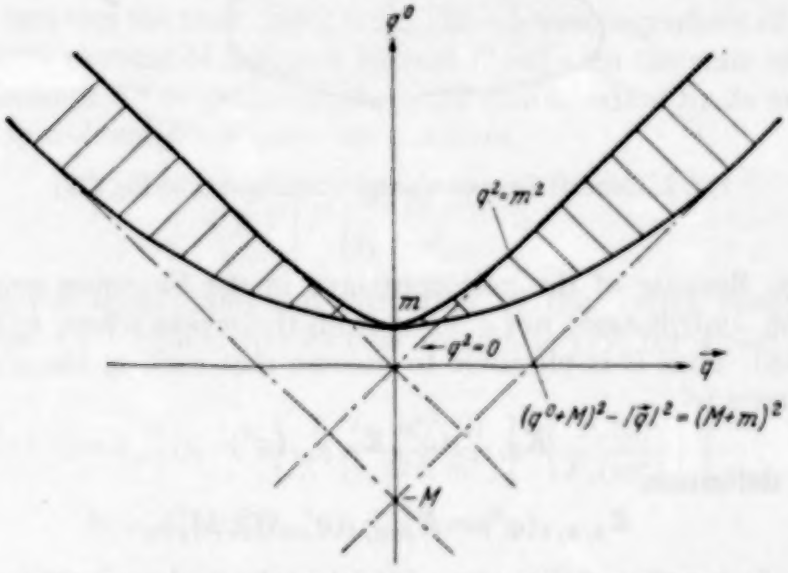


Fig. 1. The region of vectors q where the right hand side of Eq. (29) is nonvanishing, in the system $\vec{p}=0$

All q^2-dependence is induced by the vector q in the δ-distribution. We do not consider a fictitious world with zero mass pions. The spectrum entering into (29) through the completeness relation is the physical one. Therefore $q=0$ is never allowed. This is illustrated in Fig. 1 which shows the region allowed for q. We have already seen that for $q^2=m^2$ the right hand side of Eq. (29) is proportional to the absorptive part of πK forward scattering.

If now $q^2 \neq m^2$, the matrix elements in (29) are no longer physical ones because of the δ-distribution containing the vector q. In order to study the q^2-dependence of the function $t^{(-)}(s,q^2)$ we consider all

Feynman-graphs contributing to it. This is done for a Yukawa-type interaction.

We see that all such graphs contain the product

$$\boldsymbol{K}_{B_1 B_2 I}(q^2, k_1^2, k_2^2)\, \boldsymbol{K}_{B_3 B_4 I}(q^2, k_3^2, k_4^2)$$

of two baryon-baryon-meson vertex functions* integrated over k_1, k_2, k_3 and k_4. From these integrals we extract the mean values of the vertex

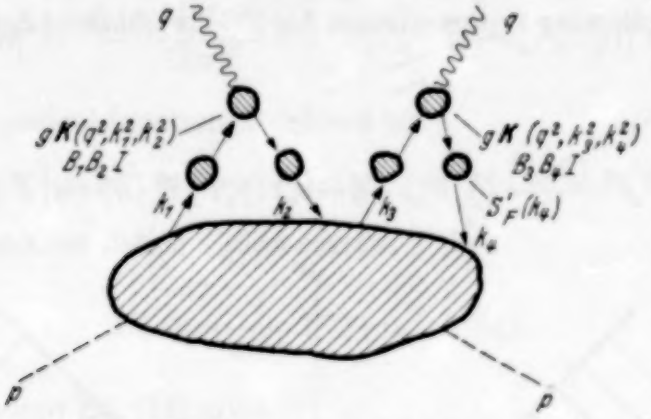


Fig. 2. General Feynman-graph contributing to Eq. (29)

functions. Because of the pole contained in the Feynman propagators $S_F'(k_i)$ the contributions not coming from the region where $k_i^2 \approx M_i^2$ are suppressed. Thus it is plausible to assume that each of these graphs is proportional to

$$\boldsymbol{K}_{B_1 B_2 I}(q^2)\, \boldsymbol{K}_{B_3 B_4 I}(q^2)$$

with the definition

$$\boldsymbol{K}_{B_i B_j I}(q^2) := \boldsymbol{K}_{B_i B_j I}(q^2, M_i^2, M_j^2).$$

The formfactor $\boldsymbol{K}_{NNI}(q^2)$ is normalized to 1 at $q^2 = m^2$. These various formfactors are asumed to be correlated, for example via $SU(3)$ with a q^2-independent F/D-ratio, and thus are all proportional to $\boldsymbol{K}_{NNI}(q^2)$. Neglecting for the moment the change coming from the altered momentum balance at the corners we obtain

$$t^{(-)}(s, q^2) = \boldsymbol{K}_{NNI}^2(q^2)\, t^{(-)}(s, m^2).$$

---

* We emphasize that these vertex functions are 3-point functions involving the meson current I defined in Eq. (24) besides two baryon fields. Particularly on the mass shell of the two baryons

$$\boldsymbol{K}_{B_1 B_2 I}(q^2, M_1^2, M_2^2)$$

is defined by

$$\langle N' | I | N \rangle = \frac{g}{(2\pi)^3}\, \bar{u}\, i\gamma_5 \tau\, u\, \boldsymbol{K}_{NNI}(q^2, M^2, M^2).$$

This implies together with (22) and (28) the connection between $b_1^{(-)}$ and the πK cross sections

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{4}(s-M^2)^2\, b_1^{(-)}(s,0) \\ &= \mathbf{K}^2_{N\,N\,I}(0)\, f^2\, \frac{K(s,M^2,m^2)\sqrt{s}}{(2\pi)^3}\,\{\sigma_{\pi^-K^+}(s)-\sigma_{\pi^+K^+}(s)\}\,\rho(s) \end{aligned} \tag{30}$$

with $\rho(s)=1$. We here already introduce a factor $\rho(s)$ which will be needed later.

We are now going to discuss the change due to the altered momentum balance which remains after extracting the formfactors. As a small continuation in an external mass should be unimportant at high energies for this part, we confine our discussion to the low energy region.

It is a characteristic feature of low energy hadron collisions that these are dominated by resonances. Thus one can get an estimate for the continuation treating the resonances only. The relevant ingredient of Eq. (29) is the matrix element of the pion current I^k between the state of a kaon and a resonance K^* respectively, the latter characterized by its mass M_*, width Γ, spin J and other quantum numbers.

$$\left\langle p, i' \middle| I^k \middle| \begin{matrix} M_*, \Gamma, J \ldots \\ p_n \quad J_3 \end{matrix} \right\rangle. \tag{31}$$

Assuming the usual analytical properties of this vertex function one easily obtains the result, that its contribution to (29) for $q^2=0$ is of the form.

$$\begin{aligned} t^{(-)}_{(K^*)}(s,0) &= t^{(-)}_{(K^*)}(s,m^2)\left[\frac{K^2(s,M^2,0)}{K^2(s,M^2,m^2)}\right]^J \left(\frac{F_J(0)}{F_J(m^2)}\right)^2\Bigg|_{s\approx M_*^2} \\ &=: \rho_{(K^*)}(s)\,\mathbf{K}^2_{N\,N\,I}(0)\, t^{(-)}_{(K^*)}(s,m^2). \end{aligned} \tag{32}$$

where the second line serves to define the function $\rho_{(K^*)}(s)$. Having in mind a situation where the resonances do not overlap and where the non resonant background is negligeable in each resonance region, we define

$$\rho(s) := \prod_{\text{resonances}} \rho_{(K^*)}(s)$$

where $\rho_{(K^*)}(s) := 1$ outside its resonance region. This gives immediately Eq. (30).

The function $K^2(s, M^2, m^2)$ has been introduced in (23). The ratio of the functions $K^2(s, M^2, 0)$ and $K^2(s, M^2, m^2)$ occuring in Eq. (32) reflects the change of the penetrability of the centrifugal barrier induced by the continuation in the "pion mass". It is thus essentially a kinematical effect. $F_J(q^2)$ is the formfactor connected with the vertex of the pion

current between K and K^* states. At $q^2=m^2$ it is related to the width Γ. The quotient of the formfactors $F_J(q^2)$ in Eq. (32) originates from the change of the effective coupling. This has already been discussed in terms of Feynman graphs. According to that discussion we replace the quotient $F_J(0)/F_J(m^2)$ by $\boldsymbol{K}_{NNI}(0)$.

This gives

$$\rho_{(K^*)}(s)=\left[\frac{K^2(s,M^2,0)}{K^2(s,M^2,m^2)}\right]^J_{s\approx M_\delta^2}.$$

The simple formula (32) reveals the interesting feature that, as $F_J(0)/F_J(m^2)<1$, the dynamical factor in (32) damps the kineamtical one which is larger than 1. We finally remark that independently of whether there are resonances or not one should characterize in Eq. (29) the intermediate states $|n\rangle$ by their total angular momentum and correct each term apart from $\boldsymbol{K}^2_{NNI}(0)$ by its kinematical factor

$$\left[\frac{K^2(s,M^2,0)}{K^2(s,M^2,m^2)}\right]^L \tag{33}$$

where in the general case L is the orbital angular momentum between the "pion" and the external particle. For

$$\left(\frac{m}{M}\right)^2 \ll 1$$

this correction becomes negligeable already at low energies.

After this general analysis which for simplicity reasons was done for the spinless case, we are going to apply it to the more interesting πN case.

IV. The Adler-Weisberger Relation

The procedure in this case is absolutely analogous to that already discussed, only $|p,i\rangle$ and $|p,i'\rangle$ are now proton states and hence M is the proton mass. The isospin decomposition of the various Fourier transforms remains unchanged but the covariant decompositions contain now more terms due to the spin 1/2 of the proton. We display this for the isospin $(-)$ part of $t_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} t^{(-)}_{\mu\nu}(s,q^2)=\bar u(p,s')\{&p_\mu p_\nu b_1^{(-)}(s,q^2)+q_\mu q_\nu b_2^{(-)}(s,q^2)+\\ &+g_{\mu\nu}b_3^{(-)}(s,q^2)+(p_\mu q_\nu+p_\nu q_\mu)b_4^{(-)}(s,q^2)+\\ &+i\sigma_{\mu\nu}b_5^{(-)}(s,q^2)+i(\sigma_{\mu\nu}\gamma q+\gamma q\sigma_{\mu\nu})b_6^{(-)}(s,q^2)+\\ &+i(q_\mu\sigma_{\nu\lambda}q^\lambda-q_\nu\sigma_{\mu\lambda}q^\lambda)b_7^{(-)}(s,q^2)\}u(p,s). \end{aligned} \tag{34}$$

The first 4 covariants we already encountered in the spinless case, they are symmetric in $\mu\nu$. The three last ones are antisymmetric in $\mu\nu$. The sum rule one derives is

$$1=G_1^2(q^2)+2M(2\pi)^3\frac{1}{\pi}\int\limits_{(M+m)^2}^{\infty} ds\, b_1^{(-)}(s,q^2). \tag{35}$$

$G_1(q^2)$ is the formfactor associated with $\gamma_5\gamma_\mu$ in the covariant decomposition of $\langle p|a_\mu^{(+)}|n\rangle$ where $|p\rangle$ and $|n\rangle$ are a one-proton and a one-neutron state respectively. We have $G_1(0)=r_A$ which experimentally turns out to be $r_A=1.18$. The connection (26) between t and $t_{\mu\nu}$ remains valid in the proton case, only a factor 2M appears on the right hand side because of our normalization of the spinors $u(p,s)$.

Note that the three last terms in (34) are antisymmetric in $\mu\nu$ and thus disappear when contracted with $q_\mu q_\nu$ as required by Eq. (19). As relation (26) remains valid, so does (30).

$$\begin{aligned}&(s-M^2)^2\, b_1^{(-)}(s,0)\\ &\quad=4K_{NNI}^2(0)\,f^2\,\frac{K(s,M^2,m^2)\sqrt{s}}{2M(2\pi)^3}\,\rho(s)\,\{\sigma_{\pi^-p}(s)-\sigma_{\pi^+p}(s)\}.\end{aligned} \tag{36}$$

It should be stressed again that such a factorization of $b_1^{(-)}$ into a product of the cross sections times a correction factor occurs only, when for every s only one partial wave is considered and the other ones neglected. Otherwise one would have to decompose the forward scattering amplitude into partial waves and correct each term separately. Inserting Eq. (36) into Eq. (35) gives the sum rule

$$\begin{aligned}1=r_A^2+K_{NNI}^2(0)\,\frac{2f^2}{m^2}\,\frac{1}{\pi}\int_1^\infty dx\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{\left(x+\frac{m}{2M}\right)^2}\times\\ \times\hat{\rho}(x)\,m^2\,\{\sigma_{\pi^-p}(x)-\sigma_{\pi^+p}(x)\}.\end{aligned} \tag{37}$$

In addition we introduced the variable x, the pion Lab-energy measured in pion masses, in place of s; $s=M^2+m^2+2Mmx$.

The work still to be done is the numerical evaluation of the sum rule (37). It requires as input the kinematical factor $\hat{\rho}(x)$, the $\pi^\pm p$ total cross sections, the contant $K_{NNI}(0)$ and the number f. Concerning the factor $\hat{\rho}(x)$ pion-nucleon scattering is particularly favourable, because for low energies it is dominated by a single partial wave:

$$J^P=\frac{3^+}{2},\quad I=\frac{3}{2}.$$

Apart from this resonant partial wave there are small s-waves. But these do not get kinematical corrections since they have zero angular momentum. We thus restrict the kinematical correction to the 33-resonance. According to our general discussion in chapter III, we have in the resonance region

$$\rho(s)=\frac{K^2(s, M^2, 0)}{K^2(s, M^2, m^2)}$$

as the partial wave has orbital angular momentum $L=1$. Substituting s by x we thus obtain as kinematical correction factor

$$\hat{\rho}(x)=\begin{cases}\dfrac{\left(x+\dfrac{m}{2M}\right)^2}{x^2-1} & \text{for } 1.6\leqq x\leqq 2.8\\ 1 & \text{for } x \text{ elsewhere.}\end{cases} \tag{38}$$

The constant f is an experimentally determined number. It can be calculated from the pion lifetime via Eq. (21). One obtains

$$f^2=10^{-2}\,M^2 \tag{39}$$

where M is the nucleon mass.

Finally one has to know the pionic formfactor of the nucleons $\boldsymbol{K}_{NNI}(q^2)$ at the point $q^2=0$. If one would take the electromagnetic formfactors of the proton as a guide, on would expect $\boldsymbol{K}_{NNI}(0)\approx 0.94$.

However, this comparison is misleading. Since the divergence of the axial vector current is an interpolating pion field, the Goldberger-Treiman type relation[11]

$$f=\frac{r_A\,M}{g\,\boldsymbol{K}_{NNI}(0)} \tag{40}$$

is an exact relation.

Therefore this relation can be used to calculate $\boldsymbol{K}_{NNI}(0)$ from the experimentally determined values of f, r_A, M and g, where g is the pion nucleon coupling constant; $g^2/4\pi=14.65$. It gives

$$|\boldsymbol{K}_{NNI}(0)|=0{,}870\,.$$

This rapid change of the pionic formfactor is hard to understand from the point of view of dispersion relations. One would expect a value between 0.94 and 1, as the spectrum of the pionic formfactor starts with the 3π-state and no $I=1$, $J^P=0^-$ or $J^P=1^+$ resonances have been observed. On the other hand, since the Goldberger-Treiman relation (40) is an exact relation, we can use it ot replace the factor $f^2\,\boldsymbol{K}^2_{NNI}(0)$ in the sum

[11] GOLDBERGER, M. L., and S. B. TREIMAN: Phys. Rev. **109**, 193 (1958).

rule (37) by the factor $r_A^2 M^2/g^2$:

$$\frac{1}{r_A^2}=1+\frac{1}{\frac{g^2}{4\pi}\left(\frac{m}{2M}\right)^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_1^\infty dx\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{\left(x+\frac{m}{2M}\right)^2} \times \hat{\rho}(x)\,m^2\{\sigma_{\pi^- p}(x)-\sigma_{\pi^+ p}(x)\}. \tag{41}$$

When we look at the πN forward scattering dispersion relation at threshold

$$0=\frac{1}{\frac{g^2}{4\pi}\left(\frac{m}{2M}\right)^2}\left\{-\frac{1}{6}\left(1+\frac{m}{M}\right)(m a_1-m a_3)+\frac{g^2}{4\pi}\frac{m^2}{4M^2}+ +\frac{1}{8\pi^2}\int_1^\infty dx\,\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,m^2\{\sigma_{\pi^- p}(x)-\sigma_{\pi^+ p}(x)\}\right\} \tag{42}$$

we observe that for large x its integrand becomes equal to that occurring in the sum rule (41). For that reason we can get rid of the high energy tail in the sum rule subtracting the πN forward scattering dispersion relation (42) from (41). One obtains

$$\frac{1}{r_A^2}=\frac{\frac{1}{6}\left(1+\frac{m}{M}\right)(m a_1-m a_3)}{\frac{g^2}{4\pi}\left(\frac{m}{2M}\right)^2}+\frac{1}{\frac{g^2}{4\pi}\left(\frac{m}{2M}\right)^2}\frac{1}{8\pi^2}\times \times\int_1^\infty dx\sqrt{x^2-1}\left\{\frac{1}{x^2-1}-\frac{\hat{\rho}(x)}{\left(x+\frac{m}{2M}\right)^2}\right\}m^2\{\sigma_{\pi^+ p}(x)-\sigma_{\pi^- p}(x)\}. \tag{43}$$

The constants a_1 and a_3 are the $I=\frac{1}{2}$ and $I=\frac{3}{2}$ s-wave scattering lengths respectively. Due to the difference of the kinematical factors the integral in (43) converges very rapidly.

As regards the difference of the πN s-wave scattering lengths

$$\Delta := m a_1 - m a_3$$

there exist two different determinations.

1. HAMILTON et al.[8] $\Delta_{\text{HAM}}=0{,}265$
2. HÖHLER et al.[9] $\Delta_{\text{HOH}}=0{,}295.$

The $\pi^\pm p$ total cross sections are taken from AMBLARD et al.[12]. Having listed all necessary input we are now able to calculate r_A from

[12] AMBLARD, B., P. BORGEAUD, Y. DUCROS, P. FALK-VAIRANT, O. GUISAN, W. LASKAR, P. SONDEREGGER, A. STIRLING, M. YVERT, A. TRAN HA, and S. D. WARSHAW: Phys. Letters **10**, 138 (1964).

Eq. (43). This is done both with Δ_{HAM} and Δ_{HOH}. Furthermore for both Δ we perform two calculations, one putting $\hat{\rho}(x)=1$ everywhere; and the other one using $\hat{\rho}=\hat{\rho}_{33}$ as stated in (38). The numerical results are displayed in the following table

Table. *r_A calculated from Eq. (43). In order to illustrate the magnitude of the kinematical correction, we display the kinematically uncorrected result in the first column*

	$\hat{\rho}=1$	$\hat{\rho}=\hat{\rho}_{33}$
Δ_{HAM}	1.17	1.27
Δ_{HOH}	1.12	1.20

In the case $\hat{\rho}(x)=\hat{\rho}_{33}$ it turns out that the contribution of the integral in Eq. (43) is 1%.

Therefore as a good approximation we obtain a relation connecting r_A and the πN s-wave scattering lengths only:

$$r_A^2=\frac{\frac{g^2}{4\pi}\left(\frac{m}{2M}\right)^2}{\frac{1}{6}\left(1+\frac{m}{M}\right)(m a_1-m a_3)}.$$

In our treatment no kinematical correction has been done above the 33-resonance. As this region contributes still to the sum rule, such corrections may not be entirely negligeable. In view of the fact that $\sigma_{\pi^+p}-\sigma_{\pi^-p}$ is negative there, this correction would improve the agreement with experiment.

It is perhaps worthwhile to note that the overall dynamical correction represented by $\boldsymbol{K}_{NNI}(0)$ effectively has also been performed by ADLER and WEISBERGER. ADLER gives a motivation of it considering a very special model based on one-nucleon-exchange. This model effectively contains also what we call the kinematical correction.

Although we have given a general discussion of the implications due to the continuation in the "pion mass", there is still some room for additional corrections not contained in the factorization into an overall dynamical and kinematical part. Nevertheless facing the numerical results, one has no reason to doubt the equal-time commutation relation in the form of Eq. (15).

We wish to thank Prof. B. STECH for discussions.

Appendix

Here we want to state the precise form of the current algebra assumption entering the derivation of the sum rule (17).

Since the tensor $T_{\mu\nu}$ defined in Eq. (1) can be viewed as part of a second order weak interaction amplitude, it must always be possible to define it covariantly. Hence its retarded commutator which we denote by $R^{k\,l}_{\mu\,\nu}(x)$, is a covariant quantity. Expressing it as the product of the step-function with the ordinary commutator, i.e. $i\theta(x_0)\,[a^k_\mu(x), a^l_\nu(0)]$, is only a formal way of writing it. The same consideration holds for the vector T_ν defined in Eq. (9) It is part of a first order weak interaction amplitude. Thus the retarded commutator contained in it, which we denote by $R^{k\,l}_{\nu}(x)$, is a covariant quantity too. Then the current algebra assumption sufficient for our purpose reads

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \overleftrightarrow{R^{k\,l}_{\mu\,\nu}}(x) = \overleftrightarrow{R^{k\,l}_{\nu}}(x) - \varepsilon^{k\,l\,m}\,\delta^{(4)}(x)\,j^m_\nu(0)$$

where the sign $\leftrightarrow$ denotes the antisymmetric part of the iso-tensors.

Zeitschrift für Physik 202, 364–382 (1967)

Photodisintegration of the Deuteron from 100 to 420 MeV*

R. Kose, W. Paul, and K. Stockhorst
Physikalisches Institut der Universität Bonn

K. H. Kissler
Kernforschungsanlage Jülich

Received February 7, 1967

The differential cross section of the photodisintegration of the deuteron has been measured for photon lab. energies from 100 to 420 MeV. The protons were detected with a range telescope. Competing backgrounds due to pion photoproduction have been eliminated by detecting the coincident neutrons with a liquid scintillation counter.

1. Introduction

The differential cross section of the high energy deuteron photodisintegration has been investigated by several laboratories in the past years (Ref.[1–12]). A complete reference index up to July 1965 is given in the report by Toms[13]. In the present experiment differential cross sections of the process

$$\gamma + d \rightarrow p + n$$

have been measured for photon lab. energies between 100 and 420 MeV**.

* This work was supported by the „Bundesministerium für wissenschaftliche Forschung".

** Preliminary results have been reported at the Hamburg Conference[14].

[1] Benedict, T. S., and W. M. Woodward: Phys. Rev. **85**, 924 (1952).
[2] Littauer, R., and J. Keck: Phys. Rev. **86**, 1051 (1952).
[3] Gilbert, W. S., and J. W. Rosengren: Phys. Rev. **88**, 901 (1952).
[4] Kikuchi, S.: Phys. Rev. **85**, 1062 (1952).
[5] Yamagata, T., M. Q. Barton, O. A. Hanson, and J. H. Smith: Phys. Rev. **95**, 574 (1954).
[6] Whalin, E. A.: Phys. Rev. **95**, 1362 (1954).
[7] Keck, J., R. M. Littauer, G. K. O'Neil, A. M. Perry, and W. M. Woodward: Phys. Rev. **93**, 827 (1954).
[8] Allen jr., L.: Phys. Rev. **98**, 705 (1955).
[9] Keck, J. C., and A. V. Tollestrup: Phys. Rev. **101**, 360 (1956).
[10] Whalin, E. A., B. D. Schriever, and A. O. Hanson: Phys. Rev. **101**, 377 (1956).
[11] Dixon, D. R., and K. C. Bandtel: Phys. Rev. **104**, 1730 (1956).
[12] Aleksandrov, V. A., N. B. Delone, L. I. Shovokhotov, and G. A. Sekol: Soviet Phys. JEPT **6**, 473 (1958).
[13] Toms, M. E.: U.S. Naval Res. Lab. Bibl. 24 (1965).
[14] Kissler, K. H., R. Kose, W. Paul, and K. Stockhorst: Proc. of the Intern. Symp. on Electron and Photon Interactions, vol. II, p. 280. Hamburg 1965.

This energy region is of interest for several reasons. With increasing photon energy the angular distribution of the deuteron photodisintegration becomes more sensitive to the details of the nuclear potential or the deuteron wave function which is used for cross section calculation. The study of the reaction can be helpful to answer questions about the value of the *D*-state probability which is not yet clear and the influence of meson fields below the pion threshold. Above the pion threshold the deuteron photodisintegration is essentially infuenced by mesonic effects. The total cross section shows a resonance which is due to the reabsorption of pions produced on the deuteron nucleons. Improved measurements in the resonance region become very interesting at present time. The comparison between deuteron photodisintegration and the time reversed reaction

$$n+p \rightarrow \gamma+d$$

in the resonance can give information about the validity of the *T*-invariance principle in electromagnetic interactions[15].

2. Experimental Procedure

In the earlier experiments only the emitted proton produced by the deuteron photodisintegration was detected. Such measurements become more difficult above the threshold for pion photoproduction because here proton recoils associated with the incoherent pion production on the deuteron contribute to the counting rate. The protons due to the competing reactions

$$\gamma+d \rightarrow \pi^0+p+n$$
$$\rightarrow \pi^-+p+p$$

have to be distinguished from those produced by deuteron photodisintegration. A discussion of the competing reactions is given in Ref.[9]. For a given end point energy of the photon spectrum and fixed proton angle and energy there exists a limiting photon energy above which the deuteron photodisintegration is the only possible process. Below this limit the pion photoproduction can contribute to the proton counting rate. This contribution can be eliminated by progressively lowering the end point energy of the photon spectrum so that the angle and energy interval accepted by the proton detector is always lying in the region where only the deuteron photodisintegration is possible.

Another method to eliminate the competing reactions is to measure proton and neutron from the process $\gamma+d \rightarrow p+n$ in coincidence. We have chosen this method. A competition of proton-neutron coincidences

[15] BARSCHY, S.: Phys. Rev. Letters **17**, 49 (1966).

due to the threebody reaction $\gamma+d\rightarrow\pi^0+p+n$ is completely negligible. The experimental set up is shown schematically in Fig. 1. The photon beam of the Bonn 500 MeV electron synchrotron is collimated to $1.6\times1.6\,\text{cm}^2$ at the liquid deuterium target and monitored by a Wilson type quantameter.

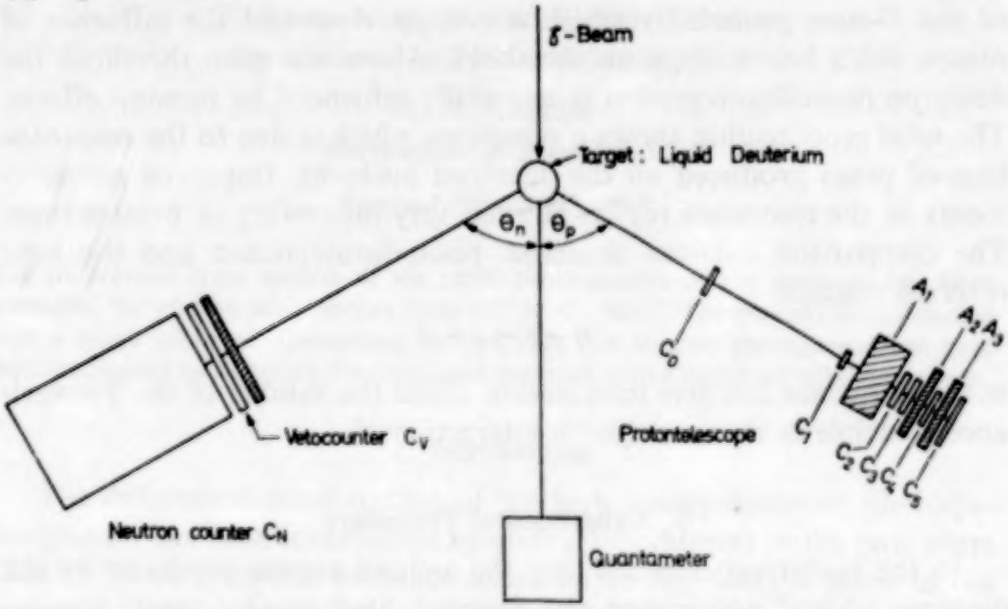


Fig. 1. Experimental set up

Protons produced in the reaction

$$\gamma+d\rightarrow p+n$$

are detected with a range telescope. The coincident neutrons are registered with a liquid scintillation counter.

Photon Beam and Monitor

The photon spectrum end-point energy was 450 MeV $\pm$ 1% during the experiment. It was determined from the synchrotron magnetic field and the time of electron acceleration. A measurement of the end-point energy by a pair spectrometer[16] gives agreement within the experimental accuracy of 1%. The photon beam intensity was normally 1.2×10^{11} effective quanta/min in the collimated beam. The quantameter gauge factor ($F_q=4.66\times10^{12}$ MeV/$\mu C\pm3\%$) was determined by comparing the quantameter with the Cornell thick walled ionisation chamber. The measurement was repeated three times during the experiment. The F_q-values differed by 0.7%. A measurement of F_q by a pair spectrometer[16] gives agreement within the experimental accuracy of 3–4%.

[16] Husmann, D., D. Schmitz u. E. Weisse: Z. Physik **185**, 437 (1965).

The Deuterium Target

The deuterium target is shown in Fig. 2a. Deuterium gas stored in a gasholder is liquified in a cooling coil which is in thermal contact with

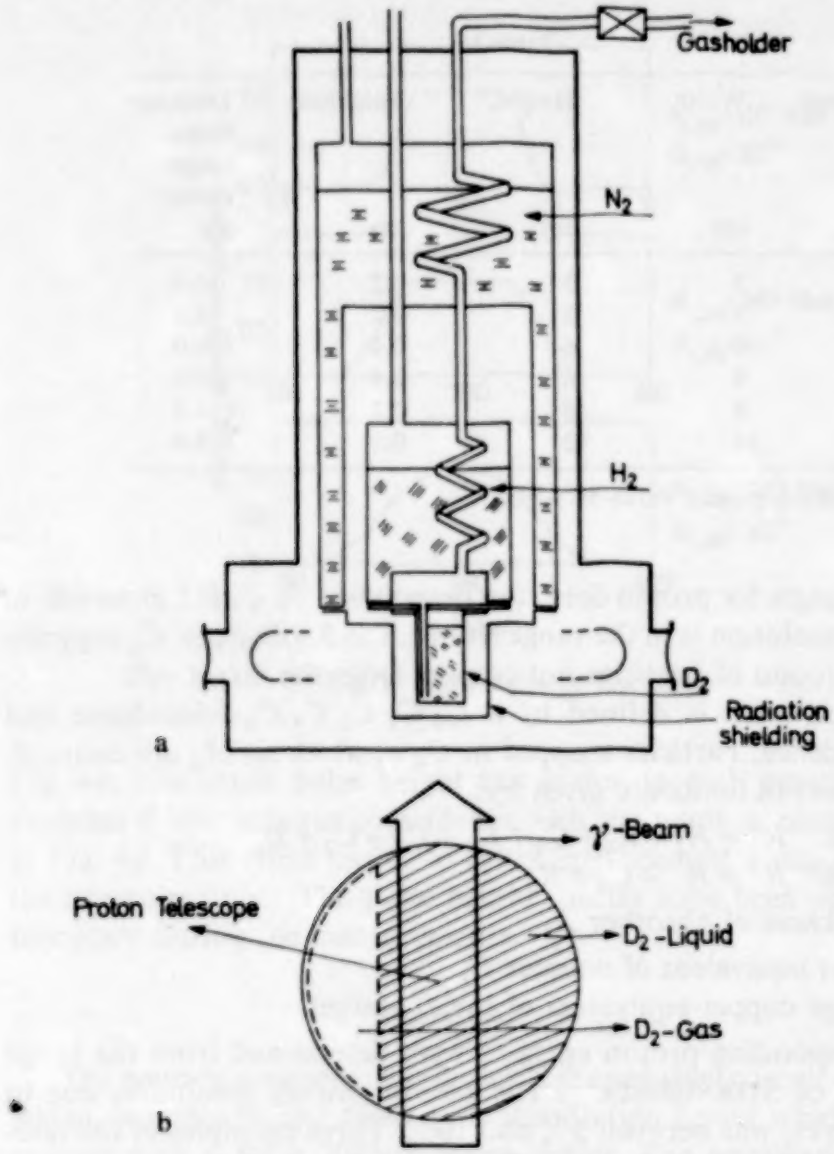


Fig. 2. a D_2-Target (schematically). b Target cell

liquid hydrogen. During background measurements with empty target cell the liquid deuterium can be stored in a storage container above the cell. The target cell has cylindrical shape with a diameter of 6 cm. The walls are 50 μ hostaphan foil. A partial cylinder consisting of 50 μ hostaphan foil and filled with deuterium gas is situated inside the cell in proton direction (Fig. 2b). By this method the proton paths in the liquid become more uniform and on the other side the target length is well defined.

The Proton Telescope

The proton telescope consists of 6 scintillation counters and 3 copper absorbers. The counter dimensions are shown in Table 1.

Table 1

Counter No.	Width cm	Height cm	Thickness cm	Distance from target center cm
C_0	5	3	0.2	50.0
C_1	3	3	0.2	94.9
C_2	8	6	0.4	108.0
C_3	8	6	0.4	109.0
C_4	8	6	0.2	114.0
C_5	14	12	0.5	115.0

Photomultipliers: Valvo 56 AVP.

The solid angle for proton detection determined by C_1 is 1 msteradian. The angular resolution is in the range from 1.8 to 3.6 degrees. C_0 suppresses the background of particles not coming from the target cell.

A telescope event is defined by a $C_0\,C_1\,C_2\,C_3\,C_4$-coincidence and C_5 anticoincidence. Particles stopped in C_4 or absorber A_3 are counted. The range intervall limits are given by:

lower limit $R^- = R_1 + R_2 + C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + D$

upper limit $R^+ = R^- + C_4 + R_3$

with R_i = thickness of absorber A_i

C_i = copper equivalent of counter C_i

D = average copper equivalent of the D_2-target.

The corresponding proton energies were determined from the range energy tables of STERNHEIMER[17]. The photon energy resolution due to the range interval was between 5% and 10%. Three examples of the photon energy resolution are shown in Fig. 3.

The protons are separated from pions and electrons of the same range by pulse height discrimination in the counters C_1, C_2 and C_3. Some typical pulse height spectra are shown in Fig. 4. The C_2-spectrum in Fig. 4a shows well separated peaks for protons, pions and electrons. In order to get optimal separation without losses for protons the discriminator threshold was fixed at the dashed line position. The remaining pion contribution is rejected to a negligible amount by repeating the same

[17] STERNHEIMER, R. M.: Phys. Rev. **115**, 137 (1959).

procedure with C_3. The resulting C_2-spectrum shown in Fig. 4b confirmes that the particles observed in C_2 and C_3 are protons. But some of these can be produced by reactions of incoming high energy electrons or pions in the absorber A_1. This can be seen by the C_1-spectrum shown in

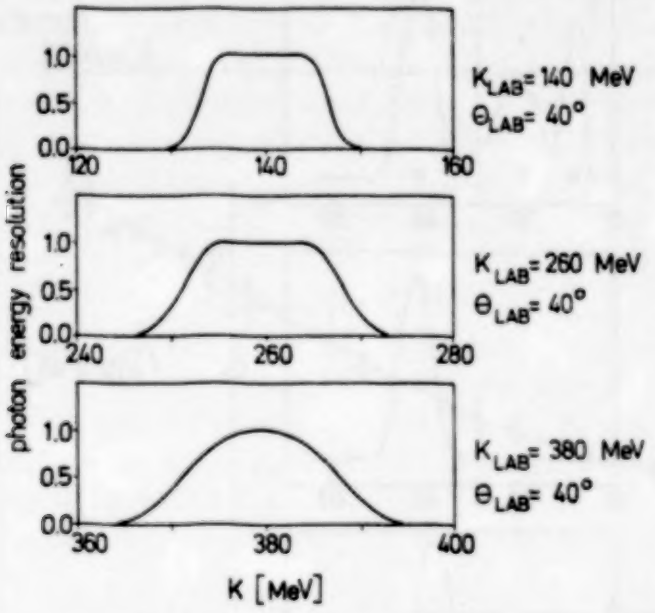


Fig. 3. Photon energy resolution

Fig. 4c. The small pulse height tail is due to such reactions in A_1. It vanishes if one requires coincidence with the neutron counter as shown in Fig. 4d. This effect has to be taken into account if one measures with the telescope only. The pulse height spectra have been observed simultaneously during the measurements.

The Neutron Counter

The neutron counter is a cylindrical shaped steel container (diameter = 30 cm, length = 50 cm) filled with scintillation liquid which is in optical contact with a RCA 7046-photomultiplier. The scintillation liquid is a saturated solution (at 16 °C) of *p*-terphenyl (4 g/l) in Shell Sol A with a contribution of 100 mg/l POPOP. Shell Sol A is a mixture of 1,2,4-trimethylbenzene (98 %) and higher benzene derivatives*. The vetocounter C_v rejects coincident charged particles. A 1 cm copper absorper suppresses the low energy charged particle background.

The efficiency of the neutron counter was measured by using the reaction $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$ as neutron source. The experimental set up was

* The scintillation liquid was delivered by Firma E. Merck, Darmstadt.

very similar to that shown in Fig. 1. The neutron beam hitting the neutron counter was prepared by measuring emission angle and energy of the π^+-mesons with a range telescope described in [18]. With this method

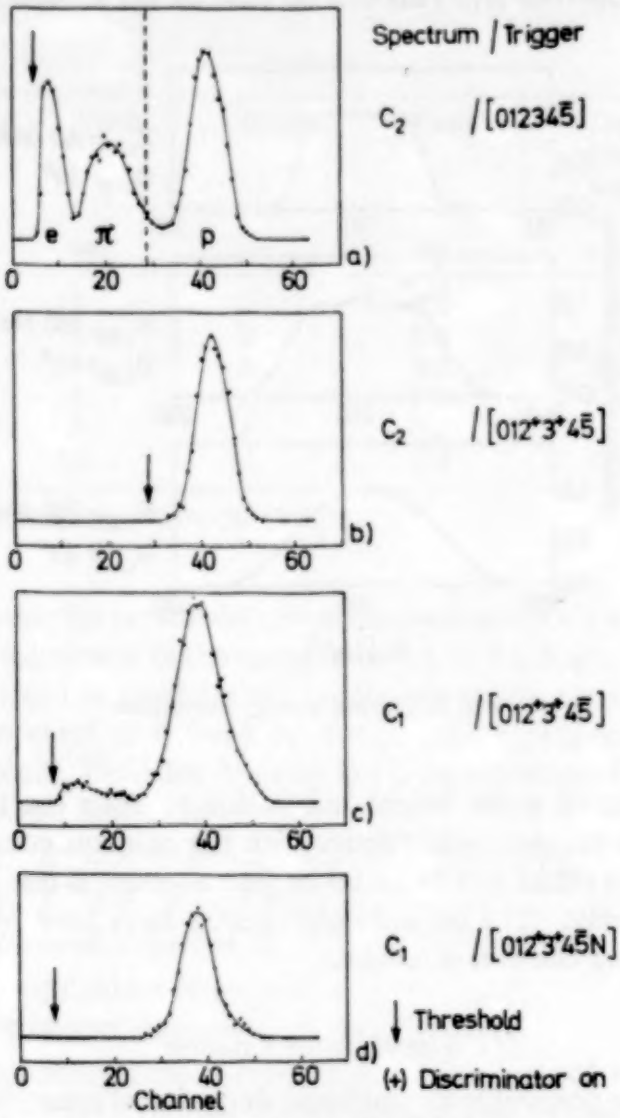


Fig. 4. Pulse height spectra

the efficiency was measured from 30 to 100 MeV neutron energy. For higher energies we used the deuteron photodisintegration itself as neutron source. The efficiency was determined from such data measured near the end of the photon spectrum. This is possible because here as shown above the deuteron photodisintegration is the only possible process. The results are shown in Fig. 5. On the left side of the dashed line the π^+-photoproduction and on the right the deuteron photodisintegration was

[18] FREYTAG, D., W. J. SCHWILLE u. R. J. WEDEMEYER: Z. Physik **186**, 1 (1965).

the neutron source. The measured points can be fitted by a smoothed curve. The triangular point at 90 MeV was calculated from measured neutron-proton scattering cross sections[19] and neutron-carbon cross sections for charged recoil production[20] considering also the nuclear absorption in the copper absorber. The calculated point is in good agreement with the experiment.

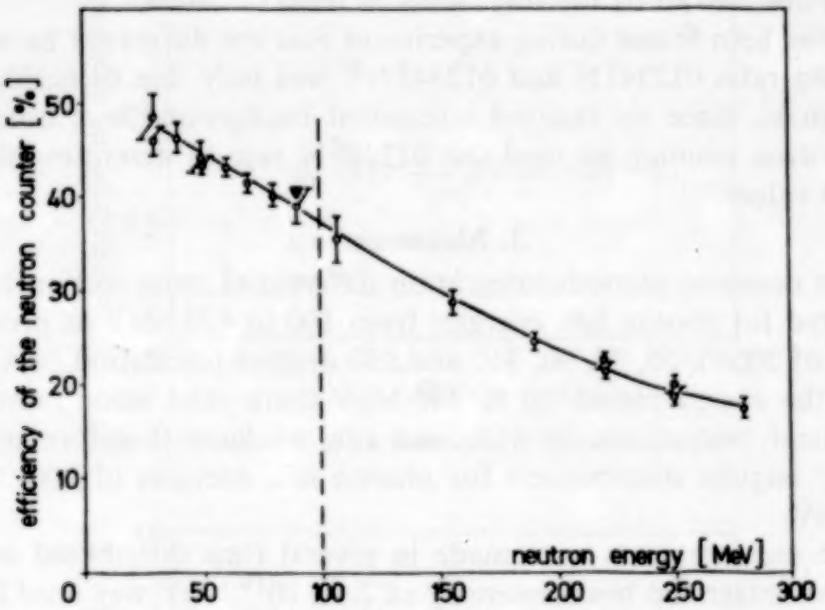


Fig. 5. Efficiency of the neutron counter

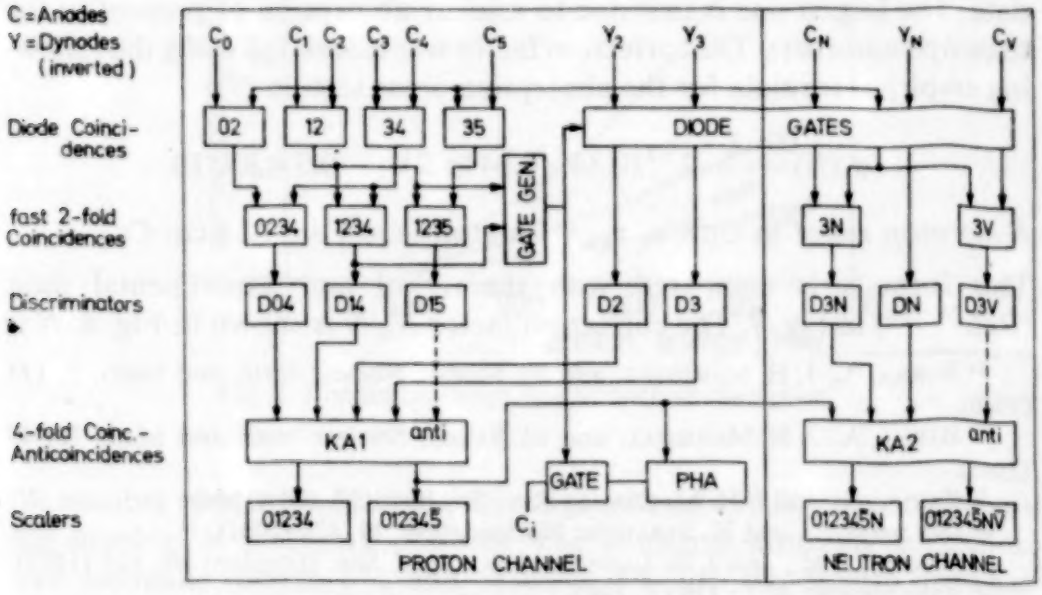


Fig. 6. Electronics block diagram

[19] FOWLER, J. C., and J. E. BROLLEY: Rev. Modern Phys. **28**, 103 (1956).
[20] KELLOG, D. A.: Phys. Rev. **90**, 224 (1953).

Electronics

The electronic block diagram is shown in Fig. 6. In order to prevent deadtime losses simple diode coincidences are used in the first coincidence plane. These circuits which are also used as fast linear gates have no deadtime. The other coincidence and discriminator circuits are mainly based on the design published in Ref.[21-23]. The $C2$, $C3$ and CN dynode signals are used to fix the thresholds of these counters.

It has been found during experiment that the difference between the counting rates $012345\bar{5}N$ and $012345\bar{5}N\bar{V}$ was only due to accidental C_v vetosignals. Since no charged coincident background was observed in the neutron counter we used the $012345\bar{5}N$ rate to determine the cross section values.

3. Measurements

The deuteron photodisintegration differential cross section has been measured for photon lab. energies from 100 to 420 MeV at proton lab. angles of 30, 40, 55, 70, 90, 110 and 130 degrees (excitation curves).

In the energy region up to 140 MeV there exist some more recent theoretical predictions. In a second run we have therefore measured directly angular distributions for photon lab. energies of 100, 120 and 140 MeV.

The measurements were made in several runs distributed over one year. An integrated beam intensity of 2.4×10^{18} MeV was used for data collection. This corresponds to 700 beam hours (not including test runs).

Several corrections have been applied to the primary experimental data. The largest one is that due to nuclear absorption of protons in the telescope absorbers. The correction factor was calculated using the following empirical formula for the absorption cross section (9):

$$\sigma_a(R)=\frac{1}{n_{Cu}}\lambda^{-1}(0.84-0.04\ln R)\qquad 0.5<R<10$$

R = proton range in cm Cu, n_{Cu} = Cu-atoms/cm^3, λ = 12.4 cm Cu.

This formula is compared with theoretical and experimental data (Ref.[24-28]) in Fig. 7. The correction factor N_0/N is shown in Fig. 8. N is

[21] Barna, A., J. H. Marshall, and M. Sands: Nuclear Instr. and Meth. **7**, 124 (1960).

[22] Barna, A., J. H. Marshall, and M. Sands: Nuclear Instr. and Meth. **12**, 43 (1961).

[23] Barna, A., and J. H. Marshall: Rev. Sci. Instr. **35**, 881 (1964).

[24] Goloskie, R., and K. Strauch: Nuclear Phys. **29**, 474 (1961).

[25] Cassels, J. M., and J. D. Lawson: Proc. Phys. Soc. (London) **67**, 125 (1953).

[26] Kirschbaum, A. J.: URCL 1967.

[27] Melkanoff, M. A., J. S. Nodvik, D. S. Saxon, and R. D. Woods: Phys. Rev. **106**, 793 (1957).

[28] Glasgold, A. E.: Phys. Rev. **109**, 1291 (1958).

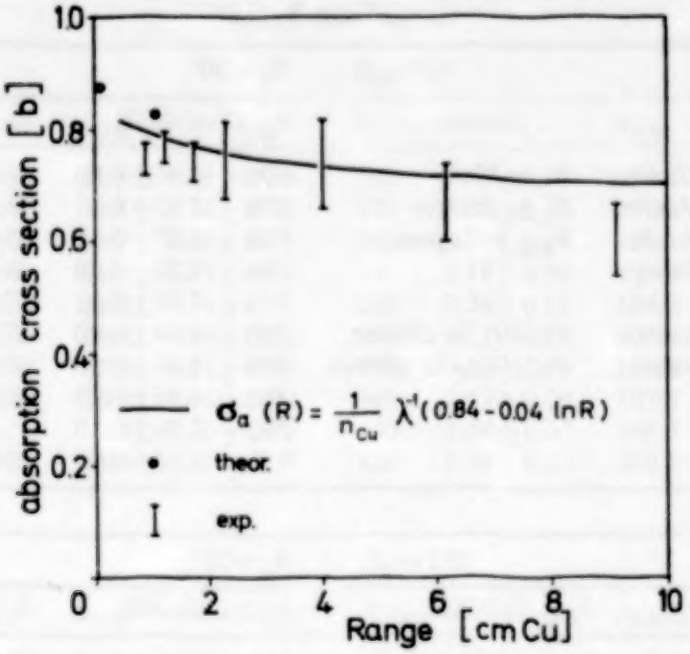


Fig. 7. Absorption cross section of protons in copper

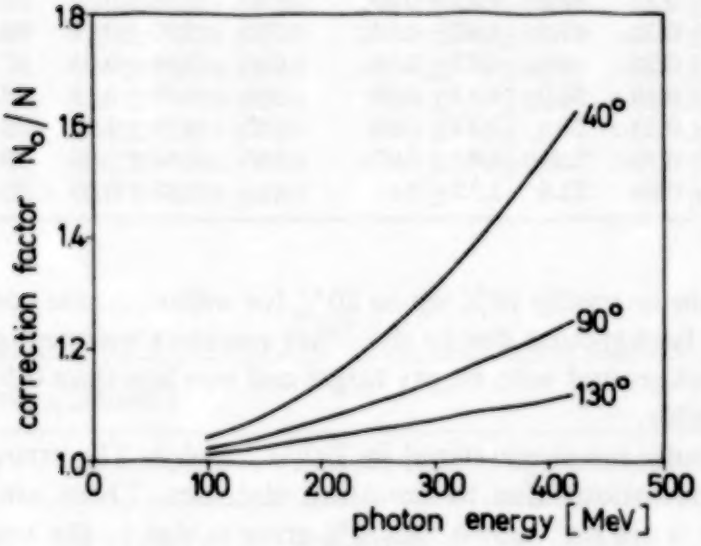


Fig. 8. Correction factor due to nuclear absorption

the number of protons reaching the range interval and N_0 the corresponding number of incoming protons. The coulomb scattering correction was normally about 1% and reached 4% for the largest absorber thickness.

The accidental background caused by the neutron counter was measured simultaneously during the experiment. The corresponding correction

Table 2

		$\vartheta_L = 30°$			
		k_L	$d\sigma/d\Omega_L$	ϑ_{CM}	$d\sigma/d\Omega_{CM}$
Photon Lab. Energy:	k_L in MeV	100	6.45 ± 0.20	34.7	4.94 ± 0.15
Proton Lab. Angle:	ϑ_L in degrees	120	5.93 ± 0.17	35.2	4.44 ± 0.13
Proton CM Angle	ϑ_{CM} in degrees	140	5.87 ± 0.14	35.6	4.50 ± 0.11
Differential Cross Section		180	6.70 ± 0.20	36.4	4.72 ± 0.14
		220	7.06 ± 0.21	37.1	4.81 ± 0.14
in the Lab.-System:	$d\sigma/d\Omega_L$ in μb/ster.	260	6.64 ± 0.20	37.7	4.40 ± 0.13
in the CM-System:	$d\sigma/d\Omega_{CM}$ in μb/ster.	300	6.64 ± 0.20	38.3	4.27 ± 0.13
		340	4.45 ± 0.15	38.9	2.79 ± 0.09
		380	2.96 ± 0.10	39.5	1.81 ± 0.06
		420	1.90 ± 0.09	40.0	1.14 ± 0.05

$\vartheta_L = 40°$				$\vartheta_L = 55°$			
k_L	$d\sigma/d\Omega_L$	ϑ_{CM}	$d\sigma/d\Omega_{CM}$	k_L	$d\sigma/d\Omega_L$	ϑ_{CM}	$d\sigma/d\Omega_{CM}$
100	6.95 ± 0.22	46.1	5.50 ± 0.17	100	6.05 ± 0.19	62.7	5.09 ± 0.16
120	5.90 ± 0.17	46.7	4.57 ± 0.13	120	$5.15 \pm 0,15$	63.5	4.27 ± 0.12
140	5.44 ± 0.17	47.2	4.14 ± 0.13	140	5.17 ± 0.15	64.2	4.23 ± 0.13
180	5.64 ± 0.18	48.2	4.15 ± 0.13	180	5.36 ± 0.17	65.4	4.28 ± 0.14
220	6.43 ± 0.20	49.1	4.60 ± 0.14	220	5.90 ± 0.18	66.6	4.62 ± 0.14
260	6.85 ± 0.20	49.9	4.77 ± 0.14	260	7.01 ± 0.23	67.7	5.39 ± 0.18
300	6.08 ± 0.19	50.7	4.13 ± 0.13	300	6.00 ± 0.19	68.6	4.54 ± 0.15
340	4.26 ± 0.13	51.4	2.83 ± 0.09	340	4.23 ± 0.15	69.5	3.16 ± 0.11
380	2.95 ± 0.10	52.1	1.92 ± 0.07	380	2.66 ± 0.09	70.3	1.96 ± 0.06
420	1.75 ± 0.08	52.8	1.12 ± 0.05	420	1.88 ± 0.09	71.2	1.37 ± 0.07

ranged from normally 10% up to 20% for unfavourable conditions. The accidental background due to the other counters was negligible.

The background with empty target cell was less than 0.5% and therefore negligible.

The results are summarized in Table 2 and 3. The errors quoted are standard deviations due to counting statistics. There are some other errors which are not shown. An 4% error is due to the uncertainties in target density and length, solid angle, range interval and beam monitoring. Together with an 3% uncertainty in the neutron counting efficiency and that introduced by the correction procedure one gets an average error between 5% and 6% in the cross section value.

The excitation curves are shown in Fig. 9–13. The full and dashed curves are drawn through the experimental points by hand. In Fig. 10–13 the 40°, 55°, 70° and 90° results are compared with the corresponding Cal. Tech. data (9) which were measured by a range telescope. At high energies both measurements are in agreement. Below the resonance our

Table 2 (Continued)

$\vartheta_L = 70°$				$\vartheta_L = 90°$			
k_L	$d\sigma/d\Omega_L$	ϑ_{CM}	$d\sigma/d\Omega_{CM}$	k_L	$d\sigma/d\Omega_L$	ϑ_{CM}	$d\sigma/d\Omega_{CM}$
100	5.00 ± 0.16	78.9	4.53 ± 0.14	100	3.65 ± 0.11	99.4	3.70 ± 0.11
120	4.82 ± 0.14	79.7	4.34 ± 0.12	120	3.88 ± 0.12	100.3	3.95 ± 0.12
140	4.35 ± 0.13	80.5	3.89 ± 0.12	140	3.03 ± 0.10	101.1	3.09 ± 0.10
180	4.69 ± 0.14	81.9	4.15 ± 0.13	180	3.18 ± 0.09	102.6	3.27 ± 0.10
220	5.41 ± 0.18	83.2	4.74 ± 0.15	220	3.36 ± 0.11	104.0	3.48 ± 0.11
260	5.49 ± 0.17	84.4	4.77 ± 0.15	260	4.12 ± 0.13	105.2	4.29 ± 0.14
300	5.22 ± 0.14	85.5	4.51 ± 0.13	300	3.60 ± 0.11	106.3	3.78 ± 0.12
340	3.40 ± 0.11	86.5	2.92 ± 0.09	340	2.63 ± 0.09	107.3	2.79 ± 0.09
380	2.45 ± 0.08	87.4	2.10 ± 0.07	380	1.54 ± 0.07	108.3	1.64 ± 0.07
420	1.89 ± 0.08	88.3	1.61 ± 0.07	420	0.90 ± 0.05	109.2	0.97 ± 0.06

$\vartheta_L = 110°$				$\vartheta_L = 130°$			
k_L	$d\sigma/d\Omega_L$	ϑ_{CM}	$d\sigma/d\Omega_{CM}$	k_L	$d\sigma/d\Omega_L$	ϑ_{CM}	$d\sigma/d\Omega_{CM}$
100	2.73 ± 0.08	118.8	3.11 ± 0.09	100	1.89 ± 0.06	137.2	2.39 ± 0.08
120	2.43 ± 0.07	119.7	2.80 ± 0.08	140	1.61 ± 0.06	138.4	2.13 ± 0.07
140	2.34 ± 0.07	120.4	2.73 ± 0.09	180	1.51 ± 0.09	139.5	2.08 ± 0.12
180	2.17 ± 0.07	121.8	2.61 ± 0.09	220	1.60 ± 0.07	140.5	2.30 ± 0.10
220	2.34 ± 0.07	123.0	2.88 ± 0.08	260	2.12 ± 0.07	141.4	3.16 ± 0.10
260	3.05 ± 0.11	124.1	3.84 ± 0.12	300	2.30 ± 0.07	142.2	3.54 ± 0.11
300	3.19 ± 0.11	125.1	4.10 ± 0.14	340	1.52 ± 0.10	142.9	2.41 ± 0.15
340	2.16 ± 0.07	126.0	2.84 ± 0.09	380	0.85 ± 0.03	143.6	1.37 ± 0.04
380	1.24 ± 0.05	126.9	1.66 ± 0.06	420	0.56 ± 0.02	144.2	0.94 ± 0.04
420	0.72 ± 0.03	127.7	0.98 ± 0.04				

Table 3

$d\sigma/d\Omega_{CM}$ [μb/ster.]			
ϑ_{CM}	$k_L = 100$ MeV	$k_L = 120$ MeV	$k_L = 140$ MeV
40	4.58 ± 0.15	4.29 ± 0.14	4.21 ± 0.13
50	4.76 ± 0.15	4.47 ± 0.14	4.24 ± 0.12
60	4.77 ± 0.15	4.47 ± 0.14	3.90 ± 0.12
70	4.70 ± 0.14	4.16 ± 0.13	4.04 ± 0.13
80	4.28 ± 0.13	4.09 ± 0.12	3.77 ± 0.11
90	4.25 ± 0.13	3.63 ± 0.11	3.47 ± 0.11
100	3.81 ± 0.11	3.54 ± 0.11	2.88 ± 0.09
110	3.31 ± 0.10	3.22 ± 0.10	2.99 ± 0.10
120	3.19 ± 0.09	2.76 ± 0.09	2.58 ± 0.08
130	2.45 ± 0.08	2.33 ± 0.08	2.13 ± 0.07
140	1.86 ± 0.05	1.93 ± 0.06	1.80 ± 0.06

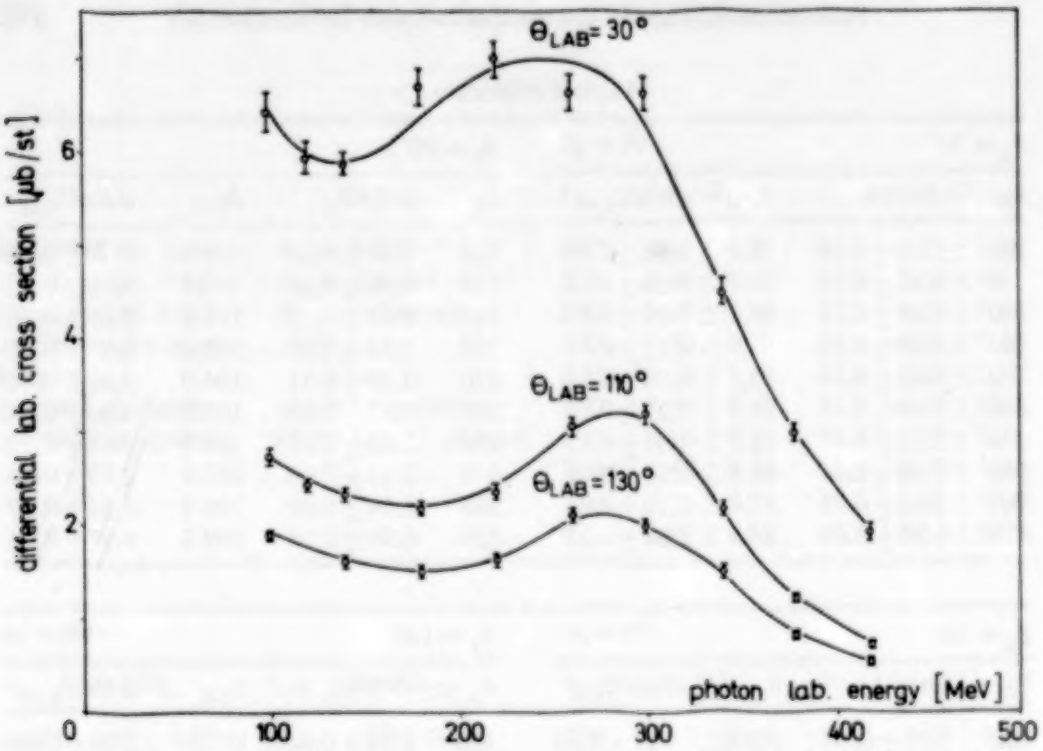


Fig. 9. Excitation curves at proton lab. angles 30°, 110°, 130°

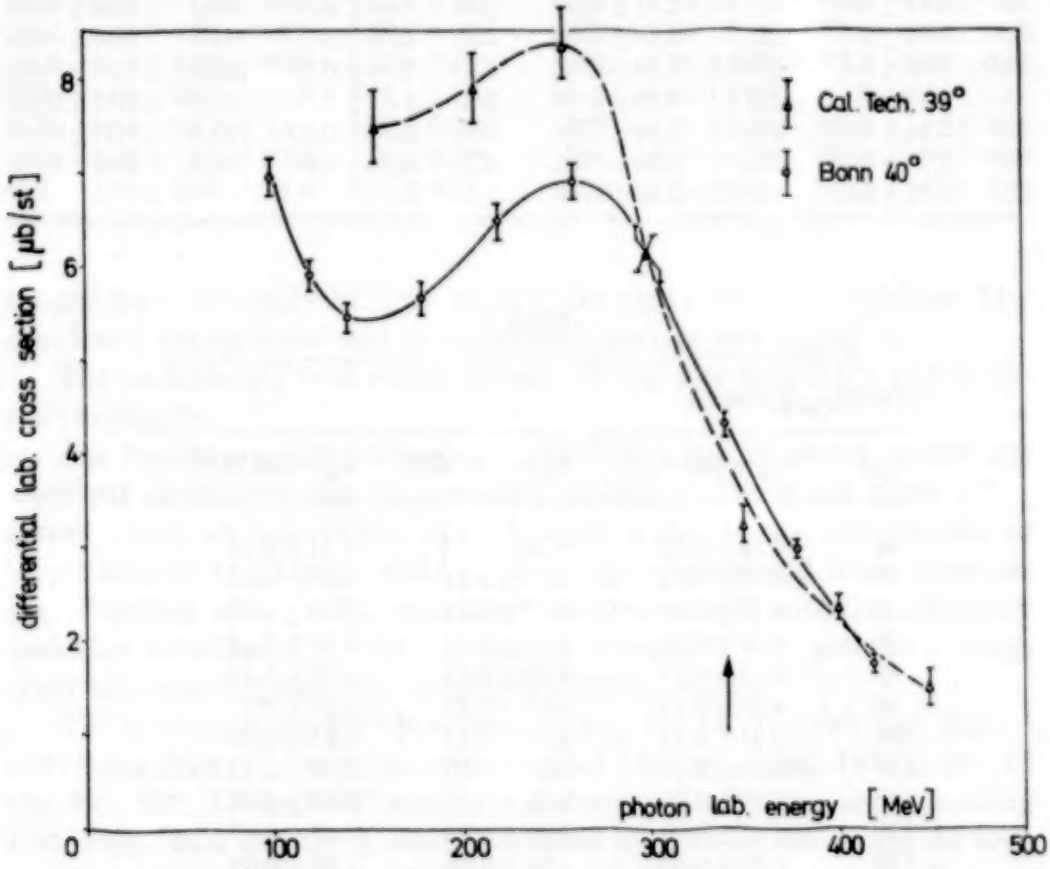


Fig. 10. Excitation curve at proton lab. angle 40°

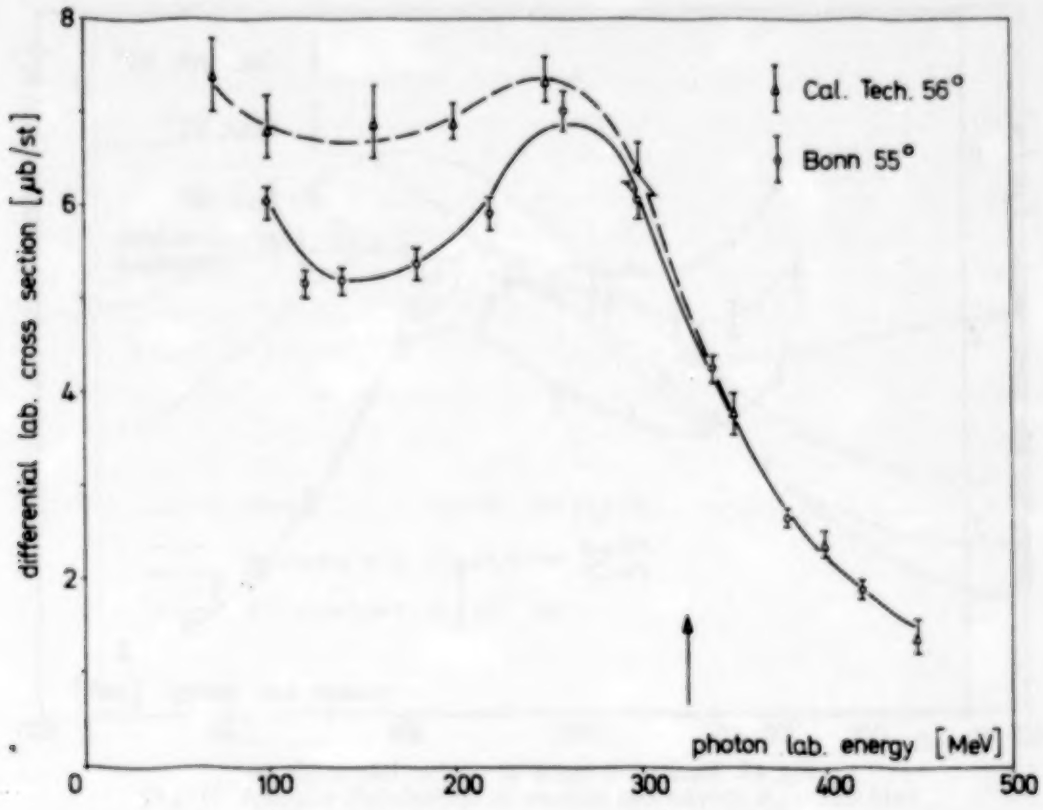


Fig. 11. Excitation curve at proton lab. angle 55°

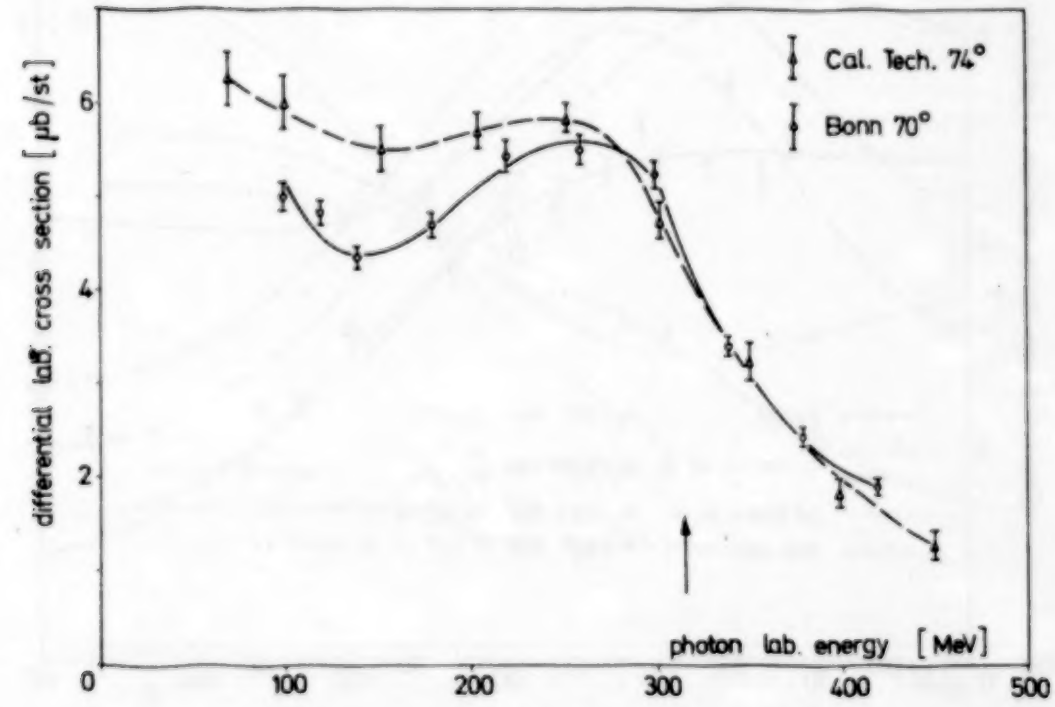


Fig. 12. Excitation curve at proton lab. angle 70°

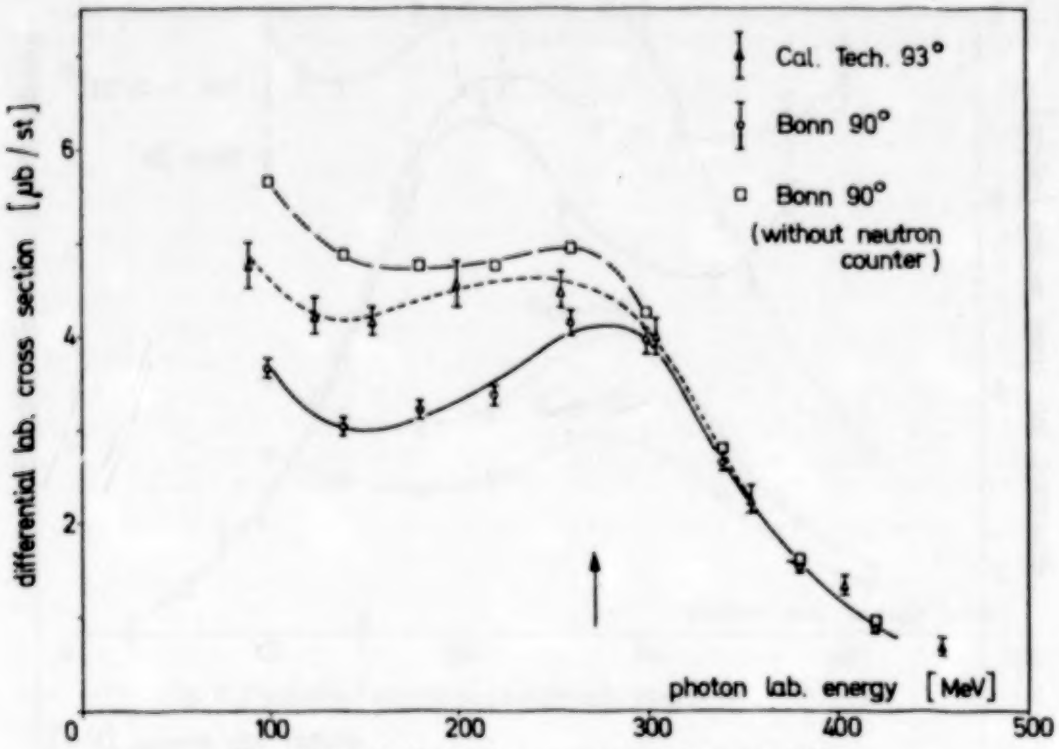


Fig. 13. Excitation curve at proton lab. angle 90°

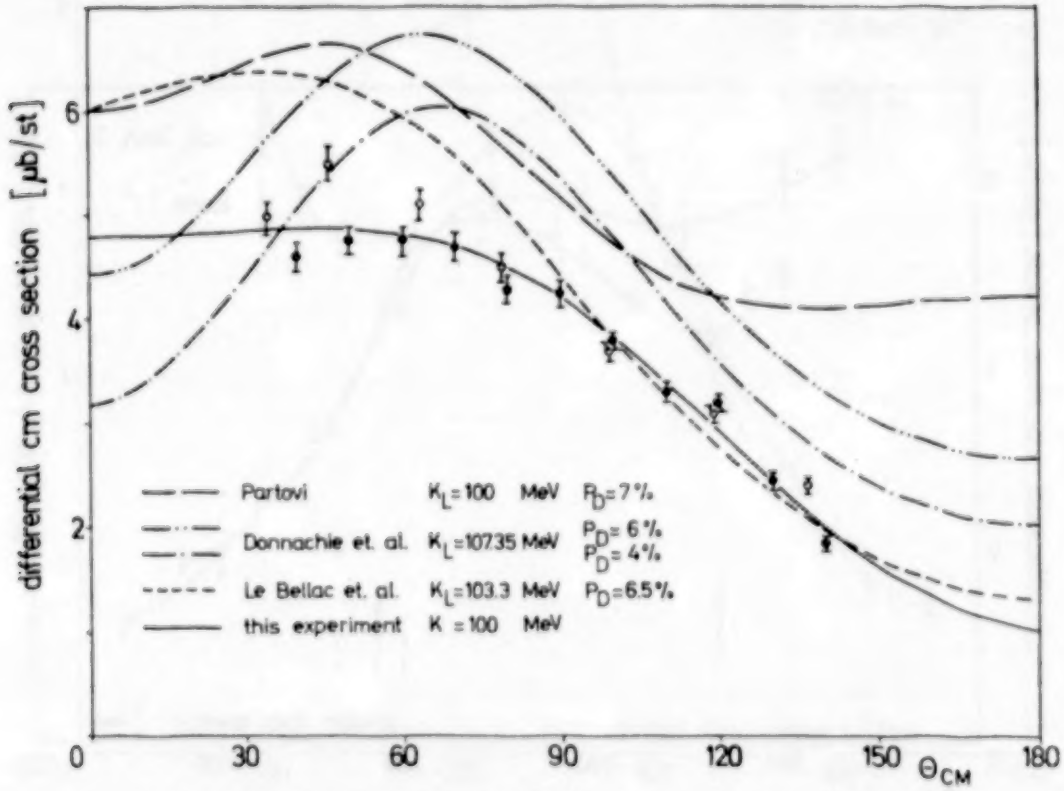


Fig. 14. Angular distribution at photon lab. energy $K_L = 100$ MeV

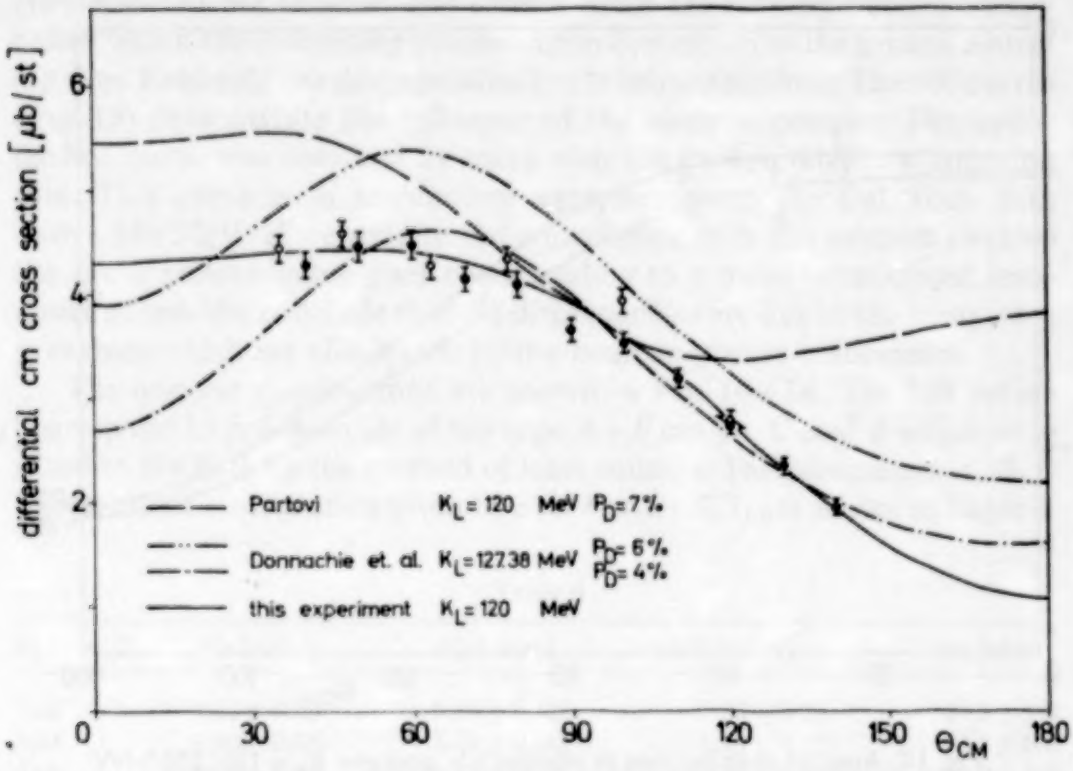


Fig. 15. Angular distribution at photon lab. energy $K_L = 120$ MeV

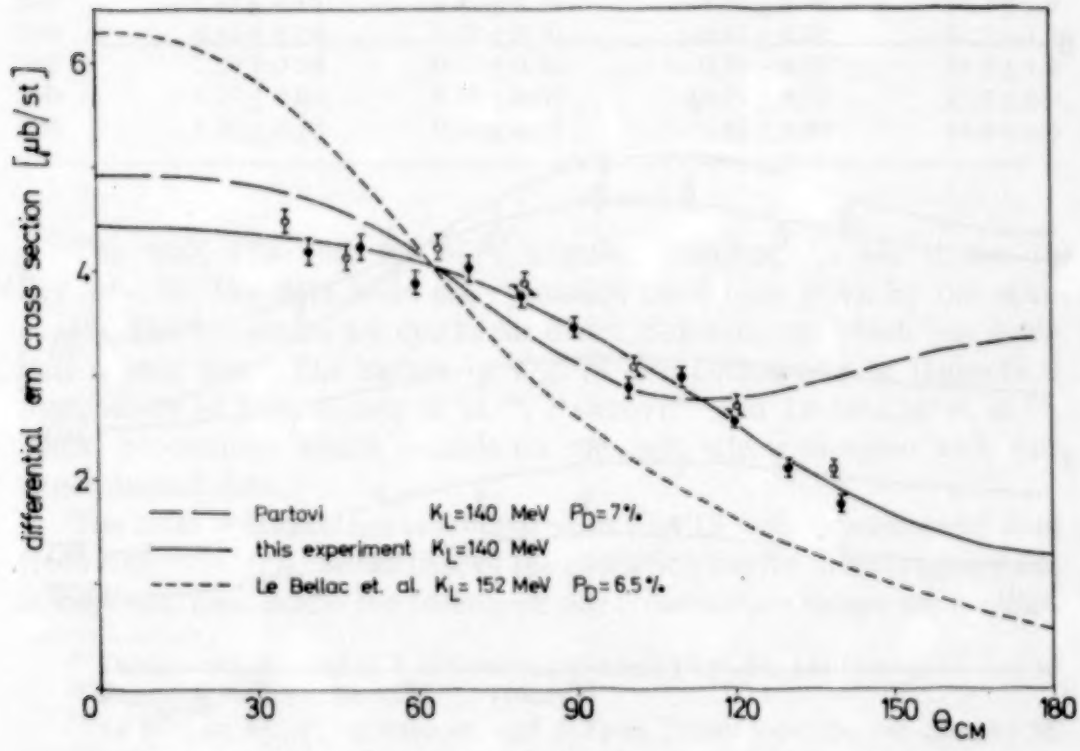


Fig. 16. Angular distribution at photon lab. energy $K_L = 140$ MeV

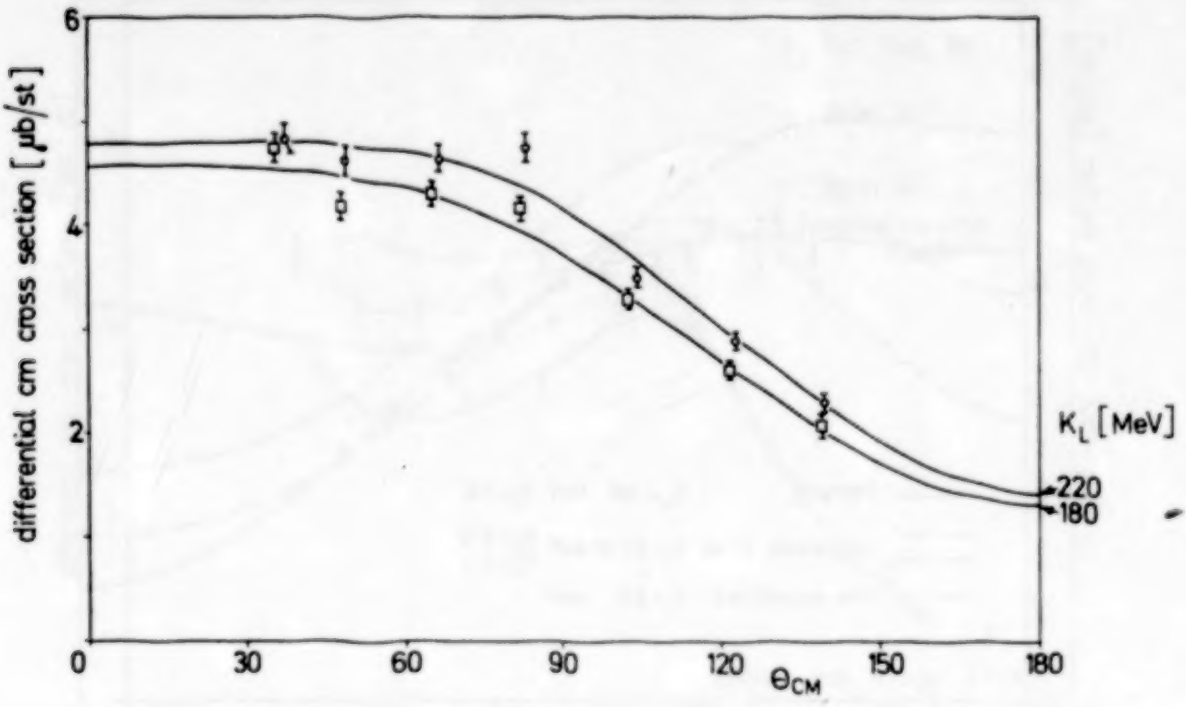


Fig. 17. Angular distributions at photon lab. energies $K_L = 180$, 220 MeV

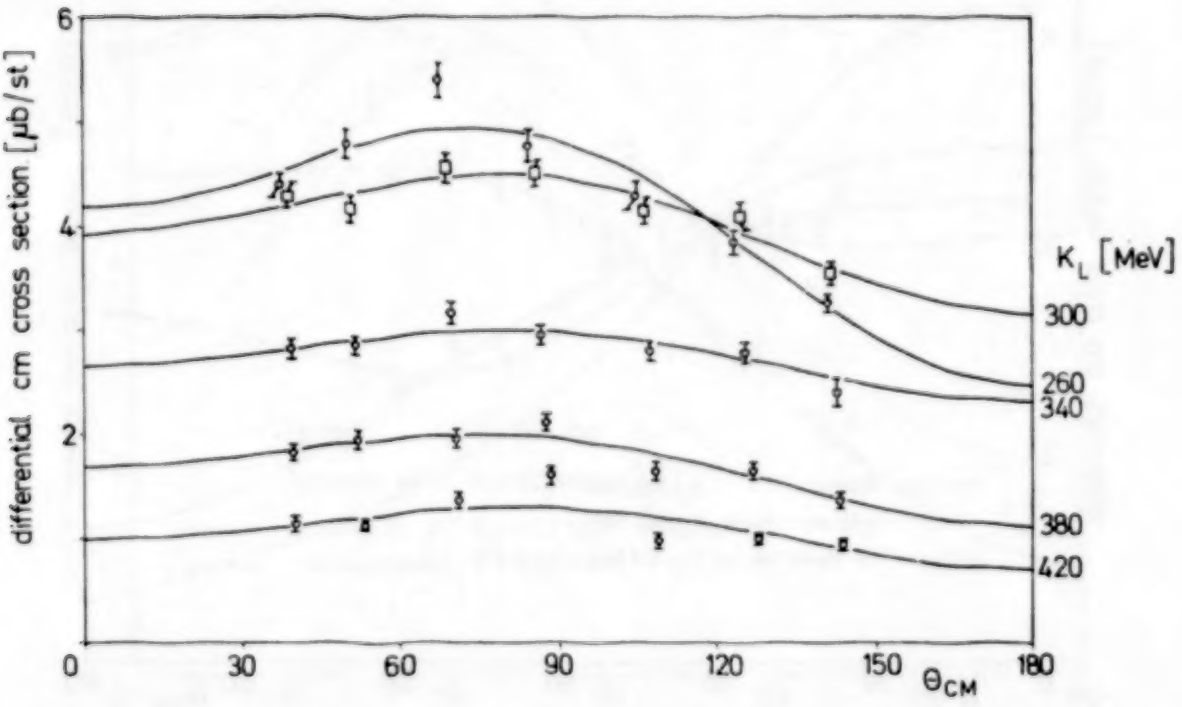


Fig. 18. Angular distributions at photon lab. energies $K_L = 260$, 300, 340, 380, 420 MeV

cross sections are smaller. The arrows mark the limiting photon energy below which the competing processes can contribute to the proton counting rate. Evidently the discrepancies begin below this limit. The 90° curves (Fig. 13) demonstrate the influence of the neutron counter. The upper dashed curve was obtained by using only the proton telescope counting rate. This curve is in satisfactory agreement with the Cal. Tech. data above 140 MeV. If we require the coincidence with the neutron counter the cross section value goes down leading to a more pronounced resonance shape. We conclude that the discrepancies are due to the competing processes which are eliminated by the neutron-proton coincidence.

The angular distributions are shown in Fig. 14–18. The full curves correspond to polynomials of the type $A + B\cos\vartheta + C\cos^2\vartheta$ which were fitted to the data by the method of least squares. The parameters A, B, C and the total cross section given by $\sigma_T = 4\pi(A + C/3)$ are shown in Table 4.

Table 4

k_L [MeV]	A [μb/ster]	B [μb/ster]	C [μb/ster]	σ_T [μb]
100	4.21 ± 0.09	1.87 ± 0.12	-1.30 ± 0.26	47.5 ± 1.4
120	3.90 ± 0.06	1.62 ± 0.06	-1.23 ± 0.15	43.8 ± 0.8
140	3.47 ± 0.07	1.57 ± 0.07	-0.61 ± 0.17	41.2 ± 0.9
180	3.73 ± 0.12	1.64 ± 0.13	-0.79 ± 0.32	43.6 ± 1.7
220	4.14 ± 0.14	$1.66 \pm 0,14$	-1.04 ± 0.36	47.6 ± 1.9
260	4.81 ± 0.15	0.87 ± 0.14	-1.50 ± 0.36	54.2 ± 1.9
300	4.46 ± 0.09	0.38 ± 0.10	-0.92 ± 0.23	52.2 ± 1.2
340	2.99 ± 0.08	0.17 ± 0.10	-0.50 ± 0.23	35.5 ± 1.2
380	1.97 ± 0.07	0.28 ± 0.07	-0.57 ± 0.17	22.3 ± 0.9
420	1.30 ± 0.13	0.14 ± 0.11	-0.45 ± 0.30	14.4 ± 1.5

The 100, 120 and 140 MeV angular distributions are shown in Fig. 14–16. The data from the excitation curves are given by the open circles. The full circles are due to the direct measurement which was made half a year later. The curves in Fig. 14–16 correspond to theoretical predictions of DONNACHIE et al.[29], PARTOVI[30] and LE BELLAC et al.[31]. These predictions which include no mesonic effects disagree with our experimental data.

The total cross section is compared in Fig. 19 with experimental data from Ref.[7, 9–11]. As in the case of the excitation curves there is agreement at high energies. Below the resonance our cross section values are smaller.

[29] DONNACHIE, A., and P. J. O'DONNEL: Nuclear Phys. **53**, 128 (1964).

[30] PARTOVI, F.: Ann. Phys. **27**, 79 (1964).

[31] LE BELLAC, M., F. M. RENARD, and J. TRAN THANH VAN: Nuovo cimento **34**, 450 (1964).

The dashed and broken curves in Fig. 19 correspond to theoretical predictions. ZACHARIASEN[32] has calculated the total cross section by a field theoretical model including mesonic reaction channels. The result explains qualitatively the resonance behavior. AUSTERN[33] has used experimental

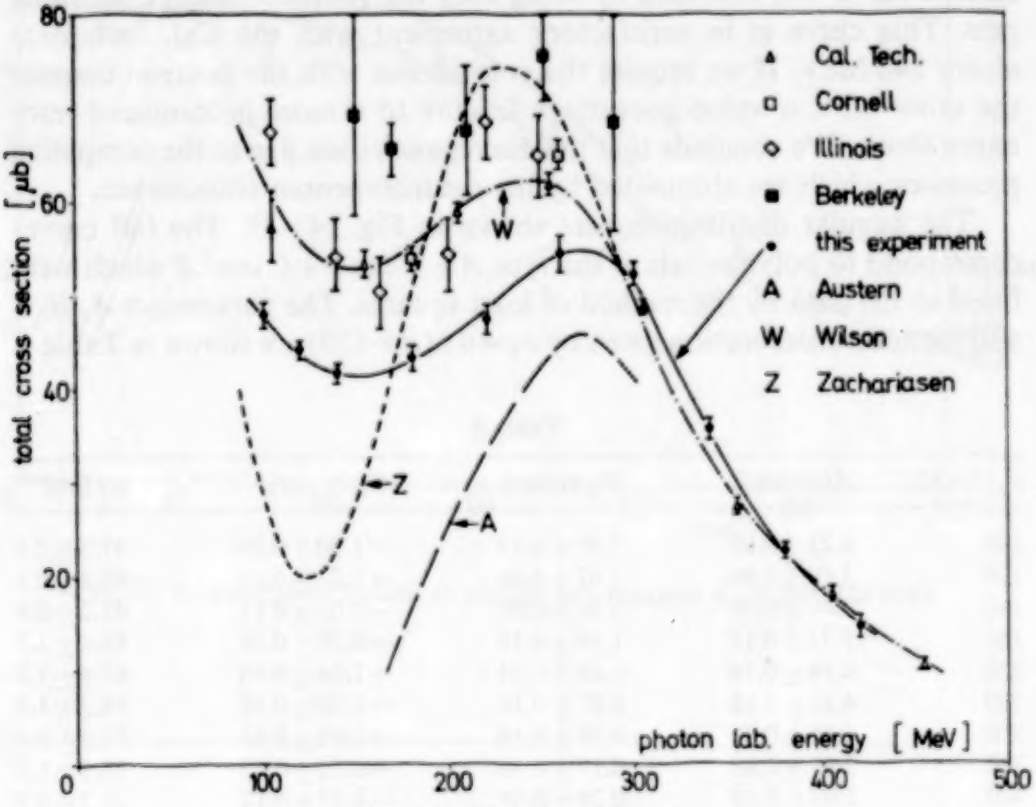


Fig. 19. Total cross section

pion photoproduction cross sections to calculate the influence of the first nucleon resonance by a phenomenological model. In addition WILSON[34] has considered the influence of the *s*-wave pion production and the normal photoelectric channel. His result gives a good fit to earlier data. However, WILSON has neglected interferences between resonant and nonresonant terms which play an important role in ZACHARIASEN's model leading to the strong dip before the resonance.

We want to thank the synchrotron crew for maintaining the mashine and equipment. In particular we want to thank P. HAAS, K. KÜFFNER and A. SCHNEIDER for their continuous assistance in running the synchrotron. The help of Frl. R. RUNKEL, U. TRINKS and H. WAHLEN in the last stage of the experiment is gratefully acknowledged. The use of the IBM 7090 computer of the "Institut für Instrumentelle Mathematik" was of great help in evaluating the data.

[32] ZACHARIASEN, F.: Phys. Rev. **101**, 371 (1956).
[33] AUSTERN, N.: Phys. Rev. **100**, 1522 (1955).
[34] WILSON, R. R.: Phys. Rev. **104**, 218 (1956).

Zeitschrift für Physik 202, 383–396 (1967)

Non-Hermitian Weak Hadronic Current and the $\Sigma \to \Lambda$ Leptonic Decay

P. HERTEL
Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg

Received February 17, 1967

It is shown that an antihermitian contribution to the isotriplet of weak hadronic strangeness-conserving currents leads to a charge asymmetry. The existence of such currents with "wrong" G-parity is neither established nor refuted by existing experimental data. A deviation of $\Gamma(\Sigma^- \to \Lambda e^- \nu)/\Gamma(\Sigma^+ \to \Lambda e^+ \nu)$ from the phase space ratio by more than ≈ 2 percent strongly suggests the presence of an antihermitian weak hadronic current, irrespective of time reversal invariance or CVC being valid or not.

1. Introduction

The existing experimental data on weak leptonic strangeness-conserving interactions of hadrons can be fitted within the well-known current × current picture. Lowest order perturbation theory starting from a Hamiltonian

$$\mathscr{H} = \frac{G}{\sqrt{2}} [(\text{hadron current})^+ \times (\text{lepton current})^- + \text{h.c.}]$$

satisfactorily describes the data where

(a) the lepton current is given by

$$l_\lambda^- = \bar{\psi}_\mu \gamma_\lambda (1+\gamma_5) \psi_{\nu_\mu} + \bar{\psi}_e \gamma_\lambda (1+\gamma_5) \psi_{\nu_e},$$

(b) the hadron current j_λ^+ and $j_\lambda^- = (j_\lambda^+)^{\text{h.c.}}$ is also a sum of a vector current plus an axial vector current.

(c) $\mathscr{H}$ is invariant under time reversal,

(d) the hadron vector current together with the isovector part of the electromagnetic current form one triplet with respect to the isospin group, and

(e) the currents j_λ^+ and j_λ^- are related to each other by reflections in isotopic spin space (charge symmetry).

In this paper we will discuss the last assumption. Although *compatible* with the existing data – possibly with exception of the *ft*-anomaly for $B^{12} \to C^{12}$ and $N^{12} \to C^{12}$ decays – it is *not established.*

Time reversal invariance for strangeness-conserving leptonic interactions of hadrons also has to be looked upon with some doubt since a violation of CP invariance has been observed in the non-leptonic $K_L^0 \to 2\pi$

decay. We will retain assumption (c), nevertheless, because too many form factors would have to be introduced if both (e) *and* (c) were dropped. Moreover, our main result (chapter 4) does not depend on the validity of invariance under time reversal.

In chapter 2 a hadronic current is postulated which does not obey (e). In chapter 3 we discuss why experiments performed so far cannot confirm or refute assumption (e). In the last chapter we discuss the leptonic decays of $\Sigma^{\pm}$ into Λ. It turns out that a measurement of the ratio $\Gamma(\Sigma^- \to \Lambda e^- \nu)/\Gamma(\Sigma^+ \to \Lambda e^+ \nu)$ is a sensitive test of property (e): any deviation from the phase space ratio by more than ≈ 2 percent indicates the presence of currents violating (e), irrespective of time reversal invariance (property (e)) or CVC (property (d)) being valid or not.

2. Non-Hermitian Weak Current

Let us consider the Hamiltonian for the leptonic strangeness-conserving weak interactions of hadrons:

$$\mathscr{H} = \frac{G}{\sqrt{2}} (j_\lambda^+ \, l_\lambda^- + \text{h.c.}).$$

$j_\lambda^+(x)$ is the hadronic current and $l_\lambda^-(x)$ the leptonic current responsible for the emission of a negatively charged lepton (e^- or μ^-) and an antineutrino:

$$l_\lambda^- = \bar{\psi}_e \gamma_\lambda (1+\gamma_5) \psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_\mu \gamma_\lambda (1+\gamma_5) \psi_{\nu_\mu}.$$

The hermitian conjugate of it is

$$l_\lambda^+ = \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_\lambda (1+\gamma_5) \psi_e + \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma_\lambda (1+\gamma_5) \psi_\mu$$

and describes the emission of positively charged leptons. We shall denote by $j_\lambda^-(x)$ the hermitian conjugate of the hadronic current $j_\lambda^+(x)$:

$$j_\lambda^-(x) = (j_\lambda^+(x))^{\text{h.c.}},$$

so that

$$\mathscr{H} = \frac{G}{\sqrt{2}} (j_\lambda^+ \, l_\lambda^- + j_\lambda^- \, l_\lambda^+)$$

is the hermitian Hamiltonian.

Overall charge conservation requires the currents $j_\lambda^{\pm}$ to change the electric charge of the hadrons by one unit:

$$\langle q' | \, j_\lambda^{\pm} \, | q \rangle = \delta_{q', q \pm 1} \langle q \pm 1 | \, j_\lambda^{\pm} \, | q \rangle .$$

Here $|q\rangle$ is a state with total electric charge q. Since we deal with strangeness-conserving weak interactions only we have

$$\Delta Q = \Delta T_3$$

(T_1, T_2, T_3 are the generators of the isospin group and Q is the electric charge operator).

Therefore*

$$[T_3, j^{\pm}] = \pm j^{\pm}$$

holds. The operator j^+ (j^-) may be decomposed into a sum of irreducible tensor operators with respect to the isospin group. Hence

$$j^+ = \sum_{T=1,2,\ldots} j^{T, T_3=+1}$$

and a similar decomposition of j^-.

T is the rank of the irreducible tensor operator. The sum runs over $T=1, 2, \ldots$ since $T_3=+1$ or -1 is impossible for $T=0$.

We will discuss such weak hadronic interactions where the $T=1$ part of the hadronic weak current is operative *only*. These cases include the $n \to p$ and the $\Sigma \to \Lambda$ transitions. We drop the label $T=1$ from now on and understand that the isovector contribution $j^{T=1}$ to the weak hadronic current has been written down in preceding formulae. Note, however, that this is *not* an assumption about the isospin properties of the weak hadronic current operator.

Let us now construct the $T_3=0$ components** f^0 associated with j^+, and g^0 associated with j^-:

$$f^0 = -\tfrac{1}{2}[T^-, j^+] \quad \text{and} \quad g^0 = +\tfrac{1}{2}[T^+, j^-]$$

such that

$$\{f^+ = -[T^+, f^0] = j^+, f^0, f^- = [T^-, f^0] \quad \}$$

and

$$\{g^+ = -[T^+, g^0] \quad , g^0, g^- = [T^-, g^0] = j^-\}$$

are *two* isospin triplets.

It is usually assumed – property (e) of chapter 1 – that f^k and g^k are equal. Let us allow for a difference between the operators f^k and g^k!

Since the Hamiltonian has to be hermitian the currents $g^- = j^-$ and $f^+ = j^+$ are hermitian conjugate to each other. Therefore:

$$(f^0)^{\text{h.c.}} = -\tfrac{1}{2}[(j^+)^{\text{h.c.}}, T^+] = -\tfrac{1}{2}[j^-, T^+] = g^0$$

holds. This fact enables us to write

$$f^0_\lambda = j^{\text{I}}_\lambda + i j^{\text{II}}_\lambda \quad \text{and} \quad g^0_\lambda = j^{\text{I}}_\lambda - i j^{\text{II}}_\lambda.$$

The neutral currents j^{I}_λ and j^{II}_λ are hermitian operators.

* We shall drop the label λ on currents j_λ if we are concerned with the structure of currents in isotropic spin space.

** It proves convenient to discuss this component, but we do not insinuate that neutral weak currents are observed in an experiment.

The splitting of f^0 and g^0 into a hermitian and an antihermitian contribution is unique if the invariance of weak leptonic interactions under time reversal (t.r.) is used.

The leptonic current has a definite behaviour,

$$l_\lambda \xrightarrow{\text{t.r.}} (l_\lambda)^{\text{t.r.}} = \sum_{\lambda'} g_{\lambda\lambda'} l_{\lambda'},$$

where $g_{\lambda\lambda'}$ is the diagonal $(+,-,-,-)$ metric tensor. The theory is invariant under time reversal if the hadronic current has the same transformation property (with a possible phase which might be defined away):

$$j_\lambda \xrightarrow{\text{t.r.}} (j_\lambda)^{\text{t.r.}} = \sum_{\lambda'} g_{\lambda\lambda'} j_{\lambda'}. \tag{1}$$

With (1) the phase of the hadronic current is defined and a unique decomposition into a hermitian and an antihermitian contribution is possible.

The current j^{II} which measures a deviation from hermiticity of the weak hadronic currents was first considered by WEINBERG[1].

The observable quantities can be expressed in terms of j^{I} and j^{II} by

$$j^+ = -[T^+, j^{\text{I}} + i j^{\text{II}}] \quad \text{and} \quad j^- = +[T^-, j^{\text{I}} - i j^{\text{II}}]$$

so that the form factors of both j_λ^{I} and j_λ^{II} can be measured, in principle.

The above considerations apply to the vector current v_λ and to the axial vector current a_λ into which the weak hadronic current $j_\lambda = v_\lambda + a_\lambda$ can be split. We have to allow for an antihermitian contribution to both:

$$v^\pm = \mp[T^\pm, v^{\text{I}} \pm i v^{\text{II}}] \quad \text{and} \quad a^\pm = \mp[T^\pm, a^{\text{I}} \pm i a^{\text{II}}]. \tag{2}$$

The CVC (conserved vector current) hypothesis[2] – property (d) of chapter 1 – states that the neutral component of the weak vector current is identical with the isovector part j_λ^{V} of the electromagnetic current operator $j_\lambda^{\text{e.m.}}$. Since j_λ^{V}, just like $j_\lambda^{\text{e.m.}}$, is a hermitian current we have to equate v_λ^{I} with j_λ^{V}, according to the CVC hypothesis.

Let us now discuss the experimental evidence against or for the presence of an antihermitian contribution to the weak hadronic strangeness-conserving current.

3. Experimental Evidence for an Antihermitian Current

The most carefully studied weak hadronic strangeness-conserving processes are

i) $\pi^\pm \to \mu^\pm (e^\pm) + \nu$,

ii) $\pi^\pm \to \pi^0 + e^\pm + \nu$,

iii) $n \to p + e^- + \nu$ and related processes, such as nuclear beta decay, muon capture etc.

---

[1] WEINBERG, S.: Phys. Rev. **112**, 1375 (1958).

[2] GERSCHTEIN, S. S., and J. B. ZELDOVICH: J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.) **29**, 698 (1958). – FEYNMAN, R. P., and M. GELL-MANN: Phys. Rev. **109**, 1963 (1958).

The strangeness-conserving leptonic decay of the $\Sigma^{\pm}$,

iv) $\Sigma^{\pm} \to \Lambda + e^{\pm} + \nu$

has been measured with much lower accuracy.

Let us investigate the effect of an antihermitian current ij_{λ}^{II} on the above processes.

(i) The leptonic decay of π *in* $\mu\nu$ *and* $e\nu$ is of interest since the ratio of decay rates $\Gamma(\pi \to e\nu)/\Gamma(\pi \to \mu\nu)$ should be determined by the masses of μ and e only. The hadronic matrix element $\langle 0|j|\pi\rangle$ is the same for both processes. As is well known, the axial vector does contribute to that matrix element only:

$$\langle 0|\ a_{\lambda}^{I}\ |\pi^0, p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} f^{I} p_{\lambda}$$

$$\langle 0|\, i\, a_{\lambda}^{II}\, |\pi^0, p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} f^{II} p_{\lambda}$$

where p_{λ} is the four momentum vector of the pion and f^{I} (f^{II}) are form factors of a_{λ}^{I} and ia_{λ}^{II} at $t = m_{\pi}^2$. It is easy to see that f^{I} and f^{II} are real if time reversal invariance holds. The measurable quantities are (Eq. (2)):

$$\langle 0|\, a_{\lambda}^{+}\, |\pi^-\rangle = \langle 0|\, -[T^{+}, a_{\lambda}^{I} + i\, a_{\lambda}^{II}]\, |\pi^-\rangle = (\ \ f^{I} + f^{II})\, p_{\lambda}$$

$$\langle 0|\, a_{\lambda}^{-}\, |\pi^+\rangle = \langle 0|\ \ \ [T^{-}, a_{\lambda}^{I} - i\, a_{\lambda}^{II}]\, |\pi^+\rangle = (-f^{I} + f^{II})\, p_{\lambda}\,.$$

Thus the decay rate of $\pi^{\pm}$ is proportional to $(\mp f^{I} + f^{II})^2$. We now use the fact that the decay rates of particle (π^+) and antiparticle (π^-) are equal – a fact which follows from the CPT theorem. Then either f^{I} or f^{II} has to vanish.

Assume $f^{II} \neq 0$. Then the operator

$$\frac{\sqrt{2}}{f^{II} m_{\pi}^2} \partial^{\lambda}\, i\, a_{\lambda}^{II}(x) = \Phi(x)$$

has the property that $\langle 0|\Phi(x)|\pi^0, p\rangle = 1$, which means that $\Phi(x)$ acts as an interpolating pion field. Asymptotically it tends towards $\Phi_{\pi^0}^{in}(x)$, the hermitian π^0 in-field. Since $\Phi(x)$ is purely antihermitian we have a contradiction. Hence $f^{II} = 0$ and $f^{I} \neq 0$.

The fact that $\langle 0|a^{I}|\pi\rangle \neq 0$ and $\langle 0|a^{II}|\pi\rangle = 0$ is usually used for the classification of the currents: a_{λ}^{I} has odd, a_{λ}^{II} has even G-parity[1]. We have seen that the CPT theorem does not allow a contribution of a_{λ}^{II} to the decay of a pion into lepton + neutrino.

(ii) The decay of a charged pion into a neutral pion + e ν is of interest as a direct test of the CVC hypothesis: the vector current is here operative only. Let us define the form factors:

$$\langle \pi^+, p' | \; v_\lambda^{\mathrm{I}} \; | \pi^+, p \rangle = g^{\mathrm{I}} (p+p')_\lambda + h^{\mathrm{I}} (p-p')_\lambda ,$$

$$\langle \pi^+, p' | \, i v_\lambda^{\mathrm{II}} | \pi^+, p \rangle = g^{\mathrm{II}} (p+p')_\lambda + h^{\mathrm{II}} (p-p')_\lambda ,$$

where p (p') are the momenta of the pions and the form factors g^{I}, g^{II}, h^{I}, and h^{II} depend on t=(momentum transfer)^2 only. Invariance under time reversal requires all four form factors to be real. We then conclude from

$$\langle \pi^+, p' | \; v_\lambda^{\mathrm{I}} \; | \pi^+, p \rangle = \langle \pi^+, p' | \; v_\lambda^{\mathrm{I}} \; | \pi^+, p \rangle^* = \langle \pi^+, p | \, (v_\lambda^{\mathrm{I}})^{\mathrm{h.c.}} \, | \pi^+, p' \rangle$$
$$= \langle \pi^+, p | \, v_\lambda^{\mathrm{I}} \, | \pi^+, p' \rangle ,$$

and

$$\langle \pi^+, p' | \, i v_\lambda^{\mathrm{II}} | \pi^+, p \rangle = \langle \pi^+, p' | \, i v_\lambda^{\mathrm{II}} | \pi^+, p \rangle^* = \langle \pi^+, p | \, (i v_\lambda^{\mathrm{II}})^{\mathrm{h.c.}} \, | \pi^+, p' \rangle$$
$$= - \langle \pi^+, p | \, i v_\lambda^{\mathrm{II}} | \pi^+, p' \rangle$$

that $h^{\mathrm{I}} = 0$ and $g^{\mathrm{II}} = 0$. Note that the current v_λ^{I} is conserved while $i v_\lambda^{\mathrm{II}}$ is not. The CVC hypothesis equates v_λ^{I} with the isovector electromagnetic current. Since the isoscalar electromagnetic current does not contribute to $\langle \pi^+ | \, j_\lambda^{\mathrm{e.m.}} | \pi^+ \rangle$ – it has odd G-parity – we find that, according to the CVC hypothesis, g^{I} is equal to the electromagnetic form factor of the pion (at zero momentum transfer $g^{\mathrm{I}} = 1$).

For the weak decays we need the current matrix elements (Eq. (2)):

$$\langle \pi^0 | \, v_\lambda^+ \, | \pi^- \rangle = \langle \pi^0 | \, - [T^+, v_\lambda^{\mathrm{I}} + i v_\lambda^{\mathrm{II}}] \, | \pi^- \rangle = \sqrt{2} \, g^{\mathrm{I}} (p+p')_\lambda + \sqrt{2} \, h^{\mathrm{II}} (p-p')_\lambda$$

and

$$\langle \pi^0 | \, v_\lambda^- \, | \pi^+ \rangle = \langle \pi^0 | \, [T^-, v_\lambda^{\mathrm{I}} - i v_\lambda^{\mathrm{II}}] \, | \pi^+ \rangle = \sqrt{2} \, g^{\mathrm{I}} (p+p')_\lambda - \sqrt{2} \, h^{\mathrm{II}} (p-p')_\lambda$$

(we have used the fact that the neutral component of an isovector has a vanishing matrix element between two π^0's).

The interference term between g^{I} and h^{II} is of opposite sign for $\pi^+ \to \pi^0$ and $\pi^- \to \pi^0$. Hence, according to the CPT theorem, either g^{I} or h^{II} has to vanish. Since $g^{\mathrm{I}}(t=0) = 1$ we conclude that h^{II} vanishes.

Just as for the axial vector we may express the fact that $\langle \pi | v_\lambda^{\mathrm{II}} | \pi \rangle = 0$ by assigning an odd G-parity to v_λ^{II} [1].

As in the previous case, a possible antihermitian contribution to the vector current cannot show up in the $\pi^\pm \to \pi^0 \, e^\pm \, \nu$ decay.

(iii) The most detailed information about strangeness-conserving leptonic interactions is available for *$n \to p$ transitions.* Let us discuss the matrix elements of weak hadronic currents between nucleons.

With

$$\mathcal{O}_\lambda^V=\gamma_\lambda, \qquad \mathcal{O}_\lambda^T=\frac{\sigma_{\lambda\lambda'}q^{\lambda'}}{2M}, \qquad \mathcal{O}_\lambda^S=\frac{q_\lambda}{2M}$$

$$\mathcal{O}_\lambda^A=\gamma_\lambda\gamma_5, \qquad \mathcal{O}_\lambda^{PT}=\frac{\sigma_{\lambda\lambda'}\gamma_5 q^{\lambda'}}{2M}, \qquad \mathcal{O}_\lambda^P=\frac{\gamma_5 q_\lambda}{2M}$$

we define

$$\langle p'|j_\lambda^{\mathrm{I}}|p\rangle=\tfrac{1}{2}\sum_\rho g_\rho^{\mathrm{I}}\,\bar{u}'\mathcal{O}_\lambda^\rho u \quad\text{and}\quad \langle p'|ij_\lambda^{\mathrm{II}}|p\rangle=\tfrac{1}{2}\sum_\rho g_\rho^{\mathrm{II}}\,\bar{u}'\mathcal{O}_\lambda^\rho u\,.$$

Here p'_λ and p_λ are the momenta of the final resp. initial proton, the momentum transfer four vector is $q_\lambda=p_\lambda-p'_\lambda$, and M is the nucleon mass. We use a metric tensor with $g_{\lambda\lambda}=(1,-1,-1,-1)$, γ_0 hermitian, $\gamma_k (k=1,2,3)$ antihermitian, $\sigma_{\lambda\lambda'}=\frac{1}{2}[\gamma_\lambda,\gamma_{\lambda'}]$ and $\gamma_5=-i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Altogether we have six form factors g^{I} and six form factors g^{II}.

Invariance under time reversal implies that all form factors are real. If we use the fact that the initial particle is the same as the final particle we conclude from

$$\langle p'|j|p\rangle^*=\langle p|(j)^{\mathrm{h.c.}}|p'\rangle$$

that the form factors associated with $\mathcal{O}_\lambda^S$ and $\mathcal{O}_\lambda^{PT}$ vanish for a hermitian current while the form factors associated with the remaining covariants vanish for an antihermitian current. We summarize these results for the nucleon form factors:

Table

j_λ	Hermitian j^{I}	Anti-hermitian ij^{II}
v_λ	g_V^{I} real	$g_V^{\mathrm{II}}=0$
	g_T^{I} real	$g_T^{\mathrm{II}}=0$
	$g_S^{\mathrm{I}}=0$	g_S^{II} real
a_λ	g_A^{I} real	$g_A^{\mathrm{II}}=0$
	$g_{PT}^{\mathrm{I}}=0$	g_{PT}^{II} real
	g_P^{I} real	$g_P^{\mathrm{II}}=0$

The measurable current matrix elements are to be taken between neutron (n) and proton (p):

$$\langle p|j^+|n\rangle=\langle p|-[T^+,j^{\mathrm{I}}+ij^{\mathrm{II}}]|n\rangle=-\langle n|j^{\mathrm{I}}+ij^{\mathrm{II}}|n\rangle+$$
$$+\langle p|j^{\mathrm{I}}+ij^{\mathrm{II}}|p\rangle=2\langle p|j^{\mathrm{I}}|p\rangle+2\langle p|ij^{\mathrm{II}}|p\rangle$$

and

$$\langle n|j^-|p\rangle=\langle n|[T^-,j^{\mathrm{I}}-ij^{\mathrm{II}}]|p\rangle=\langle p|j^{\mathrm{I}}-ij^{\mathrm{II}}|p\rangle-$$
$$-\langle n|j^{\mathrm{I}}-ij^{\mathrm{II}}|n\rangle=2\langle p|j^{\mathrm{I}}|p\rangle-2\langle p|ij^{\mathrm{II}}|p\rangle\,.$$

(We have used the relation

$$\langle p|\, j^{T=1}_{T_3=0}\,|p\rangle = \langle e^{-i\pi T_2} p|\, e^{-i\pi T_2} j^{T=1}_{T_3=0} e^{+i\pi T_2}\,|e^{-i\pi T_2} p\rangle$$

$$= -\langle n|\, j^{T=1}_{T_3=0}\,|n\rangle .)$$

Therefore

$$\langle p|\, j^{+}_{\lambda}\,|n\rangle = \sum_{\rho} \{g^{\mathrm{I}}_{\rho} + g^{\mathrm{II}}_{\rho}\}\, \bar{u}\, \mathcal{O}^{S}_{\lambda} u \quad \text{and} \quad \langle n|\, j^{-}_{\lambda}\,|p\rangle = \sum_{\rho} \{g^{\mathrm{I}}_{\rho} - g^{\mathrm{II}}_{\rho}\}\, \bar{u}\, \mathcal{O}^{\rho}_{\lambda} u\,. \quad (4)$$

The CVC hypothesis here implies that g^{I}_{V} and g^{I}_{T} are the corresponding isovector electromagnetic form factors ($g^{\mathrm{I}}_{V}(t=0)=1$; $g^{\mathrm{I}}_{T}(t=0)=\mu_p-\mu_n-1\approx 3.7$ with μ_p and μ_n the full magnetic moments of proton and neutron). Note that the form factors g^{II} enter with different sign into expressions (4).

As is well-known the detection of terms $g_S q_\lambda$ and $g_{PT}\,\sigma_{\lambda\lambda'}\,q^{\lambda'}\,\gamma_5$ is very difficult. The first term turns out to be proportional to the lepton mass – it can be found in muonic interactions only.

In fact, a careful analysis of the contributions from all possible terms shows that the data on muon capture in liquid hydrogen can be fitted with $g_S = g_{PT} = 0$ within one standard deviation[3]. If one takes the experimental number ($\Gamma = (460 \pm 42)\ \mathrm{sec}^{-1}$) to be $460\ \mathrm{sec}^{-1}$ and $g_S = 0$ then $g_{PT} = -3.8$ results (FUJII[4]).

Another possibility of detecting an antihermitian current is to compare the transition rates of mirror nuclei. If $j^{\mathrm{II}}_{\lambda}$ vanishes then the only difference between the matrix elements for mirror processes comes from interference terms between the axial vector and the vector current. The *ft*-values (which are proportional to the |transition matrix element|$^{-2}$) are nearly not influenced by these interference terms. Hence the *ft*-values for mirror processes should be equal if $j^{\mathrm{II}}_{\lambda} = 0$.

Precision measurements have been made for the mirror processes $B^{12} \to C^{12}$ and $N^{12} \to C^{12}$ with the aim of verifying the CVC hypothesis. B^{12} and N^{12}, together with the 15.11 MeV excited C^{12} * state may be considered as members of one $J^P = 1^+$ isospin triplet decaying into the $J^P = 0^+$ ground state C^{12} which has isospin zero. A rather large discrepancy between the *ft*-values has been observed[5]:

$$ft(B^{12} \to C^{12}) = (1.17 \pm 0.01) \times 10^4\ \mathrm{sec}$$

and

$$ft(N^{12} \to C^{12}) = (1.33 \pm 0.03) \times 10^4\ \mathrm{sec}$$

---

[3] KABIR, P. K.: Z. Physik **191**, 447 (1966).

[4] FUJII, A., and H. OHTSUBO: Progr. Theoret. Phys. (Kyoto) **34**, 873 (1965). – OHTSUBO, H., and A. FUJII: Nuovo cimento **42** A, 109 (1966).

[5] PETERSON, R. W., and N. W. GLASS: Phys. Rev. **130**, 292 (1963). – FISHER, T. R.: Phys. Rev. **130**, 2388 (1963). – KAVANAGH, R. W.: Phys. Rev. **133**, B 1504 (1964).

so that

$$\delta_{\text{exp}} = \frac{ft(\mathrm{N}^{12} \to \mathrm{C}^{12})}{ft(\mathrm{B}^{12} \to \mathrm{C}^{12})} - 1 \approx 13\%.$$

BLIN-STOYLE and ROSINA[6] carefully considered and estimated all corrections by "classical" effects such as Coulomb corrections, deviations from $T=1$ for B^{12} and N^{12} and from $T=0$ for C^{12}, etc. They find that at most $\delta_{\text{cl}}=7\%$ deviation may be explained this way. Other calculations with realistic nuclear wave functions yield even less[7,8]. The deviation $\delta_{\text{II}}=\delta_{\text{exp}}-\delta_{\text{cl}}$ of at least 6% may be due to an antihermitian current $i j_\lambda^{\text{II}}$ [6,9].

We readily obtain a simple expression for δ_{II} by using the formulae of BÜHRING and SCHÜLKE[10] (with our notation of the form factors):

$$1+\delta_{\text{II}} = \frac{ft(\mathrm{B}^{12} \to \mathrm{C}^{12})^{-1}_{\text{corr}}}{ft(\mathrm{N}^{12} \to \mathrm{C}^{12})^{-1}_{\text{co}}} = \frac{\left\{ g_A^{\text{I}} \int \sigma - g_{PT}^{\text{II}} \frac{W^B}{2M} \int \beta \sigma + \cdots \right\}^2}{\left\{ g_A^{\text{I}} \int \sigma + g_{PT}^{\text{II}} \frac{W^N}{2M} \int \beta \sigma + \cdots \right\}^2}$$

where W^B (W^N) is the maximum total energy of the emitted electron (positron) and the suffix "corr." means "corrected on classical effects". We assume $\int \sigma \approx \int \beta \sigma$ which is a good approximation in simple nuclear models. Thus we obtain

$$\delta_{\text{II}} = -0.033 \frac{g_{PT}^{\text{II}}}{g_A^{\text{I}}}.$$

The dimensionless quantity g_{PT}^{II} (≈ -2 with the value $\delta_{\text{II}}=6\%$) should be compared with its vector analogue, the isovector anomalous magnetic moment $g_T^{\text{I}}=3.7$. Note that sign and order of magnitude of g_{PT}^{I} agree with the value of FUJII et al.[4].

Let us summarize: We have seen that there is some, although not convincing, evidence for the presence of a real g_{PT}^{II}. An antihermitian current $i j_\lambda^{\text{II}}$ cannot show up in the weak leptonic decays of pions and is suppressed for kinematical reasons (low momentum transfer in $p \to n$ transitions) in beta decay. Although the existing data (with the possible exception of the $\mathrm{B}^{12}-\mathrm{N}^{12}$ ft-anomaly) can be fitted without j_λ^{II} they do not speak against its presence.

In the last chapter we shall investigate the $\Sigma \to \Lambda$ leptonic decay since the contribution of j_λ^{II} to the decay rate will be favoured with respect to nucleon transitions by the much higher momentum transfer available.

---

[6] BLIN-STOYLE, R. J., and M. ROSINA: Nuclear Phys. **70**, 321 (1965).

[7] MAFETHE, M. E., and P. E. HODGSON: Proc. Phys. Soc. (London) **87**, Part 2, 429 (1966).

[8] EICHLER, J., T. A. TOMBRELLO, and J. H. BAHCALL: Phys. Letters **13**, 146 (1964), however, succeed in explaining a larger difference by Coulomb forces.

[9] HUFFAKER, J. N., and E. GREULING: Phys. Rev. **132**, 738 (1963).

[10] BÜHRING, W., and L. SCHÜLKE: Nuclear Phys. **65**, 369 (1965).

4. The $\Sigma^{\pm} \to \Lambda$ Decay

The $\Sigma^{\pm} \to \Lambda e^{\pm} \nu$ decay will proceed via the isovector weak hadronic current only so that all considerations of chapter 2 are applicable. We replace $2M$ by $M_\Sigma + M_\Lambda$ in Eq. (3) and define with these covariants

$$\langle \Lambda | j_\lambda^{\mathrm{I}} | \Sigma^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}(\Lambda) \sum_\rho g_\rho^{\mathrm{I}} \mathcal{O}_\lambda^\rho u(\Sigma),$$

$$\langle \Lambda | i j_\lambda^{\mathrm{II}} | \Sigma^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}(\Lambda) \sum_\rho g_\rho^{\mathrm{II}} \mathcal{O}_\lambda^\rho u(\Sigma)$$

twelf form factors.

Time reversal invariance again requires all these form factors to be real. However, the considerations (leading to a reduction in the number of non-vanishing formfactors) of chapter 3, iii) are no longer applicable since the mother baryon is a different particle than the daughter baryon. The equation

$$\langle \Lambda | j | \Sigma \rangle^* = \langle \Sigma | j^{\mathrm{h.c.}} | \Lambda \rangle$$

gives no relations between form factors if we do not go beyond isospin symmetry. Within the $SU(3)$ scheme the Σ and the Λ are to be considered as essentially the *same* particle since they are members of the same $SU(3)$ multiplet. The table of chapter 3 is then valid for the $\Sigma \to \Lambda$ transitions as well with the following changes: the statement "$g=0$" has to be replaced by "g is of the order of $SU(3)$ breaking effects".

The observable matrix elements are:

$$\begin{aligned}\langle \Lambda | j^+ | \Sigma^- \rangle &= \langle \Lambda | -[T^+, j^{\mathrm{I}} + i j^{\mathrm{II}}] | \Sigma^- \rangle \\ &= \sqrt{2} \langle \Lambda | j^{\mathrm{I}} | \Sigma^0 \rangle + \sqrt{2} \langle \Lambda | i j^{\mathrm{II}} | \Sigma^0 \rangle = \bar{u}(\Lambda) \sum_\rho (g_\rho^{\mathrm{I}} + g_\rho^{\mathrm{II}}) \mathcal{O}^\rho u(\Sigma);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \Lambda | j^- | \Sigma^+ \rangle &= \langle \Lambda | [T^-, j^{\mathrm{I}} - i j^{\mathrm{II}}] | \Sigma^+ \rangle \\ &= -\sqrt{2} \langle \Lambda | j^{\mathrm{I}} | \Sigma^0 \rangle + \sqrt{2} \langle \Lambda | i j^{\mathrm{II}} | \Sigma^0 \rangle = \bar{u}(\Lambda) \sum_\rho (-g_\rho^{\mathrm{I}} + g_\rho^{\mathrm{II}}) \mathcal{O}^\rho u(\Sigma).\end{aligned}$$

What are the consequences of the CVC hypothesis? Since the isoscalar electromagnetic current does not contribute to the electromagnetic $\Sigma^0 \to \Lambda$ transition we have

$$\langle \Lambda | v_\lambda^{\mathrm{I}} | \Sigma^0 \rangle = \langle \Lambda | j_\lambda^{\mathrm{e.m.}} | \Sigma^0 \rangle.$$

From the conservation of $j_\lambda^{\mathrm{e.m.}}$, $\partial^\lambda j_\lambda^{\mathrm{e.m.}}(x) = 0$, we learn that the electromagnetic form factors F_V and F_S of the covariant decomposition

$$\langle \Lambda | j_\lambda^{\mathrm{e.m.}} | \Sigma^0 \rangle = \bar{u}(\Lambda) \sum_{\rho = V, T, S} F_\rho \mathcal{O}_\lambda^\rho u(\Sigma^0)$$

are related by

$$F_V = q^2 F_V' \quad \text{and} \quad F_S = (-M_\Sigma^2 + M_\Lambda^2) F_V'.$$

$F_V'(t)$ is the analogue of $\frac{R_e^2}{6}$ with R_e the electric radius, and F_T is the transition magnetic moment. Note that $F_T(0)$ alone is responsible for the radiative decay $\Sigma^0 \to \Lambda\,\gamma$:

$$\Gamma(\Sigma^0 \to \Lambda\,\gamma) = \frac{e^2}{4\pi}\,\frac{4F_T^2(0)\,\omega^3}{(M_\Sigma + M_\Lambda)^2}$$

(with ω the photon energy).

Hence, from CVC, we see that $g_V^1 = q^2\sqrt{2}\,F_V'$ is very small – the maximum (momentum transfer)^2 is about $m_\pi^2/4$ only – whereas $g_T^1 = \sqrt{2}\,F_T$ is directly related with the radiative decay of Σ^0. At present it is unlikely that deviations from the Fermi spectrum can be measured in the $\Sigma^\pm \to \Lambda$ decay. Let us therefore calculate the effect of the different formfactors on the transition rates only.

The transition rate for Σ (at rest) into Λ is bilinear in the form factors. We neglect the dependence of the formfactors on momentum transfer since we are not interested in the shape of the spectrum and write

$$\Gamma = G^2\,\frac{30}{\pi^3}\,f(W)\sum_{\rho\,\tau} g_\rho\,g_\tau^*\,S^{\rho,\tau}.$$

ρ and τ run over V, T, S, A, PT, and P.

$$W = \frac{M_\Sigma^2 - M_\Lambda^2 + \mu^2}{2M_\Sigma}$$

is the maximum electron energy $E_{\max}$ ($W_+ = 71.60 \pm 0.13$ MeV for Σ^+ decay and $W_- = 78.91 \pm 0.17$ MeV for Σ^- decay[11]). The phase space is

$$f(W) = \int_\mu^W dE\,\sqrt{E^2-\mu^2}\,E(W-E)^2 \approx \frac{W^5}{30}$$

for large W/μ.

The $S^{\rho,\tau}$ are defined by

$$f(W)\,S^{\rho,\tau} = \frac{W^5}{30}\int \frac{dE}{W}\,\frac{dt}{W^2}\,\frac{\sum_{\text{spins}} \{\bar u(\Lambda)\,\mathcal{O}_\lambda^\rho\,u(\Sigma)\,l_\lambda^-\}\,\{\bar u(\Lambda)\,\mathcal{O}_\mu^\tau\,u(\Sigma)\,l_\mu^-\}^*}{2^8\,M_\Sigma^2\,W^2}.$$

This definition (with the lepton current l_λ^-) applies to e^- emission. The $S^{\rho,\tau}$ for e^+ emission are the same except for a minus sign whenever $\mathcal{O}_\lambda^\rho$ and $\mathcal{O}_\lambda^\tau$ have different parities. We expand some $S^{\rho,\tau}$ in powers of

$$\varepsilon = \frac{W}{M_\Sigma} \approx 0.063$$

[11] Rosenfeld, H. A. et. al.: UCRL-8030 (rev.) August 1966.

and retain the highest power only:

$$\begin{aligned} &S^{V,V}=1, \quad S^{A,A}=3 \\ &S^{A,PT}=S^{PT,A}=-\varepsilon \\ &S^{V,T}=S^{T,V}=\varepsilon^2 \\ &S^{V,A}=S^{A,V}=S^{T,A}=S^{A,T}=\pm\tfrac{4}{7}\varepsilon^3. \end{aligned} \tag{5}$$

The upper (lower) sign in the last line refers to e^- (e^+) emission. We are now ready to write down expressions for the decay rates.

Let us begin with the assumption that CVC holds and that no anti-hermitian current is present.

Then $g_V^1 \approx 0$ and all $g_\rho^{II}=0$. The matrix elements for $\Sigma^+ \to \Lambda$ and $\Sigma^- \to \Lambda$ leptonic decays are nearly equal and proportional to $(g_A^1)^2\, S^{A,A}$. The only difference is due to interference terms between the axial and the vector current. Of these $S^{A,T}$ makes the biggest contribution since $g_V^1=0$.

The ratio of $\Gamma(\Sigma \to \Lambda\, e^-\, \nu)$ to $\Gamma(\Sigma^+ \to \Lambda\, e^+\, \nu)$ is given by

$$\frac{\Gamma(\Sigma^- \to \Lambda\, e^-\, \nu)}{\Gamma(\Sigma^+ \to \Lambda\, e^+\, \nu)} = R\,\frac{f(W_-)}{f(W_+)}$$

where R deviates but little from one. The phase space ratio $f(W_-)/f(W_+)$ may be easily figured out if we approximate $f(W)$ by $W^5/30$, for this purpose:

$$\frac{f(W_-)}{f(W_+)} = 1.626 \pm 0.023\,.$$

For R we obtain (with CVC and hermitian currents only)

$$\begin{aligned} R &= \frac{(-g_A^1)^2\, S^{A,A} + (-g_A^1)(-\sqrt{2}\,F_T)\{S^{A,T}+S^{T,A}\}+\cdots}{(+g_A^1)^2\, S^{A,A} + (+g_A^1)(+\sqrt{2}\,F_T)\{-S^{A,T}-S^{T,A}\}+\cdots} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}\,\dfrac{F_T}{g_A^1}\,\dfrac{8}{21}\,\varepsilon^3}{1-\sqrt{2}\,\dfrac{F_T}{g_A^1}\,\dfrac{8}{21}\,\varepsilon^3}. \end{aligned}$$

Terms indicated by dots, such as $S^{A,PT}$ etc., are small compared with $S^{A,A}$ – see Eq. (5) – and contribute with the same sign. By $SU(3)$ symmetry the ratio of the magnetic moment F_T to the axial vector coupling constant g_A^1 is $\sqrt{2}\,F_T/g_A^1 \approx 5$ [12], hence $R=1.001$.

It is easy to see that CVC is not essential for this conclusion. Even if a substantial g_V^1 were present – this means that v^1 is not conserved – we

[12] BRENE, N., B., HELLESEN and M. ROOS: Phys. Letters **11**, 344 (1964).

have an additional deviation of R from unity of the same order of magnitude (produced by $S^{A,V}$) only.

We conclude that the deviation of R from 1 – with or without CVC, and even if the $SU(3)$ ratio of coupling constants were incorrect by as much as one order of magnitude – is smaller than the experimental error in the phase space ratio (approximately 2 percent). Hence, any measured deviation of R from 1 by more than the phase space inaccuracy has to be explained by an effect which most likely will be the presence of an antihermitian current.

This effect cannot be a violation of time reversal invariance. Without time reversal invariance we would have complex form factors g^{I} which – apart from a common minus sign – are equal for the $\langle \Lambda | j^- | \Sigma^+ \rangle$ and $\langle \Lambda | j^+ | \Sigma^- \rangle$ currents. Also isospin impurities in Σ and Λ are expected to be of order $e^2/4\pi = 1/137$ and may not explain a noticable deviation of R from 1.

Let us now investigate the effect of an antihermitian current on the phase space correction R.

We shall assume CVC to hold for v_λ^{I} so that $g_V^{\mathrm{I}} = 0$. By $SU(3)$ the form factors g_V^{II} and g_T^{II} are supposedly suppressed (see the Table and the remark on page 392), whereas g_S^{II} does not contribute (its effect is proportional to the electron mass only). Hence the interference between v_λ^{I} and v_λ^{II} will be very small.

An interference between a_λ^{I} and a_λ^{II}, however, will produce a noticable deviation of R from 1.

If g_A^{II} is strongly suppressed by $SU(3)$ – see the table – the interference $S^{A,PT}$ will be the most important term. We obtain:

$$R = \frac{(-g_A^{\mathrm{I}})^2 S^{A,A} + (-g_A^{\mathrm{I}})(+g_{PT}^{\mathrm{II}})\{S^{A,PT} + S^{PT,A}\}}{(+g_A^{\mathrm{I}})^2 S^{A,A} + (+g_A^{\mathrm{I}})(+g_{PT}^{\mathrm{II}})\{S^{A,PT} + S^{PT,A}\}} = \frac{1 + \dfrac{g_{PT}^{\mathrm{II}}}{g_A^{\mathrm{I}}} \dfrac{2}{3} \varepsilon}{1 - \dfrac{g_{PT}^{\mathrm{II}}}{g_A^{\mathrm{I}}} \dfrac{2}{3} \varepsilon}.$$

Let us estimate this effect by choosing $|g_{PT}^{\mathrm{II}}/g_A^{\mathrm{I}}| = 2$, a value close to that one obtained from the *ft*-anomaly discussed in 3 (iii). We again emphasize that this value is doubtful since it is based on the calculation of wave function distortions caused by the Coulomb forces. Moreover, our choice can be good for an order-of-magnitude calculation only since $SU(3)$ does not allow to calculate $\langle \Lambda | i a^{\mathrm{II}} | \Sigma \rangle$ – *pure d*-coupling – from $\langle N | i a^{\mathrm{II}} | N \rangle$ – *f- and d*-coupling – alone. With these reservations we obtain a deviation of R from 1 of about ± 15 percent.

Let us just mention that almost any value for R is to be expected if an antihermitian current a_λ^{II} exists and if g_A^{II} is not strongly suppressed

by $SU(3)$ symmetry. Then

$$R=\left\{\frac{1-\frac{g_A^{II}}{g_A^{I}}}{1+\frac{g_A^{II}}{g_A^{I}}}\right\}^2.$$

For g_A^{II} only one fifth of g_A^{I} we already obtain $R=0.44$ – a very big deviation from unity indeed.

The R-value from the CERN-Maryland cooperation experiment[13] is $R=0.7^{+0.6}_{-0.25}$. The large uncertainties do not allow any conclusion as to the existence or otherwise of an antihermitian current.

We have demonstrated in chapter 3 that the known data on strangeness-conserving leptonic interactions of hadrons cannot or do not provide sufficient information which rules out or confirmes the existence of an antihermitian current. In this chapter we have shown that the ratio $\Gamma(\Sigma^- \to \Lambda e^- \nu)/\Gamma(\Sigma^+ \to \Lambda e^+ \nu)$ is rather sensitive to the presence of such a current: 10 percent or more deviation from the phase space ratio are to be expected.

A sufficiently accurate measurement of the above ratio is therefore highly desirable.

I am indebted to Prof. V. SOERGEL for pointing out the subject of this investigation. Thanks are also due to Prof. B. STECH for stimulating discussions and critically reading the manuscript.

[13] COURANT, H., et. al.: Phys. Rev. **136**, B 1791 (1964).

Zeitschrift für Physik 202, 397–400 (1967)

Analysis of the $\pi^{\pm} p$ Polarization Data at High Energies

G. Höhler and G. Eisenbeiss
Institut für Theoretische Kernphysik
der Technischen Hochschule Karlsruhe/Germany

Received February 21, 1967

The results of a phenomenological analysis are compared with the Regge model.

Using the experimental data[1] for the elastic $\pi^{\pm} p$ differential cross sections $d\sigma_{\pm}/d\Omega \equiv \sigma_{\pm}$ and for the polarization parameters[2] $P_{\pm}$ we have calculated

$$\sigma_+ P_+ + \sigma_- P_- = 4\,\mathrm{Im}(f^{(+)} g^{(+)*} + f^{(-)} g^{(-)*}), \tag{1}$$

$$\sigma_+ P_+ - \sigma_- P_- = -4\,\mathrm{Im}(f^{(+)} g^{(-)*} + f^{(-)} g^{(+)*}) \tag{2}$$

where the quantities on the right hand side are the isospin even and odd combinations of the spin no-flip and flip amplitudes $f_{\pm}, g_{\pm}$ for elastic $\pi^{\pm} p$ scattering

$$f_{\pm} = f^{(+)} \mp f^{(-)}, \qquad g_{\pm} = g^{(+)} \mp g^{(-)}, \tag{3}$$

$$\sigma_{\pm} = |f_{\pm}|^2 + |g_{\pm}|^2, \quad \sigma_{\pm} P_{\pm} = 2\,\mathrm{Im}(f_{\pm} g_{\pm}^*). \tag{4}$$

In Eq. (1) the last term is known from the charge exchange data[3]

$$\sigma_0 P_0 = 2\,\mathrm{Im}(f_0 g_0^*) = 4\,\mathrm{Im}(f^{(-)} g^{(-)*}) \tag{5}$$

and turns out to be negligible. Dividing both sides of Eq. (1) by

$$4\,|f^{(+)}| \approx \sqrt{8(\sigma_+ + \sigma_-)}$$

we obtain $|g^{(+)}| \sin\varphi$, where $\varphi = \arg f^{(+)} - \arg g^{(+)}$ is the angle between the complex vectors $f^{(+)}$ and $g^{(+)}$.

---

[1] Foley, K. J., S. J. Lindenbaum, W. A. Love, S. Ozaki, J. J. Russel, and L. C. L. Yuan: Phys. Rev. Letters **11**, 425 (1963). – Harting, D., P. Blackall, B. Elsner, A. C. Helmholz, W. C. Middelkoop, B. Powell, B. Zacharov, P. Zanella, P. Dalpiaz, M. N. Focacci, S. Focardi, G. Giacomelli, L. Monari, J. A. Beaney, R. A. Donald, P. Mason, L. W. Jones, and D. O. Caldwell: Nuovo cimento **38**, 60 (1965).

[2] Borghini, M., G. Coignet, L. Dick, K. Kuroda, L. di Lella, P. C. Macq, A. Michalowicz, and J. C. Olivier: Phys. Letters **24B**, 77 (1967).

[3] Bonamy, P., P. Borgeaud, C. Bruneton, P. Falk-Vairant, O. Guisan, P. Sonderegger, C. Caverzasio, J. P. Guillaud, J. Schneider, M. Yvert, I. Mannelli, F. Sergiampietri, and L. Vincelli: Phys. Letters **23**, 501 (1966).

For $\sigma_\pm$ we have used an empirical fit which essentially agrees with the fit of FOLEY et al.[1]

$$\sigma_\pm(t)=\sigma_\pm(0)\exp(b_\pm t+c_\pm t^2),$$
$$b_+=8.7\,(\mathrm{GeV/c})^{-2},\quad c_+=2.2\,(\mathrm{GeV/c})^{-4},\qquad (6)$$
$$b_-=9.4\,(\mathrm{GeV/c})^{-2},\quad c_-=2.7\,(\mathrm{GeV/c})^{-4}.$$

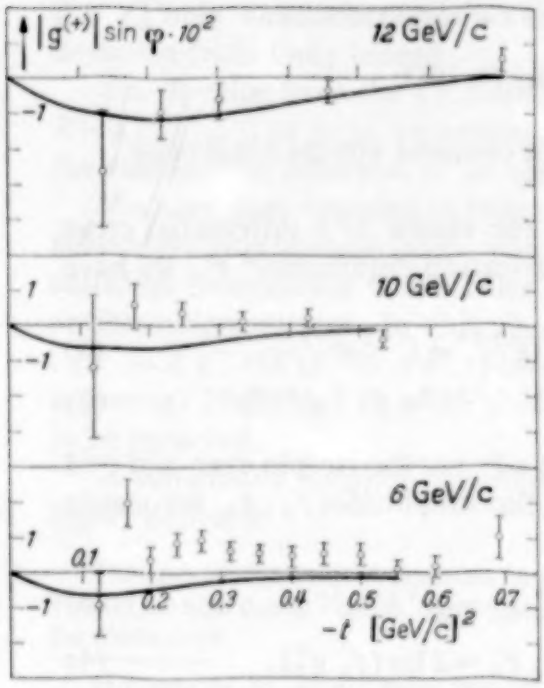


Fig. 1. $|g^{(+)}|\sin\varphi$ as a function of t. Solid line: prediction of the P, P'-exchange Regge model. The units used for the ordinates in both figures are natural units ($\hbar=c=m_\pi=1$)

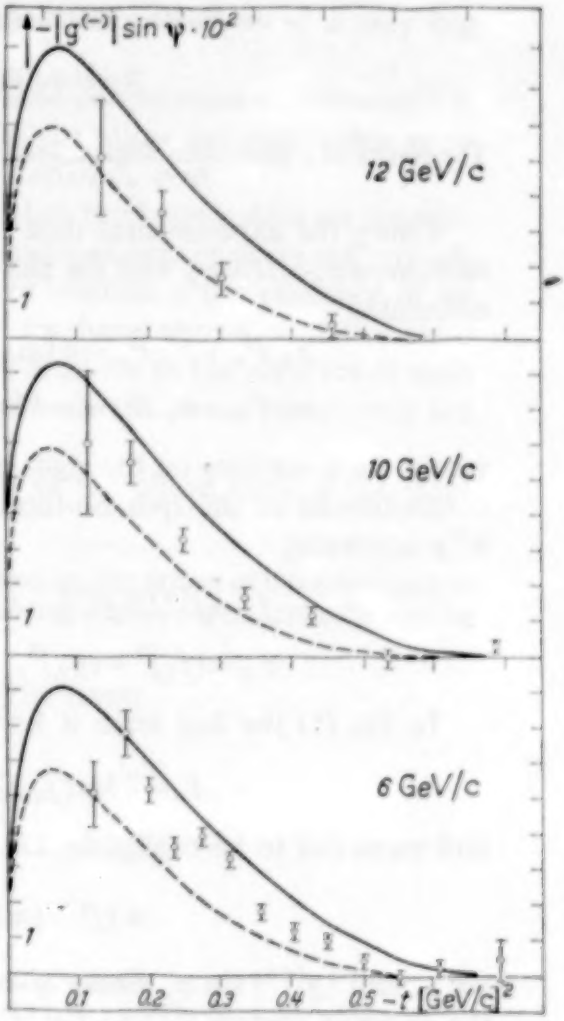


Fig. 2. $-|g^{(-)}|\sin\psi$ as a function of t. Solid line: $|g^{(-)}|$, dashed line: $-\mathrm{Re}\,g^{(-)}$, in both cases $g^{(-)}$ was taken from the analysis of the $\pi^- p\to\pi^0 n$ angular distributions

Fig. 2

$\sigma_\pm(0)$ was calculated from the optical theorem, adding a correction for the contribution of $\mathrm{Re}\,f_\pm(0)$ which was calculated from the forward disperson relation[4]. If we had used the fit of HARTING et al.[1], $|f^{(+)}|$ would have been larger by about 5%.

At 6 GeV/c $|g^{(+)}|\sin\varphi$ is clearly positive (Fig. 1) and $\mathrm{Re}\,g^{(+)}>0$, since $\mathrm{Re}\,f^{(+)}$ is small in comparison with $\mathrm{Im}\,f^{(+)}$. At 10 GeV/c $|g^{(+)}|\times\sin\varphi$ is practically zero and at 12 GeV/c it seems to be negative.

[4] STRAUSS, R. (Karlsruhe): Private communication.

In order to compare this result with the Regge model, we have also plotted the prediction following from the work of CHIU et al.[5] (solution a). The disagreement at 6 GeV/c is not serious since the authors have pointed out that some of the P and P' parameters have not been well determined. The parameters could be changed in such a way that the 6 GeV/c data in Fig. 1 are fitted. But this version of the Regge model (P and P' exchange) cannot describe an energy dependence at fixed t which leads from positive to negative values. Therefore it would be very important to continue the $\pi^{\pm} p$ polarization measurements to higher energies in order to find out, whether negative values of $\sigma_+ P_+ + \sigma_- P_-$ can be established beyond doubt.

In the case of Eq. (2) we plot again the left hand side, divided by $4|f^{(+)}|$ (Fig. 2). It seems reasonable to neglect $f^{(-)} g^{(+)*}$, since $|f^{(+)}|$ is much larger than $|f^{(-)}|$ and $|g^{(+)}|$. Then the ordinate in Fig. 2 is equal to $-|g^{(-)}| \sin \psi$, $\psi = \arg f^{(+)} - \arg g^{(-)}$. Since $g^{(-)}$ is known from our analysis of the charge exchange data[6], $\mathrm{Re}\, f^{(+)}$ can be determined from each of the experimental points in Fig. 2. It turns out that in general $\mathrm{Re}\, f^{(+)} < 0$ as it was already found at $t=0$ in the Coulomb interference experiment[7] and in the dispersion relation calculations[8]. The dashed curves correspond to $\mathrm{Re}\, f^{(+)} \equiv 0$, the solid curves to $\psi = \pi/2$.

It is important to notice that all experimental points in Fig. 2 are lying *below* the solid curves and that they tend to zero near $t = -0.5$ (GeV/c)^2. This supports our assumptions, namely the earlier result for $g^{(-)}$ and the neglect of $f^{(-)} g^{(+)*}$.

The same argument could also be used in the opposite direction. Since it would be difficult to have $f^{(-)} g^{(+)*}$ comparable with $f^{(+)} g^{(-)*}$, $|g^{(-)}|$ cannot be appreciably smaller than the ordinates of the experimental points in Fig. 2. In this way one obtains a condition for the decomposition of the charge exchange differential cross sections into a spin flip and a no flip part.

A detailed discussion of the results for $\mathrm{Re}\, f^{(+)}$ will not be presented, since one has to consider at the same time corrections to $g^{(-)}$, which are expected because the ρ-exchange Regge pole model does not explain the πN charge exchange polarization data[3].

---

[5] CHIU, C. B., R. J. N. PHILLIPS, and W. RARITA: Phys. Rev. **153**, 1485 (1967).

[6] HÖHLER, G., J. BAACKE, H. SCHLAILE, and P. SONDEREGGER: Phys. Letters **20**, 79 (1966). — HÖHLER, G., J. BAACKE, and G. EISENBEISS: Phys. Letters **22**, 203 (1966).

[7] FOLEY, K. J., R. S. GILMORE, R. S. JONES, S. J. LINDENBAUM, W. A. LOVE, S. OZAKI, E. H. WILLEN, R. YAMADA, and L. C. L. YUAN: Phys. Rev. Letters **14**, 862 (1965).

[8] HÖHLER, G., and J. BAACKE: Phys. Letters **18**, 181 (1965).

Conclusion

For a test of the Regge model, it is useful to consider combinations of the polarization and differential cross section data in order to separate to a certain extent the effects of the P and P' exchange on one side and the ρ-exchange effect on the other side. In the case of $g^{(-)}$ the data are well compatible with the information deduced from the Regge pole analysis of the πN charge exchange scattering (ρ-exchange) and one gets some information on $\mathrm{Re}\, f^{(+)}$. In the case of $g^{(+)}$ however the applicability of the P and P' exchange Regge model remains doubtful. The agreement between the data and earlier predictions[5,6] is entirely due to the term $f^{(+)}g^{(-)*}$.

We are very grateful to Dr. L. DICK for a discussion and for sending us the data before publication. We also wish to thank Dipl.-Phys. J. BAACKE for his assistence during part of this work.

Zeitschrift für Physik 202, 401–411 (1967)

Eine kritische Analyse der Ladungsdichte des Klein-Gordon-Feldes

BERND GERLACH, DIETER GROMES und JOACHIM PETZOLD
Institut für Theoretische Physik (III) der Universität Marburg (Lahn)

Eingegangen am 24. Februar 1967

We prove that the well known expression for the charge density S^0 can be indefinite even for the positive frequency part of the general solution. Therefore it must be rejected.

§ 1. Problemstellung

Skalare Teilchen in einem elektromagnetischen Feld*

$$F^{\mu\nu} = A^{\mu/\nu} - A^{\nu/\mu}$$

werden durch die Klein-Gordon-Gleichung

$$\{G^\mu G_\mu + \kappa^2\}\psi = 0, \quad G^\mu \equiv \partial^\mu + \frac{ie}{\hbar c} A^\mu \tag{1.1}$$

beschrieben[1]. Ist $\psi(x)$ eine Lösung dieser Gleichung, so ist

$$(S^\mu) = \left(\frac{ie}{2\kappa}\{\bar{\psi} G^\mu \psi - \psi \overline{G^\mu \psi}\}\right) \tag{1.2}$$

ein Vierervektor mit folgenden Eigenschaften:

---

* Zur Bezeichnungsweise: Die Komponenten eines Vierervektors a sind durch hochgestellte Indizes gekennzeichnet: $a = (a^0, a^1, a^2, a^3) \equiv (a^\mu)$. Mit Hilfe des metrischen Tensors

$$g \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv (g_{\mu\nu})$$

definieren wir $a_\mu \equiv g_{\mu\nu} a^\nu$ [über gleiche ko- und kontravariante Indizes ist zu summieren (Einsteinsche Summenkonvention)]. Ferner benutzen wir die Abkürzungen

$$f_{/\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} f = \partial_\mu f \quad \text{und} \quad f^{/\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} f = \partial^\mu f.$$

Die konjugiert komplexe Zahl zu einer gegebenen Zahl α bezeichnen wir mit $\bar{\alpha}$.

[1] Siehe z. B. SCHWEBER, S.: An introduction to relativistic quantum field theory, p. 54. New York: Row, Peterson & Co. 1961.

α) (S^μ) ist reell.

β) Es gilt die Kontinuitätsgleichung $S^\mu{}_{/\mu}=0$.

γ) Beschränkt man ψ auf den Raum der Lösungen zu positiver Frequenz, so geht S^0 im nichtrelativistischen Grenzfall in die *definite* wellenmechanische Ladungsdichte, (S^μ) in die zugehörige Stromdichte über.

Bekanntlich wird (S^μ) als Vierervektor der elektrischen Stromdichte interpretiert. Von dieser Deutung geht u.a. PAULI[2] aus, indem er den Ausdruck (1.2) in die Lorentzsche Kraftdichte einsetzt und mit dem Energie-Impulstensor verknüpft: $T^{\mu\nu}{}_{/\nu}=F^{\mu\nu}S_\nu$.

Im Falle $(A^\mu)\equiv 0$ läßt sich die allgemeine Lösung von (1.1) als Summe zweier Fourierintegrale darstellen, von denen das eine den positiven, das andere den negativen Frequenzanteil von ψ angibt: $\psi=\psi^+ +\psi^-$. Nehmen wir $\psi^-\equiv 0$ an, so erhalten wir nach (1.2) für (S^μ):

$$(S^\mu_+)\equiv\left(\frac{ie}{2\kappa}\{\overline{\psi^+}\,\psi^+{}^{/\mu}-\psi^+\,\overline{\psi^+{}^{/\mu}}\}\right).$$

Analog folgt für $\psi^+\equiv 0$ aus (1.2)

$$(S^\mu_-)\equiv\left(\frac{ie}{2\kappa}\{\overline{\psi^-}\,\psi^-{}^{/\mu}-\psi^-\,\overline{\psi^-{}^{/\mu}}\}\right).$$

Da bei passender Normierung von ψ^+ bzw. ψ^- $\int S^0_\pm\, d^3x=\pm e$ ist, versucht man die Interpretation von (S^μ) in diesem Falle wie folgt zu präzisieren: (S^μ_+) ist die elektrische Stromdichte eines Teilchens der Ladung $+e$, (S^μ_-) die elektrische Stromdichte eines Antiteilchens der Ladung $-e$. Sinnvoll kann diese Deutung aber nur sein, wenn

$$\frac{1}{e}S^0_+(x)\geqq 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{e}S^0_-(x)\leqq 0 \tag{1.3}$$

ist. Die Gültigkeit der Ungleichung (1.3) wird von SCHWEBER[1] (S. 56) sowie FESHBACH und VILLARS[3] behauptet. Implizit setzen auch HENLEY und THIRRING[4]

$$\frac{1}{e}S^0_+(x)\geqq 0$$

voraus, da sie für freie, ungeladene Teilchen die Größe

$$\frac{i}{2\kappa}\{\psi^-\psi^+{}_{/0}-\psi^+\psi^-{}_{/0}\}$$

---

[2] PAULI, W.: Revs. Modern Phys. **13**, 203 (1941).

[3] FESHBACH, H., and F. VILLARS: Revs. Modern Phys. **30**, 26 (1958).

[4] HENLEY, E., and W. THIRRING: Elementary quantum field theory, p. 42. New York: McGraw-Hill Book Co. 1962.

als Operator der Teilchenzahldichte einführen [$\psi(x)$ ist für ungeladene skalare Teilchen reell, so daß $\psi^-(x)=\overline{\psi^+(x)}$ gilt]. Wir zeigen anhand zweier Beispiele in § 2, daß die Behauptungen der genannten Autoren falsch sind: Je nach Wahl von $\psi^+(x)$ kann

$$\frac{1}{e} S_+^0(x)$$

(i) in einem beliebig großen Raumgebiet für jede endliche Zeitdauer negativ werden,

(ii) an einem bestimmten Weltpunkt einen beliebig großen negativen Wert annehmen, obwohl stets

$$\frac{1}{e} \int S_+^0(x) d^3x = 1$$

ist. Aus (i) folgt, daß selbst eine Mittelung von $S_+^0(x)$ über Bereiche der Größenordnung einer Comptonwellenlänge $1/\kappa$ keinen definiten Ausdruck ergibt (eine Mittelung der Feldgrößen wurde von BOHR und ROSENFELD vorgeschlagen[5]).

In § 3 untersuchen wir $S^0(x)$ für das mesonische Atom:

$$(A^\mu) \equiv 0, \quad A^0 = -\frac{e}{r}.$$

Wir beschränken uns auf den Raum der Funktionen, die gebundene Zustände beschreiben und zeigen, daß

$$\frac{1}{e} S^0(x)$$

auch hier negativ wird.

Abschließend zwei Anmerkungen:

Es ist möglich, Vierervektoren ($\tilde{S}^\mu$) anzugeben, die die Eigenschaften $\alpha)-\gamma)$ von S^μ haben, für die aber zudem

$$\frac{1}{e} \tilde{S}_+^0 \geqq 0$$

ist ($\tilde{S}_+^0$ wird analog zu S_+^0 definiert). Wir werden in einer folgenden Arbeit solche Vierervektoren diskutieren.

Da die Energiedichte für das Dirac-Feld bis auf einen abgeänderten Vorfaktor dieselbe Struktur wie $S^0(x)$ hat, hat sie auch die Eigenschaften. (i) und (ii).

[5] BOHR, N., u. L. ROSENFELD: Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Math.-fys. Medd. **12**, No. 8 (1933).

§ 2. Die Ladungsdichte freier Teilchen

Wir beweisen zunächst die Behauptung (i).

Der positive Frequenzanteil von $\psi(x)$ läßt sich in der Form

$$\psi^+(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi^3}}\int\frac{d^3k}{2k_0}\,e^{-ik_\nu x^\nu}\tilde{a}(\boldsymbol{k})$$

darstellen. Wir setzen $\tilde{a}(\boldsymbol{k})=e^{-\varepsilon k_0}a(\boldsymbol{k})$, $\varepsilon>0$, und führen die folgenden Betrachtungen für die Lösung

$$\psi_\varepsilon^+(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi^3}}\int\frac{d^3k}{2k_0}\,e^{-ik_\nu x^\nu}e^{-\varepsilon k_0}a(\boldsymbol{k}) \tag{2.1}$$

der Klein-Gordon-Gleichung durch. Das Integral existiert, sofern die Belegfunktion $a(\boldsymbol{k})$ für große $|\boldsymbol{k}|$ höchstens wie eine Potenz von $|\boldsymbol{k}|$ anwächst. Setzen wir speziell

$$a(\boldsymbol{k})=\frac{1}{\sqrt{2\pi^3}}(i\alpha+\beta k_0),$$

so ist

$$\psi_\varepsilon^+(x)=\alpha D_\varepsilon^+(x)+\beta D_{\varepsilon/0}^+(x), \tag{2.2}$$

wobei mit $D_\varepsilon^+(x)$ das Integral

$$D_\varepsilon^+(x)\equiv\frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{2k_0}\,e^{-ik_0(x^0-i\varepsilon)+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

bezeichnet wurde*. Mit (2.2) erhält man

$$\begin{aligned}\frac{1}{e}S_{+\varepsilon}^0(x)&\equiv\frac{i}{2\kappa}\{\overline{\psi_\varepsilon^+}\,\psi_{\varepsilon/0}^+-\psi_\varepsilon^+\,\overline{\psi_{\varepsilon/0}^+}\}\\&=\frac{i}{2\kappa}\{\bar{\alpha}\,\overline{D_\varepsilon^+}(x)+\bar{\beta}\,\overline{D_{\varepsilon/0}^+}(x)\}\{\alpha D_{\varepsilon/0}^+(x)+\beta D_{\varepsilon/0/0}^+(x)\}+\text{c.c.}\end{aligned} \tag{2.3}$$

Für jedes $\varepsilon>0$ läßt sich das Parameterpaar α, β so wählen, daß

$$\int S_{+\varepsilon}^0(x)\,d^3x=e$$

ist. Es sei x ein Weltpunkt, der raumartig zum Koordinatenursprung liegt. Dann gilt nach [6]

$$\begin{aligned}D_\varepsilon^+(x)&=i\left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^2\frac{K_1(\kappa\sqrt{r^2-(x^0-i\varepsilon)^2})}{\kappa\sqrt{r^2-(x^0-i\varepsilon)^2}}\\&\equiv i\left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^2\frac{K_1(z[\varepsilon])}{z[\varepsilon]}\qquad(\mathrm{Re}\,z[\varepsilon]>0).\end{aligned} \tag{2.4}$$

* $D^+(x)=\lim_{\varepsilon\to0}D_\varepsilon^+(x)$ ist der positive Frequenzanteil der Ausbreitungsfunktion $D(x)$.

[6] JOST, R.: Helv. Phys. Acta **39**, 21 (1966).

$K_1(z)$ ist eine modifizierte Bessel-Funktion dritter Art[7]. Setzen wir (2.4) in (2.3) ein, so folgt

$$\frac{1}{e} S^0_{+\varepsilon}(x) = \frac{i}{2\kappa}\left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^4 \left\{\bar{\alpha}\frac{\overline{K_1(z[\varepsilon])}}{\bar{z}[\varepsilon]} + \bar{\beta}\kappa^2(x^0+i\varepsilon)\frac{\overline{K_2(z[\varepsilon])}}{\bar{z}[\varepsilon]^2}\right\} \times$$
$$\times\left\{\alpha\kappa^2(x^0-i\varepsilon)\frac{K_2(z[\varepsilon])}{z[\varepsilon]^2} + \beta\kappa^2\frac{K_2(z[\varepsilon])}{z[\varepsilon]^2} + \right. \tag{2.5}$$
$$\left. + \beta\kappa^4(x^0-i\varepsilon)^2\frac{K_3(z[\varepsilon])}{z[\varepsilon]^3}\right\} + \text{c.c.}$$

Wir wollen jetzt

$$\frac{1}{e} S^0_{+\varepsilon}(x)$$

für festes x^0 und einen Aufpunkt $\boldsymbol{r}$ diskutieren, der weit vom Koordinatenursprung entfernt ist. Da aus $r \to \infty$ $|z[\varepsilon]| \to \infty$ folgt, läßt sich die asymptotische Entwicklung

$$K_n(z[\varepsilon]) = \sqrt{\frac{\pi}{2z[\varepsilon]}}\, e^{-z[\varepsilon]}\left\{1 + O_n\left(\frac{1}{|z[\varepsilon]|}\right)\right\}$$

verwenden[7] (S. 24). Man erhält mit

$$z[0] = \sqrt{r^2-(x^0)^2} \equiv z$$

aus (2.5)

$$\frac{1}{e} S^0_{+\varepsilon}(x) = \frac{i\pi}{4}\kappa\left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^4 \frac{e^{-2z}}{z^4}\left(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} - 2i|\alpha|^2\varepsilon + O\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

Wählen wir daher $i(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}) < 0$ und ε hinreichend klein, so ist

$$\frac{1}{e} S^0_{+\varepsilon}(x)$$

in einem beliebig großen Raumgebiet für jede endliche Zeitdauer negativ, wie behauptet war.

Wir beweisen nun die Behauptung (ii).

Mit der Formel (2.1) für $\psi^+_\varepsilon(x)$ erhält man

$$\frac{1}{e} S^0_{+\varepsilon}(x) \equiv \frac{i}{2\kappa}\{\overline{\psi^+_\varepsilon}\,\psi^+_{\varepsilon/0} - \psi^+_\varepsilon\,\overline{\psi^+_{\varepsilon/0}}\}$$
$$= \frac{1}{2\kappa(2\pi)^3}\iint \frac{d^3k}{2k_0}\frac{d^3k'}{2k'_0}\,\bar{a}(\boldsymbol{k})\,e^{-\varepsilon(k_0+k'_0)}(k_0+k'_0)\,e^{i(k_\nu-k'_\nu)x^\nu}\,a(\boldsymbol{k}'). \tag{2.6}$$

[7] Erdelyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi: Higher transcendental functions 2, p. 5. New York: McGraw-Hill Book Co. 1953.

Es sei $x=u$ ein fester Weltpunkt. Wir bestimmen die Eigenfunktionen $a_\varepsilon(\boldsymbol{k};u)$ des Kernes von $S^0_{+\varepsilon}(u)$ zu Eigenwerten $\lambda_\varepsilon \neq 0$, das heißt die Lösungen der Gleichung

$$\lambda_\varepsilon a_\varepsilon(\boldsymbol{k};u)=\int \frac{d^3k'}{2k'_0} e^{-\varepsilon(k_0+k'_0)}(k_0+k'_0)\, e^{i(k_\nu-k'_\nu)u^\nu} a_\varepsilon(\boldsymbol{k}';u)$$
$$\text{mit} \quad \lambda_\varepsilon \neq 0. \tag{2.7}$$

Für diese Lösungen gilt

$$\frac{1}{e} S^0_{+\varepsilon}(u)=\frac{\lambda_\varepsilon}{2\kappa(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{2k_0}|a_\varepsilon(\boldsymbol{k};u)|^2. \tag{2.8}$$

Wir werden am Schluß dieses Abschnittes eine Funktion $a_\varepsilon(\boldsymbol{k};u)$ und $\lambda_\varepsilon<0$ angeben, für die

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{e} S^0_{+\varepsilon}(u)=-\infty$$

ist. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Für $g_\varepsilon(\boldsymbol{k})\equiv a_\varepsilon(\boldsymbol{k};u)\, e^{-ik_\nu u^\nu}$ folgt aus (2.7)

$$\lambda_\varepsilon g_\varepsilon(\boldsymbol{k})=\int \frac{d^3k'}{2k'_0}(k_0+k'_0)\, e^{-\varepsilon(k_0+k'_0)} g_\varepsilon(\boldsymbol{k}'). \tag{2.9}$$

Da die rechte Seite der Gleichung nur von k_0 abhängt, muß dasselbe für die linke Seite gelten. Sofern also $\lambda_\varepsilon \neq 0$ ist, ist $g_\varepsilon=g_\varepsilon(k_0)$. Aus (2.9) folgt damit

$$\lambda_\varepsilon g_\varepsilon(k_0)=e^{-\varepsilon k_0}\left\{4\pi\int_0^\infty dk' \frac{k'^2}{2} e^{-\varepsilon k'_0} g_\varepsilon(k'_0)+ \right.$$
$$\left. +4\pi k_0\int_0^\infty dk' \frac{k'^2}{2k'_0} e^{-\varepsilon k'_0} g_\varepsilon(k'_0)\right\}. \tag{2.10}$$

Aufgrund dieser Gleichung machen wir den Lösungsansatz

$$g_\varepsilon(k_0)=e^{-\varepsilon k_0}(\alpha_\varepsilon+\beta_\varepsilon k_0). \tag{2.11}$$

α_ε und β_ε sind im folgenden zu bestimmen. Setzt man (2.11) in (2.10) ein, so folgt

$$\lambda_\varepsilon\alpha_\varepsilon+\lambda_\varepsilon\beta_\varepsilon k_0$$
$$=2\kappa^3\pi\frac{K_2(2\kappa\varepsilon)}{2\kappa\varepsilon}\alpha_\varepsilon+2\kappa^4\pi\left\{\frac{K_3(2\kappa\varepsilon)}{2\kappa\varepsilon}-\frac{K_2(2\kappa\varepsilon)}{(2\kappa\varepsilon)^2}\right\}\beta_\varepsilon+ \tag{2.12}$$
$$+\left\{2\kappa^2\pi\frac{K_1(2\kappa\varepsilon)}{2\kappa\varepsilon}\alpha_\varepsilon+2\kappa^3\pi\frac{K_2(2\kappa\varepsilon)}{2\kappa\varepsilon}\beta_\varepsilon\right\}k_0.$$

Nun ist für ganzzahliges $n \geqq 1$

$$K_n(z) = \frac{(n-1)!\, 2^{n-1}}{z^n}\,(1+F_n(z))$$

mit $F_n(z) \to 0$ für $z \to 0$ ([7], S. 9). Beachtet man ferner, daß k_0 eine unabhängige Variable ist, so erhält man aus (2.12) ein lineares Gleichungssystem in α_ε und β_ε:

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{\frac{\pi}{2\varepsilon^3}(1+f_2(\varepsilon)) - \lambda_\varepsilon\right\}\alpha_\varepsilon + \frac{3\pi}{4\varepsilon^4}(1+f_3(\varepsilon))\,\beta_\varepsilon \\ 0 &= \frac{\pi}{2\varepsilon^2}(1+f_1(\varepsilon))\,\alpha_\varepsilon + \left\{\frac{\pi}{2\varepsilon^3}(1+f_2(\varepsilon)) - \lambda_\varepsilon\right\}\beta_\varepsilon . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Dabei gilt $f_i(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ $(i=1, 2, 3)$.

Eine Lösung des Systems (2.13) existiert nur dann, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Daraus folgt

$$\lambda_\varepsilon^{\pm} = \frac{\pi}{2\varepsilon^3}\left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\right)(1+F_\pm(\varepsilon)), \tag{2.14}$$

wobei $F_\pm(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ gilt. Mit (2.14) ergibt jede der Gleichungen (2.13)

$$\frac{\beta_\varepsilon}{\alpha_\varepsilon} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,\varepsilon(1+G_\pm(\varepsilon)) \tag{2.15}$$

mit $G_\pm(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$.

Beschränken wir uns auf das negative Vorzeichen, so kommen wir zum Ergebnis:

$$a_\varepsilon(\boldsymbol{k}; u) = \alpha_\varepsilon\, e^{i k_\nu u^\nu}\, e^{-\varepsilon k_0}\left(1 - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\varepsilon[1+G_-(\varepsilon)]\,k_0\right) \tag{2.16}$$

ist eine Lösung von (2.7) zum Eigenwert

$$\lambda_\varepsilon = -\frac{\pi}{2\varepsilon^3}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\right)(1+F_-(\varepsilon)). \tag{2.17}$$

α_ε kann seinem Betrage nach durch die Forderung $\int S^0_{+\varepsilon}(x)\, d^3x = e$ festgelegt werden. Es ergibt sich

$$|\alpha_\varepsilon| = A \cdot \varepsilon(1+H(\varepsilon)), \tag{2.18}$$

wobei A eine reelle (von ε unabhängige) Zahl ist und $H(\varepsilon) \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ gilt.

Setzen wir (2.16) bis (2.18) in (2.8) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e}\, S^0_{+\varepsilon}(u) = -\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}{16\pi\kappa}\, A^2(1+F_-(\varepsilon))(1+H(\varepsilon))^2 \times \\ \times \int_0^\infty dk\, \frac{k^2}{k_0}\, e^{-2\varepsilon k_0}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\varepsilon[1+G_-(\varepsilon)]\,k_0\right)^2 . \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} S^0_{+\varepsilon}(u) = -\infty,$$

wie behauptet wurde.

§ 3. Diskussion von $S^0(x)$ für das mesonische Atom

Es seien $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ zwei Funktionen, die stationäre Zustände des Atoms beschreiben (der Einfachheit halber wählen wir den Bahndrehimpuls $l=0$):

$$\psi_j(x) = \varphi_j(r)\, e^{-i E'_j x^0}; \quad j=1,2; \quad E'_j \equiv \frac{E_j}{\hbar c}. \tag{3.1}$$

Wir setzen

$$\psi(x) = a_1 \psi_1(x) + a_2 \psi_2(x), \quad a_1 \neq 0 \neq a_2. \tag{3.2}$$

Führt man die Bezeichnungen

$$a_1 \overline{a_2} \equiv |a_1\, a_2| \exp(i\delta) \quad \text{und} \quad (E'_1 - E'_2)\, x^0 + \delta \equiv \tau$$

ein und nimmt $\varphi_j(r)$ als reell an, was im Hinblick auf das folgende Beispiel möglich ist, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{e} S^0(x) = {} & |a_1\, \varphi_1(r)|^2 \left(E'_1 + \frac{\alpha}{r}\right) + |a_2\, \varphi_2(r)|^2 \left(E'_2 + \frac{\alpha}{r}\right) + \\ & + |a_1\, a_2|\, \varphi_1(r)\, \varphi_2(r) \left(E'_1 + E'_2 + \frac{2\alpha}{r}\right) \cos\tau \end{aligned} \tag{3.3}$$

(α ist die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante).

Wir können a_1 und a_2 so wählen, daß $\int S^0(x)\, d^3x = e$ ist. Aus (3.3) folgt, daß

$$\frac{\kappa}{e} S^0(x)$$

positiv ist, wenn $E'_1 = E'_2$ gilt. Diese Eigenschaft geht für $E'_1 \neq E'_2$ verloren, wie wir an einem Beispiel zeigen werden.

Es sei

$$\varphi_1(r) = N_1\, e^{-\varepsilon_1 r}\, r^\lambda,$$

$$\varphi_2(r) = N_2\, e^{-\varepsilon_2 r}\, r^\lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{1+\lambda}\, r\right).$$

(Bezüglich dieser Eigenfunktionen, die in der üblichen Bezeichnungsweise durch $n=1$, $l=0$ bzw. $n=2$, $l=0$ gekennzeichnet sind, s. [8].) Dabei

[8] CORINALDESI, E., and F. STROCCHI: Relativistic wave mechanics, p. 94. Amsterdam: North-Holland Publ. C. 1963.

gilt:

$$E'_j=\frac{\kappa}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{j+\lambda}\right)^2}},$$

$$\varepsilon_j=\kappa\sqrt{1-\frac{1}{1+\left(\frac{\alpha}{j+\lambda}\right)^2}},$$

$$\lambda=\sqrt{\tfrac{1}{4}-\alpha^2}-\tfrac{1}{2}.$$

N_j ist ein Normierungsfaktor.

Wir wollen $S^0(x)$ zunächst für einen festen Wert von x^0 bzw. τ diskutieren. Ist $\cos\tau\geqq 0$, so kann

$$\frac{\kappa}{e}S^0(x)$$

höchstens für

$$r\geqq\frac{1+\lambda}{\varepsilon_2}$$

Nullstellen haben [$\varphi_1(r)\,\varphi_2(r)$ ist sonst positiv]. Ist $\cos\tau<0$, so liegen Nullstellen höchstens im Bereich

$$r<\frac{1+\lambda}{\varepsilon_2}$$

[$\varphi_1(r)\,\varphi_2(r)$ ist sonst Null oder negativ]. Im jeweils interessierenden Intervall gibt es ein τ_0 derart, daß

$$\varphi_1(r)\,\varphi_2(r)\cos\tau_0=-|\varphi_1(r)\,\varphi_2(r)|$$

gilt. Daher ist

$$\begin{aligned}\frac{\kappa}{e}S^0(x)|_{\tau=\tau_0}&=\left(|a_1\,\varphi_1(r)|-|a_2\,\varphi_2(r)|\right)\times\\&\quad\times\left(|a_1\,\varphi_1(r)|\left[E'_1+\frac{\alpha}{r}\right]-|a_2\,\varphi_2(r)|\left[E'_2+\frac{\alpha}{r}\right]\right)\\&\equiv f(r).\end{aligned}$$

Wir untersuchen die Funktion $f(r)$. Mit $b_j\equiv N_j\,|a_j|$ gilt

$$\begin{aligned}f(r)=(b_2\,r^\lambda\,e^{-\varepsilon_1 r})^2\left(E'_2+\frac{\alpha}{r}\right)\times\\\times\left\{\frac{b_1}{b_2}-e^{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)r}\left|1-\frac{\varepsilon_2}{1+\lambda}\,r\right|\right\}\times\\\times\left\{\frac{b_1}{b_2}\,\frac{E'_1\,r+\alpha}{E'_2\,r+\alpha}-e^{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)r}\left|1-\frac{\varepsilon_2}{1+\lambda}\,r\right|\right\}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Für einen festen Quotienten b_1/b_2 lassen sich die Nullstellen dieser Funktion leicht übersehen.

Ist

$$r \geqq \frac{1+\lambda}{\varepsilon_2},$$

so hat jede der Gleichungen

$$\frac{b_1}{b_2} = e^{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)r_1}\left\{\frac{\varepsilon_2}{1+\lambda}r_1 - 1\right\}$$

$$\frac{b_1}{b_2}\,\frac{E_1' r_2+\alpha}{E_2' r_2+\alpha} = e^{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)r_2}\left\{\frac{\varepsilon_2}{1+\lambda}r_2 - 1\right\}$$

genau eine Lösung. Es ist $r_1 > r_2$ und $f(r)$ für $r_2 < r < r_1$ negativ. Die genaue Abschätzung ergibt

$$r_1 - r_2 < \frac{\alpha}{\kappa}.$$

Ist

$$r < \frac{1+\lambda}{\varepsilon_2} \quad \text{und} \quad \frac{b_1}{b_2} \leqq 1,$$

so sind die Gleichungen

$$\frac{b_1}{b_2} = e^{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)r_1}\left\{1 - \frac{\varepsilon_2}{1+\lambda}r_1\right\}$$

$$\frac{b_1}{b_2}\,\frac{E_1' r_2+\alpha}{E_2' r_2+\alpha} = e^{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)r_2}\left\{1 - \frac{\varepsilon_2}{1+\lambda}r_2\right\}$$

ebenfalls eindeutig lösbar. Es ist $r_2 > r_1$ und $f(r)$ für $r_1 < r < r_2$ negativ. Die Größenordnung des Intervalles ändert sich jedoch wesentlich: Man erhält

$$r_2 - r_1 < \frac{4}{\kappa}.$$

(Es sei angemerkt, daß das Newtonsche Verfahren zur Nullstellenbestimmung für $b_1/b_2 = 1$ das Ergebnis

$$r_2 - r_1 > \frac{3}{2\kappa}$$

liefert.)

Bliebe schließlich der Fall

$$r < \frac{1+\lambda}{\varepsilon_2} \quad \text{und} \quad \frac{b_1}{b_2} > 1.$$

Die Nullstellen von $f(r)$ berechnet man dann aus

$$\frac{b_1}{b_2}\,\frac{E_1' r+\alpha}{E_2' r+\alpha} = e^{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)r}\left\{1 - \frac{\varepsilon_2}{1+\lambda}r\right\}.$$

Diese Gleichung kann für reelles r zwei oder weniger Lösungen haben. Die letztere Möglichkeit ist für uns uninteressant. Existieren zwei Lösungen r_1 und r_2 mit $r_1<r_2$, so ist $f(r)<0$ für $r_1<r<r_2$. Man kann hier wie oben

$$r_2-r_1<\frac{4}{\kappa}$$

abschätzen.

Das Gesamtergebnis ist also:

$$\frac{1}{e}S^0(x)$$

kann für gewisse Zeiten negativ werden, selbst, wenn $\psi(x)$ auf den Unterraum der Funktionen beschränkt wird, die stationäre Zustände des Atoms beschreiben. Die Raumgebiete, in denen das möglich ist, sind in unserem Beispiel Kugelschalen, deren Dicke geringer als 4 Comptonwellenlängen ist.

Wir wenden uns zum Schluß noch einer anderen Frage zu: Für einen festen Wert von r und $x^0=c_1$ gelte

$$\frac{1}{e}S^0(x)<0.$$

Da

$$\frac{1}{e}S^0(x)$$

stetig von x^0 abhängt, gibt es $c_2>c_1$, so daß

$$\frac{1}{e}S^0(x)_{|r}$$

für $c_1<x^0<c_2$ negativ ist. Wie groß kann c_2-c_1 werden? Man erhält im vorliegenden Spezialfall

$$c_2-c_1<\frac{6}{\kappa},$$

also dieselbe Größenordnung wie oben.

Zeitschrift für Physik 202, 412/13 (1967)

Bhabha-Gleichung und imaginäre Parität von Fermionen

WALTER FRANZ
Institut für Theoretische Physik der Universität Münster

Eingegangen am 24. Februar 1967

Die Lie-Algebra der Bhabhaschen Wellengleichung liefert innere Transformationen des Feldes nicht nur für die spezielle, sondern für die volle Lorentz-Gruppe. Für die Parität (ebenso wie für alle anderen Achsenspiegelungen des R_4) ergeben sich dabei für Fermionen nur die Eigenwerte $\pm i$ der imaginären Paritätsklasse.

Die Wellengleichung eines freien Feldes läßt sich stets unter Einführung einer hinreichend großen Zahl von Feldkomponenten als Differentialgleichungs-System erster Ordnung in der Kemmerschen Gestalt[1]

$$(\beta_k \partial_k + \mu)\,\psi = 0; \qquad k = 1, 2, 3, 4 \tag{1}$$

schreiben. Um das System Lorentz-invariant zu machen, hat man zu fordern, daß der Massenoperator μ Lorentz-invariant ist und daß den Erzeugenden $I_{ik} \equiv x_i \partial_k - x_k \partial_i$ der infinitesimalen Lorentz-Gruppe Spinortransformationen zur Seite gestellt werden, für deren Erzeugende S_{ik} analog zu den Relationen zwischen I_{ik} und ∂_e gilt

$$[S_{ik}, \beta_l] = \beta_i \delta_{kl} - \beta_k \delta_{il}. \tag{2}$$

Die einfachste Möglichkeit, die Relationen (2) innerhalb einer einfachen Lie-Algebra zu realisieren, sind die Vertauschungsrelationen von BHABHA[2]

$$[\beta_i, \beta_k] = S_{ik}. \tag{3}$$

Aus (2), (3) folgt mittels der Jacobi-Identität die richtige Vertauschungsrelation für die S_{ik}

$$[S_{ik}, S_{lm}] = \delta_{kl} S_{im} + \delta_{im} S_{kl} - \delta_{km} S_{il} - \delta_{il} S_{km}. \tag{4}$$

Durch (2), (3), (4) wird eine Lie-Algebra vom Typ B_2 festgelegt, welche nach BHABHA zur Algebra der Drehungen im R_5 isomorph ist. Dies macht man evident, wenn man setzt

$$\beta_k = -i S_{k0}. \tag{5}$$

---

[1] KEMMER, N.: Proc. Roy. Soc. (London) A **173**, 91 (1939).
[2] BHABHA, H. J.: Revs. Modern Phys. **21**, 451 (1949).

Dann folgen die Gln. (2), (3) als Spezialfälle aus (4). Dies hat nun zur Folge, daß die Bhabha-Algebra nicht nur die Erzeugenden der speziellen Lorentz-Gruppe enthält, sondern – was bisher anscheinend nicht beachtet wurde – innere Operatoren zu sämtlichen Transformationen der vollen Lorentz-Gruppe. Die Spiegelung an der x_k-Achse läßt sich nämlich als Drehung Π in der $(k, 0)$-Ebene auffassen; insbesondere erhält man für $k=4$ den Operator der inneren Parität

$$\Pi = e^{i\pi\beta_4}, \tag{6}$$

für welchen gilt

$$\Pi\beta_k = -\beta_k\Pi \quad \text{für} \quad k=1,2,3; \qquad \Pi\beta_4 = \beta_4\Pi. \tag{7}$$

Bei den eindeutigen Darstellungen der Drehgruppe des R_5 sind für die S_{ik} (unter denen auch die β_k sich befinden) nur ganzzahlige Eigenwerte zugelassen, bei den zweideutigen Darstellungen nur halbzahlige. Also besitzt für ganzzahlige Spin Π nur die Eigenwerte ± 1, für halbzahligen Spin nur Eigenwerte $\pm i$. Fordert man nur die Relationen (7), so bleibt freilich ein Phasenfaktor bei der Definition von Π offen; da jedoch bei den eindeutigen Darstellungen $\Pi^2 = 1$ sein muß, bleibt nur die Freiheit Π oder Π^{-1} als Operator der Parität zu bezeichnen. Für Fermionen bleibt dann aber nur die imaginäre Paritätsklasse mit den Eigenwerten $\pm i$ übrig.

Zeitschrift für Physik 202, 414–424 (1967)

Some Implications of the Quark Model for High Energy Scattering

HARRY J. LIPKIN
Weizmann Institute of Science, Rehovot/Israel

Received February 27, 1967

The expressions for total scattering cross sections obtained from the quark model are expressed in a simple form which shows the dependence of the results on the assumptions. The results are shown to depend only on the value of six constants or "charges" defined for each hadron and to be otherwise independent of the structure. Any model which gives the same values of these charges gives the same result as the quark model. In particular, the results for processes which have odd signature t-channel quantum numbers hold in a quark model even with arbitrary mixtures of additional quark-antiquark pairs in the hadron wave function, provided that B, Y, and I are conserved.

Introduction

The recent successes of the quark model description of high energy scattering[1] stand in marked contrast to the failure to observe quarks experimentally[2] and the difficulty of constructing a convincing model for the bound states which has the properties demanded by the application to scattering[3]. It is therefore of interest to examine the quark model results and to see which assumptions are really necessary in order to obtain them. In this paper we cast the formulas of the quark model description into a particulary transparent form which indicates where the results do not depend upon a detailed model for the structure of a hadron, but only on certain coupling constants which may be model independent to a large extent.

There has been considerable discussion comparing the quark model with a Regge-pole model for high energy scattering. This discussion tends to obscure the fact that the two approaches are not competitive. There is no question of preferring one to another for the description of the same phenomena. The quark and Regge-pole models describe different

[1] LEVIN, E. M., and L. L. FRANKFURT: Zhur. Eksptl. i Teoret. Fiz.-Pis'ma Redakt. **2**, 105 (1965); translation: JETP Letters **2**, 65 (1965). – ANISOVICH, V. V.: Zhur. Eksptl. i Teoret. Fiz.-Pis'ma Redakt. **2**, 439 (1965); translation: JETP Letters **2**, 272 (1965). – LIPKIN, H. J., and F. SCHECK: Phys. Rev. Letters **16**, 71 (1966). – KOKKEDEE, J. J. J., and L. VAN HOVE: Nuovo cimento **42A**, 711 (1966). – LIPKIN, H. J.: Phys. Rev. Letters **16**, 952 (1966).

[2] DALITZ, R. H.: Proc. Oxford Intl. Conf. on Elementary Particles (Rutherford High-Energy Laboratory, Chilton, January 1966), p. 157.

[3] GELL-MANN, M.: Current topics in particle physics. Report CALT-68-101, California Institute of Technology, to be published in the Proceedings of the XIII. International Conference on High Energy Physics, Berkeley 1966.

aspects of the scattering process and can in fact be combined in various ways without any internal contradiction. In the quark model the scattering of different hadrons are related to one another because they are all composed of quarks and their scattering amplitudes are related to fundamental two-body quark scattering amplitudes. However, nothing can be specified about the dependence of the quark amplitudes on kinematical variables without an underlying dynamical theory.

The Regge-pole description[4-6] provides a dynamical framework for giving the dependence of a given scattering amplitude on the kinematical variables, energy, momentum transfer, spin, etc. However, the scattering amplitudes for different hadrons are not related unless additional assumptions are made about the relative strengths of the couplings to the different Regge trajectories. While one can use symmetries and universality to relate the couplings, these relations are not necessarily required by the Regge description. Thus in comparing the results of the quark model with results obtained by other models, one should consider the symmetry and universality assumptions in the other models which relate the scattering amplitudes for different particles at the same values of the kinematical variables. Any dynamical model for the dependence on energy etc. can be incorporated in the quark model at the quark level. For our purposes it is convenient to use the language of the Regge description, and consider the coupling of a hadron to a given trajectory as being the sum of the contributions of the individual quarks. The compatibility of the quark and Regge-pole descriptions has been discussed in detail by DABOUL[7].

The Diagonalized Form for the Scattering Formula

DABOUL[7] has shown that high energy total cross sections can be expressed in the following simple form under the quark model assumption of additivity of two body quark scattering amplitudes and charge conjugation invariance.

$$\Delta_{AB}=\sum_{ij}(n_i^A-n_i^{\bar{A}})(n_j^B-n_j^{\bar{B}})\,\Delta_{ij}, \tag{1a}$$

$$\Sigma_{AB}=\sum_{ij}(n_i^A+n_i^{\bar{A}})(n_j^B+n_j^{\bar{B}})\,\Sigma_{ij} \tag{1b}$$

[4] BARGER, V., and M. OLSSON: Phys. Rev. Letters **15**, 930 (1965); **16**, 545 (1965). — AHMADZADEH, A.: Phys. Rev. Letters **16**, 962 (1966); — Phys. Letters **22**, 96 (1966).

[5] FREUND, P. G. O.: Phys. Rev. Letters **15**, 929 (1965); — Nuovo cimento **43A**, 1171 (1966).

[6] CABIBBO, N., L. HORWITZ, and Y. NE'EMAN: Phys. Letters **22**, 336 (1966). — CABIBBO, N., J. J. J. KOKKEDEE, L. HORWITZ, and Y. NE'EMAN: Nuovo cimento **45A**, 275 (1966).

[7] DABOUL, J.: Nuovo cimento (to be published).

where

$$\Delta_{AB}=\sigma_{AB}-\sigma_{\bar{A}B}, \tag{2a}$$

$$\Sigma_{AB}=\sigma_{AB}+\sigma_{\bar{A}B} \tag{2b}$$

and σ_{AB} is the total cross section for scattering of hadron of type A on hadron of type B, n_{Ai} is the total number of quarks of type i in A where $i=p, n, \lambda$, and Δ_{ij} and Σ_{ij} are the sums and differences of two-body quark scattering amplitudes. We use the notation p, n, λ to denote the members of the quark triplet[1].

The matrices Δ_{ij} and Σ_{ij} are obviously symmetric and can be diagonalized. We can thus write Eqs. (1) in the representations where Δ_{ij} and Σ_{ij} are diagonal respectively.

$$\Delta_{AB}=\sum_{\mu} q_{\mu}^{A} q_{\mu}^{B} \delta_{\mu}, \tag{3a}$$

$$\Sigma_{AB}=\sum_{\mu} \hat{q}_{\mu}^{A} \hat{q}_{\mu}^{B} \sigma_{\mu}. \tag{3b}$$

where δ_{μ} and σ_{μ} are the eigenvalues of the matrices Δ_{ij} and Σ_{ij} and

$$q_{\mu}^{H}=\sum_{i} C_{\mu i}(n_i^H-n_i^{\bar{H}}), \tag{4a}$$

$$\hat{q}_{\mu}^{H}=\sum_{i} \hat{C}_{\mu i}(n_i^H+n_i^{\bar{H}}) \tag{4b}$$

for any hadron H.

The matrices $C_{\mu i}$ and $\hat{C}_{\mu i}$ are the unitary matrices which diagonalize Δ_{ij} and Σ_{ij} respectively.

Eqs. (3) have a simple intuitive physical interpretation. Consider for example the expression for the Coulomb scattering amplitude in Rutherford scattering

$$A_{AB}=Z_A Z_B \cdot F \tag{5}$$

where Z_A and Z_B are the charges of particles A and B, and F is a function of the kinematical variables. The dependence of the Coulomb amplitude (5) on the structures of the particles A and B is completely expressed by the product of their charges. The relations (3) have the appearance of a generalization of the Coulomb amplitude (5) in which there are 6 different interactions instead of only 1 and each hadron is characterized by 6 "charges" or coupling constants which define the coupling of each hadron to each of the six different fields. Each of the 6 interactions contributes separately to the total scattering and each contribution depends on the product of the appropriate charges.

In this way we see that the relations (3) do not depend upon the detailed quark structure of the hadrons just as the Rutherford formula (5)

does not require a composite structure for charged particles in which they are all made of electrons and positrons. All that is necessary to reproduce the quark model results is that there be universal couplings of all hadrons to 6 "fields" or Regge trajectories with coupling constants defined by the relations (4).

Possible Relation to Other Descriptions

The quantities q_μ which contribute to Δ_{AB} can also be expressed as linear combinations the baryon number B, the hypercharge Y and the z-component of isospin I_z. These are conserved quantities which are defined for each hadron independent of any model. Thus the relation (3) is a generalization of the universality proposed by SAKURAI[8] in which vector fields were coupled to the conserved baryon number, hypercharge and isospin currents. Here the relevant currents are not necessarily these three but may be linear combinations of isospin, baryon number and hypercharge. The corresponding relations for $\hat{q}_\lambda$ do not have the same physical interpretation. These correspond to currents analogous to baryon number, hypercharge and isospin, but in which one takes the *sum* of the contributions of quarks and antiquarks rather than the difference. The charges q_μ are all quantities which are conserved *in strong interactions, the quantities* $\hat{q}_\mu$ *are not conserved quantities.*

We can see here the relation with the Regge-pole model[4]. The expressions (3) have the characteristic factorized form for scattering amplitudes obtained from the exchange of several Regge trajectories. In the Regge description the quantities δ_μ and σ_μ are functions of energy given explicitly by the theory. The charges q_μ^H and $\hat{q}_\mu^H$ are proportional to the Regge residues for the odd and even signature trajectories, respectively. These are free parameters in a pure Regge theory, without symmetry or universality assumptions. In the quark model the relations (3) hold for any given energy, but all the quantities may vary with energy in an arbitrary fashion. However, the quantities q_μ^H and $\hat{q}_\mu^H$ are not completely free, but are determined for all hadrons by the relations (4) in terms of the parameters $C_{\mu i}$ and $\hat{C}_{\mu i}$. These relations (4) correspond to the concept of *universality*[5,8] rather than *symmetry* in the Regge picture. They relate the couplings of a given trajectory μ to *all* hadrons H, and do not relate the couplings of different trajectories. Symmetries relate couplings of *several* trajectories classified in the same multiplet to *those* hadrons classified in a single multiplet and do not relate couplings in different multiplets.

This formulation also indicates how the present analysis would be applied to other composite models including more than a single triplet.

[8] SAKURAI, J. J.: Ann. Phys. (N. Y.) **11**, 1 (1960).

The relations (1) would still hold, but the sums over indices i and j would take on as many values as there are fundamental particles and the quantities n_i would have different values for a given hadron depending upon the particular model. In the diagonalized form (3) one would have more than three independent charges of each kind. Note however, that baryon number, isospin, and hypercharge would still be expressible as linear combination of the charges q_λ. Thus the relations obtained in the simple quark model for Δ_{AB} are always obtainable in any composite model with a suitable choice of the parameters Δ_{ij}.

One can also see the consequences in a quark model where the particles are not described by their usual configurations but have mixtures involving additional quark-antiquark pairs. All the relations for Δ_{ab} are unaffected by these admixtures which must conserve B, I and Y. However, no similar conservation laws exist for the case of Σ_{AB}. In particular the characteristic 3/2 ratio obtained between baryon-baryon and meson-baryon scattering depends crucially on the assumption that the baryon consists of three quark-like objects and the meson of only two. Thus if experimental agreement with predictions for Σ_{AB} are consistently worse than those for Δ_{ab}, this could be considered as evidence for configuration mixing.

So far we have not introduced any symmetry assumptions. The assumption of isospin which is a known good symmetry for strong interactions places restrictions on the matrices C_{ij} and $\hat{C}_{ij}$. From the isospin quantum numbers in the t-channel one sees that the three charges q_μ must correspond to one channel of isotriplet exchange and two of isosinglet exchange, and similarly for the three even charges $\hat{q}_\mu$. Thus, in each case, the isotriplet channel and its associate charge are uniquely determined a priori. The only degrees of freedom remaining are the diagonalizations between the two isosinglet channels in each case. This is simply expressed in the example of the vector meson trajectories, where the relevant mesons are ρ^0, ω and φ. The ρ coupling to the quarks is uniquely determined by isospin. For the ω and φ we have the usual mixing problem. One might have the $SU(3)$ couplings, singlet and octet, which would correspond to couplings to the baryon and hypercharge currents[8]. Another possibility which seems to be in agreement with experiments is to use the mixtures corresponding to the physical ω and φ mesons. The ω is coupled only to the non-strange quark current and the φ to the strange quark current. However, a priori, any mixture of singlet and octet coupling is allowed.

Explicit Calculation of Relations Between Cross Section Differences Δ_{AB}

For simplicity, let us first consider the case where the matrix δ_{ij} is diagonal and all its eigenvalues are equal; i.e. it is multiple of the unit

matrix. This corresponds to the assumption of universal $U(3)$ symmetry* in the Regge couplings. The matrix $C_{\mu i}$ can be chosen to be the unit matrix. The three charges defined by Eq. (4a) can be noted by q_p, q_n and q_λ, where q_i is just the difference between the number of quarks and antiquarks of type i. Eq. (3a) then becomes

$$\Delta_{AB}=\delta[q_p^A q_p^B+q_n^A q_n^B+q_\lambda^A q_\lambda^B]. \tag{6}$$

For all stable nuclei which can be used as targets in a scattering experiment $q_\lambda=0$; thus the last term in Eq. (6) can be dropped for all physically feasible scattering processes. The only relevant targets are the proton, neutron and deuteron. For these cases, Eq. (6) can be simplified by substituting the appropriate values of (q_p, q_n); namely (2, 1), (1, 2) and (3, 3) for the proton, neutron and deuteron, respectively. Thus

$$\Delta_{Ap}=\delta[2q_p^A+q_n^A], \tag{7a}$$

$$\Delta_{An}=\delta[q_p^A+2q_n^A], \tag{7b}$$

$$\Delta_{Ad}=3\delta[q_p^A+q_n^A]. \tag{7c}$$

We can construct a simple table which contains all the information relevant to Δ_{AB} for meson and baryon scattering

Table 1. *Computation of Δ_{AB} with Universal $U(3)$ Symmetry*

	π^+	K^+	K^0	p	n
q_p	1	1	0	2	1
q_n	−1	0	1	1	2
Δ_{Ap}/δ	1	2	1	5	4
Δ_{An}/δ	−1	1	2	4	5
Δ_{Ad}/δ	0	1	1	3	3

By inspection of Table 1 we immediately write down the following relations

$$\Delta(\pi^+ p)=\Delta(K^+ n)=\tfrac{1}{2}\Delta(K^+ p)=\tfrac{1}{5}\Delta(p\,p)=\tfrac{1}{4}\Delta(p\,n), \tag{8a}$$

$$\Delta(K^+ d)=\tfrac{1}{3}\Delta(p\,d). \tag{8b}$$

* We define universal $U(3)$ as the following coupling to all hadrons of a nonet of mesons or Regge trajectories which are classified in the reducible nonet $(8\oplus 1)$ representation of $U(3)$: The matrix elements or a particular member of the nonet at zero momentum transfer are *equal* to the matrix elements of the corresponding generator multiplied by a universal constant which is the same for all hadrons. This differs from conventional $SU(3)$ symmetry (1) by relating the octet and singlet couplings, and (2) by relating the couplings of the nonet to all hadrons, even those not in the same $SU(3)$ multiplets. This symmetry is sufficient to obtain all the results of FREUND[5]. The various higher symmetries based on $SU(6)$ include additional assumptions which are not necessary at this stage. We are grateful to Y. NE'EMAN for clarifying this point.

Eq. (8a) includes the Johnson-Treiman[9] relations and the Freund[5] relations. Eq. (8b) has been obtained by LEVINSON, WALL and LIPKIN[10].

The assumption of full universal $U(3)$ symmetry* (degeneracy of all eigenvalues δ_μ) is not necessary to obtain the results (7) and (8). As the contribution from q_λ is irrelevant, the higher symmetry can be broken by making $\delta_\lambda \neq \delta_p$ without affecting these results. Further symmetry breaking might be introduced by making $\delta_p \neq \delta_n$. However, this would be inconsistent with isospin symmetry which is known to be good for strong interactions. Before considering further possible symmetry breaking it is convenient to rewrite (6) to exhibit manifest isospin invariance.

$$\Delta_{AB} = \tfrac{1}{2}\delta_\omega(q_p^A + q_n^A)(q_p^B + q_n^B) + \tfrac{1}{2}\delta_\rho(q_p^A - q_n^A)(q_p^B - q_n^B) + \delta_\varphi(q_\lambda^A q_\lambda^B) \quad (9)$$

where δ_ω, δ_ρ and δ_φ represent the contributions of the exchange of the corresponding vector meson trajectories. Eq. (9) is identical to Eq. (6) in the universal $U(3)$ symmetry limit where $\delta_\omega = \delta_\rho = \delta_\varphi$. The results of Table 1 expressed in Eq. (8) are independent of the values of δ_φ and hold if $\delta_\varphi \neq \delta_\rho$. However, if the symmetry is broken further by allowing $\delta_\omega \neq \delta_\rho$, Eq. (7) become

$$\Delta_{Ap} = \tfrac{3}{2}\delta_\omega(q_p^A + q_n^A) + \tfrac{1}{2}\delta_\rho(q_p^A - q_n^A), \quad (10a)$$

$$\Delta_{An} = \tfrac{3}{2}\delta_\omega(q_p^A + q_n^A) - \tfrac{1}{2}\delta_\rho(q_p^A - (q_n^A), \quad (10b)$$

$$\Delta_{Ad} = 3\delta_\omega(q_p^A + q_n^A). \quad (10c)$$

The corresponding properties of mesons and nucleons are given in Table 2.

Table 2. *Computation of Δ_{AB} with Broken Universal $U(3)$*

	π^+	K^+	K^0	p	n
$(q_p + q_n)$	0	1	1	3	3
$(q_p - q_n)$	2	1	-1	1	-1
$2\Delta_{Ap}$	$2\delta_\rho$	$3\delta_\omega + \delta_\rho$	$3\delta_\omega - \delta_\rho$	$9\delta_\omega + \delta_\rho$	$9\delta_\omega - \delta_\rho$
$2\Delta_{An}$	$-2\delta_\rho$	$3\delta_\omega - \delta_\rho$	$3\delta_\omega + \delta_\rho$	$9\delta_\omega - \delta_\rho$	$9\delta_\omega + \delta_\rho$

By comparison of Eqs. (7c) and (10c) we see that the deuteron relation (8b) is unchanged by the symmetry breaking since there is no contribution from δ_ρ (the deuteron is an isosinglet and is not coupled to the ρ). However, not all the equalities (8a) hold if $\delta_\omega \neq \delta_\rho$. Instead, we

[9] JOHNSON, K., and S. B. TREIMAN: Phys. Rev. Letters **14**, 189 (1965).

[10] LEVINSON, C. A., N. S. WALL, and H. J. LIPKIN: Phys. Rev. Letters **17**, 1122 (1966).

have the weaker relations which can be read directly from Table 2.

$$\Delta(\pi^+ p)=\Delta(K^+ p)-\Delta(K^+ n)=\Delta(p\,p)-\Delta(p\,n)=2\delta_\rho, \tag{11a}$$

$$\Delta(K^+ p)+\Delta(K^+ n)=\tfrac{1}{3}\,[\Delta(p\,p)+\Delta(p\,n)]=6\delta_\omega. \tag{11b}$$

Relations (11a) have contributions only from δ_ρ. Relation (11b) has contributions only from δ_ω and is seen to be equivalent to the deuteron relation (8b). The direct comparison of relations (11) with experiment is difficult because of the large experimental errors in the $\bar{p}n$ cross section[11]. For this reason the following linear combination of relations (11a) and (11b) was proposed[10] in which $\Delta(pn)$ is eliminated.

$$2\Delta(K^+ p)+\Delta(K^+ n)=2\Delta(p\,p)=9\delta_\omega+\delta_\rho. \tag{11c}$$

Eqs. (11c) and (8b) have been found to be in very good agreement with experiment[11] and also the first equality of (11a) which involves only the mesons[12]. This agreement is significantly better than in the case of the relations (8a). This difference supports the description of the cross section differences Δ_{AB} by broken universal $U(3)$, Eq. (9), with universal couplings of all hadrons to ω and ρ trajectories which are proportional to the appropriate "charges": q_p+q_n and q_p-q_n. More careful examination of relations (11) and (8b) reveals[10] that the universal coupling of the π and K mesons to the ρ has been established, as well as the universal coupling of the K mesons and nucleons to the ω. However, the nucleon coupling to the ρ has not yet been established. The experimental errors prevent a significant check of the relations (11a), and the relation (11c) which is in good agreement with the experiment is dominated by the ω contribution and insensitive to the contribution of the ρ.

Explicit Calculations of Relations Between Cross Section Sums Σ_{AB}

A similar analysis can be made for the case of the sums Σ_{ab} of the cross sections. However, the full universal $U(3)$ symmetry* is not a good approximation in this case. The expression analogous to Eq. (6) gives predictions which disagree with experiment. Furthermore, the introduction of symmetry breaking by analogy with Eq. (9) still does not lead to agreement with experiment.

For this case it is more convenient to begin with the most general expression for Σ_{AB} which incorporates isospin symmetry but no other symmetries, rather than with the most symmetric expression as in the case of Δ_{AB}. Let us consider Eq. (9) which is expressed in terms of 3

[11] Galbraith, W., B. W. Jenkins, T. F. Kycia, B. A. Leontic, R. H. Phillips, A. B. Read, and R. Rubinstein: Phys. Rev. **138**, B 913 (1965).

[12] Barger, V., and M. H. Rubin: Phys. Rev. **140**, B 1365 (1965).

"charges" having the quantum numbers of the vector mesons ρ, ω and φ, and following from the assumption that Δ_{ij} is diagonal in this basis. If this assumption is not valid, the only off-diagonal matrix elements which can appear without violating isospin conservation are those mixing the two isosinglet charges corresponding to ω and φ. Thus the most general expression for Σ_{AB} which conserves isospin is

$$\begin{aligned}\Sigma_{AB}=&\tfrac{1}{2}\sigma_1(\hat{q}_p^A-\hat{q}_n^A)(\hat{q}_p^B-\hat{q}_n^B)+\\&+\sigma_0[\alpha(\hat{q}_p^A+\hat{q}_n^A)+\beta\hat{q}_\lambda^A][\alpha(\hat{q}_p^B+\hat{q}_n^B)+\beta\hat{q}_\lambda^B]+\\&+\sigma_0'[\beta(\hat{q}_p^A+\hat{q}_n^A)-\alpha\hat{q}_\lambda^A][\beta(\hat{q}_p^B+\hat{q}_n^B)-\alpha\hat{q}_\lambda^B]\end{aligned}\tag{12}$$

where σ_1, σ_0 and σ_0' represent the contributions of the exchange of an isotriplet and of two isosinglets respectively, and α and β are the mixing parameters determined by the diagonalization of the matrix Σ_{ij}.

Eq. (12) is immediately simplified by substituting $\hat{q}_\lambda^B=0$ for all physical targets, and by inserting the values of $\hat{q}_p$ and $\hat{q}_n$ for the proton, neutron and deuteron cases. These are the same as the odd charges q_p and q_n since targets do not contain any antiquarks.

$$\begin{aligned}\Sigma_{AB}=&\tfrac{1}{2}\sigma_1(\hat{q}_p^A-\hat{q}_n^A)(q_p^B-q_n^B)+(\alpha^2\sigma_0+\beta^2\sigma_0')(\hat{q}_p^A+\hat{q}_n^A)(q_p^B+q_n^B)+\\&+\alpha\beta(\sigma_0-\sigma_0')\hat{q}_\lambda^A(q_p^B+q_n^B),\end{aligned}\tag{13a}$$

$$\Sigma_{Ap}=\tfrac{1}{2}\sigma_1(\hat{q}_p^A-\hat{q}_n^A)+3(\alpha^2\sigma_0+\beta^2\sigma_0')(\hat{q}_p^A+\hat{q}_n^A)+3\alpha\beta(\sigma_0-\sigma_0')\hat{q}_\lambda^A,\tag{13b}$$

$$\Sigma_{An}=-\tfrac{1}{2}\sigma_1(\hat{q}_p^A-\hat{q}_n^A)+3(\alpha^2\sigma_0+\beta^2\sigma_0')(\hat{q}_p^A+\hat{q}_n^A)+3\alpha\beta(\sigma_0-\sigma_0')\hat{q}_\lambda^A,\tag{13c}$$

$$\Sigma_{Ad}=6(\alpha^2\sigma_0+\beta^2\sigma_0')(\hat{q}_p^A+\hat{q}_n^A)+6\alpha\beta(\sigma_0-\sigma_0')\hat{q}_\lambda^A.\tag{13d}$$

The relevant properties of mesons and nucleons are tabulated in Table 3.

Table 3. *Computation of* Σ_{AB}

	π^+	K^+	K^0	p	n
q_p+q_n	2	1	1	3	3
q_p-q_n	0	1	−1	1	−1
q_λ	0	1	1	0	0

By inspection of Table 3 and Eq. (13) we see that five independent meson-nucleon and nucleon-nucleon scattering processes are expressed in terms of three independent charges. There are therefore two independent relations between them,

$$\Sigma(pp)+\Sigma(np)=3\Sigma(\pi p)=18(\alpha^2\sigma_0+\beta^2\sigma_0'),\tag{14a}$$

$$\Sigma(pp)-\Sigma(np)=\Sigma(Kp)-\Sigma(Kn)=\sigma_1.\tag{14b}$$

The relation equivalent to (14a) for a deuteron target is

$$2\Sigma(p\,d)=3\Sigma(\pi\,d)\,. \tag{14c}$$

Relations (14) are in reasonable agreement with experiment for relations between meson-baryon and baryon-baryon cross sections, in view of the kinematical uncertainties associated with mass differences. If relations (14a) are compared with the experiment at the same center of mass energy for (πN) and (NN), a systemic discrepancy[1] of about 20% is found in data between 6 to 18 GeV/c. However, if the *same relative velocity*[13] is used rather than the same center of mass energy, a much better agreement is indicated. If, however, β is set equal to zero in Eq. (12) by analogy with Eq. (9) as would be the case for universal $U(3)$ symmetry the contribution of q_λ drops out and the following relation is obtained which is in strong disagreement with the experiment[7,14]

$$\Sigma(K\,p)+\Sigma(K\,n)=\Sigma(\pi\,p) \quad \text{if} \quad \beta=0\,. \tag{15}$$

Relations Between Δ_{AB} and Σ_{AB}

So far the sums and differences of the total cross sections have been considered independently. Let us now look for a different type of symmetry which relates the two. The obvious extreme example is to assume that both matrices $C_{\mu\,i}$ and $\hat{C}_{\mu\,i}$ are equal to the unit matrix, and that the eigenvalues δ_μ and σ_μ are all equal in Eqs. (3) and (4). This is a universal $U(6)$ symmetry and expresses all cross sections in terms of a single parameter $\sigma=\sigma_\mu=\delta_\mu$.

$$\sigma_{AB}=\sum_i (n_i^A\,n_i^B+n_i^{\bar{A}}\,n_i^{\bar{B}})\,\sigma\,. \tag{16}$$

This relation implies that the only non-vanishing scattering amplitudes at the quark level are those between *identical quarks or identical antiquarks*. Eq. (16) is clearly in disagreement with experiment, as it predicts $\sigma_{K^-p}=\sigma_{K^-n}=0$. This can be seen by noting that identical quark scattering can occur with a nucleon target only if the incident beam contains p or n quarks, while the K^- contains only a λ-quark and an antiquark.

Another possibility is to assume that $C_{\mu\,i}=\hat{C}_{\mu\,i}=I$ as before, but to assume that δ_μ and σ_μ are equal in magnitude but have *opposite* sign. This is intuitively reasonable, if one thinks of q as the charge of a vector field and $\hat{q}$ as that of a scalar field. Like charges repel in the vector case, while they attract in the scalar case, and unlike charges attract in both cases. Thus if the couplings are all equal, one should expect the scalar and vector contributions to *add* for quark-antiquark scattering and to

[13] JAMES, P. B., and H. D. D. WATSON: Phys. Rev. Letters **18**, 179 (1967).
[14] DESAI, B. P., and P. G. O. FREUND: Phys. Rev. Letters **16**, 622 (1966).

cancel for quark-quark scattering. With this assumption, one obtains

$$\sigma_{AB}=\sum_i (n_i^A\, n_i^B+n_i^{\bar{A}}\, n_i^{\bar{B}})\,\sigma\,. \tag{17}$$

This particular relation between even and odd trajectories in the Regge-pole model has been proposed and called "exchange degeneracy"[15]. In the extreme form given in Eq. (17) it predicts $\sigma_{K^+p}=\sigma_{K^+n}=0$. Here we now have non-vanishing contributions only from identical quark-anti-quark pairs, and scattering on a nucleon target can occur only if the beam contains $\bar{p}$ or $\bar{n}$ antiquarks. This prediction is also in disagreement with experiment, but is not so unreasonable. The K^+p and K^+n cross sections are equal to one another, constant with energy within experimental errors from 6 to 18 GeV/c, and are the smallest of all meson-baryon cross sections. One might reasonably assume that these constant cross sections are entirely due to the exchange of the Pomeranchuk trajectory, which is universally coupled to all quarks, and gives a constant contribution to all meson-baryon cross sections. One can then assume that Eq. (17) gives all the remaining contributions which are added to the Pomeranchuk contribution to give the total cross section.

One can keep the exchange degeneracy and break the symmetry by replacing σ in (17) by a quantity which depends upon the index i, and by introducing off-diagonal terms in the matrices $C_{\mu i}$ and $\hat{C}_{\mu i}$, while keeping them equal. Qualitative agreement with experiment is obtained in this way by using mixing angles corresponding to the physical ρ and ω vector mesons, and by keeping exchange degeneracy for the trajectories with the quantum numbers of the ρ and ω, if the Pomeranchuk contribution is added separately. The trajectory with the quantum numbers of the φ are not coupled to the nucleon and do not contribute. However, the exchange degeneracy for the two isotriplet trajectories is sufficient to give the observed equality of the K^+p and K^+n cross sections, and one can use other parametrizations to fit the experimental data[6,7]. Without the assumption of exchange degeneracy or some equivalent assumption, the equality and constancy of the K^+p and K^+n cross sections is accidental.

Without exchange degeneracy, the assumption that δ_μ and σ_μ must have opposite sign leads to a set of inequalities between cross sections. These were first found in a Regge-pole model[6] and the intuitive argument about like and unlike charges is a simplified version of this treatment. These inequalities are found to be in agreement with experiment[6].

The author would like to thank J. DABOUL for calling the relations (1) of this paper to his attention and for many interesting discussions. Valuable discussions with Y. NE'EMAN and H. RUBINSTEIN are also gratefully acknowledged.

[15] ARNOLD, R. C.: Phys. Rev. Letters **14**, 657 (1965).

Zeitschrift für Physik 202, 425–435 (1967)

Nuclear Motion Corrections to the Binding Energy in Hydrogen

An Effective Potential Approach*

H. GROTCH and D. R. YENNIE
Laboratory of Nuclear Studies, Cornell University, Ithaca/New York

Received March 3, 1967

Most of the calculations of nuclear recoil corrections to the atomic binding in hydrogen have been done using the covariant Bethe-Salpeter equation. In this paper an alternative to the Bethe-Salpeter approach in the form of a modified Dirac equation is presented. It contains the usual Hamiltonian for an electron in the field of a static proton, but it also includes the proton's kinetic energy and an interaction term due to transverse photons. The part of the interaction which produces the hyperfine splitting is extracted and treated perturbatively, whereas the remainder of the potential is retained, rearranged, and approximated in such a way as to make the resulting equation soluble. In a simple way, we are able to obtain reduced mass corrections to the fine structure and the hyperfine structure of hydrogen. An extension of the work, which enables us to calculate additional recoil terms not included in our lowest order effective potential, is briefly described.

I. Introduction

Many precision experiments have been conducted to measure the spacing of atomic energy levels in hydrogen-like atoms. The experimental refinements have made it necessary for theorists to include smaller and smaller corrections to their calculations. For example, the recoil and finite extension of the nucleus must be considered in order to attain an accuracy comparable to that of the experiments.

About fifteen to twenty years ago, BREIT and his co-workers[1–4] attempted an approximately relativistic treatment of nuclear motion corrections to the fine structure and the hyperfine structure of hydrogen, but their approach did not obtain any terms of the type $(\alpha m/M)$ fs and $(\alpha m/M)$ hfs**. As pointed out by SALPETER[5] in his work on such recoil

* Work supported in part by Office of Naval Research.

** Terms which involve powers of the fine structure constant in addition to powers of the ratio of electron to proton mass will usually be referred to as recoil corrections. Reduced mass terms do not have powers of α. The abbreviations fs and hfs stand for fine structure and hyperfine structure respectively.

[1] BREIT, G.: Phys. Rev. **34**, 553 (1929).
[2] BREIT, G., and R. E. MEYEROTT: Phys. Rev. **72**, 1023 (1947).
[3] BREIT, G., and G. E. BROWN: Phys. Rev. **74**, 1278 (1948).
[4] BREIT, G., G. E. BROWN, and G. B. ARFKEN: Phys. Rev. **76**, 1299 (1949).
[5] SALPETER, E. E.: Phys. Rev. **87**, 328 (1952).

corrections, the Breit equation corresponds to single-electron theory rather than hole theory. These terms can only be found if the equivalent of hole theory is used. SALPETER's calculation, which is based on the fully relativistic Bethe-Salpeter[6,7] equation, reveals the presence of such terms in the fine structure. ARNOWITT[8] and NEWCOMB and SALPETER[9] independently obtained these recoil corrections to the hyperfine structure by completely covariant techniques, the former based on a method developed by KARPLUS, KLEIN, and SCHWINGER[10,11] and the latter based on the Bethe-Salpeter equation.

Although a completely relativistic approach, such as that provided by the Bethe-Salpeter equation, certainly has merits for treating bound state problems, there are computational and conceptual difficulties which arise. The Bethe-Salpeter equation is complete and accurate if enough terms are included in the kernel, but it is a four dimensional two-body equation whose wave functions are not easily interpreted. Furthermore, if only the Coulomb kernel is used, it does not reduce to the Dirac equation in the limit of an infinitely massive proton. The Breit equation, on the other hand, does have the correct limit.

In an effort to re-evaluate the nuclear motion and nuclear size corrections to the hyperfine structure, we have developed a method essentially based on the Breit equation. In the original work of BREIT, the equation was solved for a Coulomb potential and the transverse photons were treated perturbatively. Our treatment handles the proton nonrelativistically, exploits the smallness of the ratio of the electron to proton mass, and solves a one-body equation in the presence of the Coulomb potential and part of the Breit interaction.

The lowest order potential to be inserted in a Dirac equation which includes the proton's kinetic energy is obtained from the Born amplitude for electron-proton scattering in the center of mass system. The proton spin-dependent part of the potential is separated and is handled by first order perturbation theory, whereas the remainder of the potential is rearranged and treated exactly after certain small terms are discarded. The solution of this Dirac equation turns out to be the usual Coulomb wave function but with a modified electron mass and a slightly different fine structure constant.

---

[6] SALPETER, E. E., and H. A. BETHE: Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).

[7] For a rigorous derivation of the Bethe-Salpeter equation based on quantum field theory see GELL-MANN, M., and F. LOW: Phys. Rev. **84**, 350 (1951).

[8] ARNOWITT, R.: Phys. Rev. **92**, 1002 (1953).

[9] NEWCOMB, W. A., and E. E. SALPETER: Phys. Rev. **97**, 1146 (1955).

[10] KARPLUS, R., and A. KLEIN: Phys. Rev. **85**, 972 (1952).

[11] KARPLUS, R., A. KLEIN, and J. SCHWINGER: Phys. Rev. **86**, 288 (1952).

In this way, we obtain reduced mass corrections to the fine structure and hyperfine structure in a very simple conventional way[12]. As was previously mentioned, single-particle electron theory does not predict certain recoil corrections and therefore our treatment seems deficient in this respect. It is possible, however, to modify the lowest order potential in such a way as to correct this drawback. We discuss this modification in our concluding section but do not explicitly calculate these recoil terms in this paper. These corrections are currently being evaluated and will be published in a separate paper later.

II. Lowest Order Potential and the Dirac Equation

In the center of mass system, the free Hamiltonian for an electron and a nonrelativistic proton is

$$H_0 = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta m + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2M}. \tag{1}$$

The interaction between the electron and the proton will be expressed in terms of an effective potential. In lowest order this effective potential is chosen so as to give the same scattering amplitude as the one-photon exchange amplitude contribution illustrated in Fig. 1a. In higher orders, the effective potential will be chosen so as to correct for the failure of the iteration of the lowest order potential to match the amplitude of the

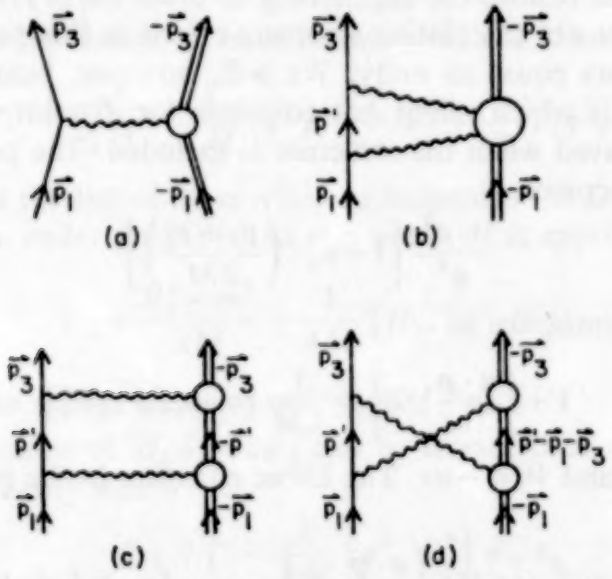


Fig. 1a—d. Electron-proton scattering amplitudes in the center-of-mass system. a One photon exchange; b Complete two photon exchange; c and d Approximations to b using on the mass shell form factors and no excited states

[12] A somewhat similar effective potential approach has recently been used for the hfs by FAUSTOV, R. N.: Nuclear Phys. **75**, 669 (1966).

multiple photon exchange. The proton vertex of Fig. 1a is taken between free spinors and terms up to order M^{-1} are retained. In the Coulomb gauge, the momentum space representation of the potential is*

$$V_{\text{eff}} + \Delta V_{\text{eff}} = \frac{-e^2}{q^2} F_e(q^2) \left[1 + \boldsymbol{\alpha}_\perp \cdot \left(\frac{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_3}{2M}\right)\right] + \frac{i}{2M} \frac{e^2}{q^2} \mu_p F_m(q^2) \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{\sigma}_p . \tag{2}$$

From now on, the wave function is understood to be a two-component spinor for the proton and a four-component spinor for the electron.

It should be recognized that as far as the scattering amplitude is concerned we could replace $\boldsymbol{\alpha}_\perp$ by $\boldsymbol{\alpha}$ in Eq. (2); the difference vanishes in the center-of-mass frame. This illustrates a general ambiguity in the definition of an effective potential; one may always add terms whose matrix element is zero for real scattering. Such terms will not vanish in higher order or for bound states. This ambiguity can be used to minimize the importance of higher order terms in the effective potential. The present choice of retaining the transversality condition by using the Coulomb gauge does seem to be an optimum one from the point of view of reducing the corrections from higher photon terms. It is not difficult to show that had we omitted the transversality condition the usual Dirac degeneracy in hydrogen would be split by an amount of order (m/M) fs rather than $(\alpha m/M)$ fs. The higher order corrections would of course restore the degeneracy to order (m/M) fs.

Since we are not calculating structure effects in this paper we will set the form factors equal to unity. We will, however, bear in mind that certain integrals which might not converge for a point proton will be quite well-behaved when the structure is included. The potential V_{eff} in Eq. (2) then becomes

$$\frac{-e^2}{q^2} \left[1 + \boldsymbol{\alpha}_\perp \cdot \left(\frac{\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_3}{2M}\right)\right]$$

which in position space is

$$V + \left\{\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p}}{2M}, V\right\} + \frac{1}{4M} [\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p}, [\boldsymbol{p}^2, W]]$$

with $V = -\alpha/r$ and $W = -\alpha r$. The Dirac equation in the presence of this potential is

$$\left(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta m + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2M} + V + \left\{\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p}}{2M}, V\right\} + \frac{1}{4M} [\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p}, [\boldsymbol{p}^2, W]]\right) \psi(\boldsymbol{r}) = E \psi(\boldsymbol{r}). \tag{3}$$

* This potential is essentially the Coulomb plus Breit potentials. It is really a reduction of the proton to order M^{-1} which includes structural effects. $\boldsymbol{\alpha}_\perp$ is the component of $\boldsymbol{\alpha}$ perpendicular to $\boldsymbol{q}$ and μ_p is the total magnetic moment of the proton.

Note that as $M\to\infty$ this reduces to the ordinary Dirac equation with a Coulomb potential.

III. Solutions

We notice that some of the M-dependent terms appearing in Eq. (3) are contained in the square of Dirac Hamiltonian $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m+V$. This suggests a rearrangement of Eq. (3) in terms of a simpler Hamiltonian whose solutions are more readily obtained. The choice made is governed by our desire to recover the correct nonrelativistic limit for the wave function and for the energy eigenvalue. We find that H may be rewritten as

$$H=H_1+\frac{H_1^2-m^2}{2M}+\frac{1}{4M}[H_1,[\boldsymbol{p}^2,W]]+ \\ +\frac{m}{2(M^2-m^2)}\left\{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p},V\beta\left(1-\beta\frac{m}{M}\right)\right\}+\frac{m\beta V^2}{2M^2}\frac{\left(1-\beta\dfrac{m}{M}\right)^2}{\left(1-\dfrac{m^2}{M^2}\right)^2} \tag{4}$$

where

$$H_1=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m+V\frac{\left(1-\beta\dfrac{m}{M}\right)}{1-\dfrac{m^2}{M^2}}.$$

To obtain this expression we have made use of the identities

$$\{\boldsymbol{\alpha},\beta\}=0,\qquad \frac{\boldsymbol{p}^2}{2M}=\frac{1}{2M}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2,\qquad V^2+\tfrac{1}{2}[V,[\boldsymbol{p}^2,W]]=0.$$

The validity of the last of these relations maintains the Dirac degeneracy in hydrogen to order (m/M) fs. At this point, H is approximated by

$$H_1+\frac{H_1^2-m^2}{2M}+\frac{1}{4M}[H_1,[\boldsymbol{p}^2,W]]$$

the error in the energy being of order $(m/M)^2\alpha^4$.

If the solutions of $H_1\psi_0=\varepsilon\psi_0$ can be found, then the solutions of $H\psi=E\psi$ are easily seen to be

$$\psi\approx N\left(1-\frac{1}{4M}[\boldsymbol{p}^2,W]\right)\psi_0$$

where N is a normalization constant. The energy eigenvalue is then equal to

$$\varepsilon+\frac{\varepsilon^2-m^2}{2M}.$$

Therefore, we want to solve

$$\left[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m+V\frac{\left(1-\beta\frac{m}{M}\right)}{1-\frac{m^2}{M^2}}\right]\psi_0=\varepsilon\psi_0\,. \tag{5}$$

Let $\psi_0=(1+\beta\lambda)\varphi$ where λ is a constant to be chosen in such a way that the equation for φ does not contain a term βV. Substituting for ψ_0, multiplying Eq. (5) on the left by $1+\beta\lambda$, and dividing by $1-\lambda^2$, we obtain, with the choice

$$\lambda=\frac{M}{m}\left(1-\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}\right),$$

$$\left[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m\frac{\left(1-\frac{\varepsilon}{M}\right)}{\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}}+\frac{V}{\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}}\right]\varphi=\frac{\varepsilon\left(1-\frac{m^2}{\varepsilon M}\right)}{\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}}\varphi\,. \tag{6}$$

This may easily be verified. The above equation is the Dirac equation for a particle of mass

$$m'\equiv\frac{m\left(1-\frac{\varepsilon}{M}\right)}{\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}}\approx m\sqrt{\frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}}$$

in the field of a Coulomb potential

$$-\frac{\alpha}{r}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}}\equiv-\frac{\alpha'}{r}\,.$$

The solutions of this equation are well known[13]. They are functions $\varphi_{n\,l,\,jm}(m'\alpha' r,\alpha')$. Note that

$$m'\alpha'\approx\frac{m\alpha}{1+\frac{m}{M}}=m_{\mathrm{red}}\alpha$$

if we approximate m' as above. If φ is normalized to unity, the normalization condition leads to a value

$$N=\frac{1}{1+\lambda}$$

[13] See BETHE, H. A., and E. E. SALPETER: Quantum mechanics of one- and two-electron atoms. New York: Academic Press Inc. 1957.

with an error

$$O\left(\frac{m}{M}\alpha^2\right).$$

The contribution to ψ from

$$\frac{1}{4M}[\boldsymbol{p}^2, W]\psi_0$$

is ignored since it is

$$O\left(\frac{m}{M}\alpha^2\right)\psi_0$$

for values of r near the Bohr radius. It should be pointed out that this term, if retained, would lead to a logarithmic divergence in the hyperfine splitting. If structure is included, as it must be, this contribution is finite and is too small to be of any consequence.

Therefore, to the desired accuracy the wave function is

$$\psi=\left(\frac{1+\beta\lambda}{1+\lambda}\right)\varphi$$

and the large and small components are respectively

$$\psi_L=\varphi_L,$$

$$\psi_S=\sqrt{\frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}}\,\varphi_S.$$

IV. Fine Structure and Hyperfine Structure — Reduced Mass Corrections

The energy eigenvalue is

$$\varepsilon+\frac{\varepsilon^2-m^2}{2M}.$$

It may be obtained by first solving the equation*

$$\frac{\varepsilon\left(1-\frac{m^2}{\varepsilon M}\right)}{\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}}=\frac{m\left(1-\frac{\varepsilon}{m}\right)}{\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}}f\left(n, j, \frac{\alpha}{\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}}\right). \tag{7}$$

* $f(n, j, \alpha)=\left[1+\left(\frac{\alpha}{n-(j+\frac{1}{2})+\sqrt{(j+\frac{1}{2})^2-\alpha^2}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$.

This relation between the energy eigenvalue and the mass holds for the Dirac equation with a Coulomb potential.

The value of the energy is

$$\varepsilon = \frac{mf + \dfrac{m^2}{M}}{1 + \dfrac{m}{M} f}$$

and

$$E = m + \frac{m(f-1)\left(1-\dfrac{m^2}{M^2}\right)}{1+\dfrac{m}{M}f} + \frac{m^2}{2M}(f-1)^2 \frac{\left(1-\dfrac{m}{M}\right)^2}{\left(1+\dfrac{m}{M}f\right)^2}.$$

This is approximately

$$m + \frac{m(f-1)\left(1-\dfrac{m^2}{M^2}\right)}{1+\dfrac{m}{M}} \left[1 - \frac{\dfrac{m}{M}(f-1)}{1+\dfrac{m}{M}}\right] + \frac{m^2}{2M}(f-1)^2 \frac{\left(1-\dfrac{m}{M}\right)^2}{\left(1+\dfrac{m}{M}\right)^2},$$

$$= m + m(f-1)\left(\frac{1-\dfrac{m^2}{M^2}}{1+\dfrac{m}{M}}\right) + \frac{m^2}{2M}(f-1)^2 \frac{\left(1-\dfrac{m}{M}\right)\left(-1-\dfrac{3m}{M}\right)}{\left(1+\dfrac{m}{M}\right)^2}$$

which is obtained by expanding up $f-1$ from the denominators. We then find

$$f\left(n, j, \frac{\alpha}{\sqrt{1-\dfrac{m^2}{M^2}}}\right) - 1$$

$$= -\frac{1}{2n^2}\left(\frac{\alpha^2}{1-\dfrac{m^2}{M^2}}\right)\left[1 + \frac{1}{n}\left(\frac{\alpha^2}{1-\dfrac{m^2}{M^2}}\right)\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right) + O(\alpha^4)\right]$$

and therefore

$$E = m + \frac{m}{1+\dfrac{m}{M}}[f(n, j, \alpha) - 1] + \tag{8}$$

$$+ O\left(\frac{m^2}{M}\frac{\alpha^4}{n^4}\right) + O\left(\frac{m^2}{M^2}\,\mathrm{f\,s}\right) + O\left(\frac{m}{M}\frac{\alpha^2}{n^2}\,\mathrm{f\,s}\right).$$

It should be strongly emphasized that

$$\frac{m}{1+\frac{m}{M}}[f(n,j,\alpha)-1]$$

contains some terms of the same magnitude as those which were neglected. For practical purposes these may be rejected also, but since they are very small we choose to retain them. For example, terms like $(m/M)^2$ fs are still too small to measure in the hydrogen atom.

The change of the energy levels induced by the proton spin-dependent part of the potential may be evaluated by first order perturbation theory. It gives rise to the hyperfine splitting.

In momentum space we obtain

$$\frac{i}{2M}\mu_p e^2 \int d^3p_1 d^3p_3 \psi^\dagger(\boldsymbol{p}_3)\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{\sigma}_p}{\boldsymbol{q}^2}\psi(\boldsymbol{p}_1).$$

The evaluation of this integral involves the product of the large and small components of the wave function ψ. Therefore, to convert to an expression with the wave function φ, we multiply by

$$\sqrt{\frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}},$$

the factor connecting ψ_S to φ_S. The resulting integral is

$$\frac{i}{2M}\mu_p e^2 \sqrt{\frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}} \int d^3p_1 d^3p_3 \varphi^\dagger(\boldsymbol{p}_3)\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{\sigma}_p}{\boldsymbol{q}^2}\varphi(\boldsymbol{p}_1). \tag{9}$$

If the proton's mass is infinite, the above integral becomes*

$$\frac{-i}{3}(m\alpha)^2\frac{\alpha}{\pi}\left(1+\frac{3}{2}\alpha^2\right)\langle\boldsymbol{\sigma}_e\cdot\boldsymbol{\sigma}_p\rangle.$$

This includes the basic Fermi splitting and also the Breit relativistic correction to it. Since our wave function depends on $m_{\text{red}}\alpha$ rather than $m\alpha$ and on

$$\frac{\alpha}{\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}}$$

* See reference [2].

rather than α, we obtain simply

$$\frac{i}{2M}\mu_p e^2 \sqrt{\frac{1-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}}\left(\frac{-i}{3}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}\frac{(m\alpha)^2}{\pi}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\frac{m^2}{M^2}}}\times$$
$$\times\left(1+\frac{3}{2}\frac{\alpha^2}{1-\frac{m^2}{M^2}}\right)\langle\sigma_e\cdot\sigma_p\rangle$$
$$=\frac{2\pi\alpha}{3mM}\frac{(m_{\rm red}\alpha)^3}{\pi}\left(1+\frac{3}{2}\frac{\alpha^2}{1-\frac{m^2}{M^2}}\right)\langle\sigma_e\cdot\sigma_p\rangle.$$

Therefore the hyperfine splitting between the triplet and singlet spin states, E_F, is modified to

$$\left(\frac{m_{\rm red}}{m}\right)^3 E_F\left(1+\frac{3}{2}\frac{\alpha^2}{1-\frac{m^2}{M^2}}\right).$$

In this simple way we obtain the reduced mass correction to the hyperfine structure as well as an entirely negligible change in the Breit correction.

V. Discussion

From our lowest order potential we have obtained nuclear motion corrections to the binding energy in hydrogen. These include reduced mass corrections to the fine structure and hyperfine structure. As discussed in the Introduction, we must modify the effective potential in order to obtain recoil corrections which are only obtained in hole theory, and are absent in single-particle theory. We will briefly describe the procedure for finding these terms as well as finite-size effects.

By explicitly using the form factors in Eq. (2) we may obtain a structure correction in terms of an appropriate radius for the proton [14, 15]. The extended charge changes the wave function which is used, while the spread out magnetic moment alters the perturbation, the proton spin-dependent part of the potential. Additional structure and recoil come from an addition to the potential.

The selection of a potential is made under the assumption that one which properly accounts for the observed electron-proton scattering

[14] BROWN, G. E., and G. B. ARFKEN: Phys. Rev. **76**, 1305 (1949).
[15] ZEMACH, A. C.: Phys. Rev. **104**, 1771 (1956).

should be adequate for use in the bound state problem. Therefore, our lowest order potential was chosen from the single photon exchange Feynman diagram, Fig. 1a. The second iteration of this potential in a Lippman-Schwinger formalism does not agree with the scattering predicted by the two-photon exchange Feynman graph shown in Fig. 1b. This situation may be remedied by adding to the potential the difference between the two-photon exchange and the iteration. The new potential will have the property that its first and second iterations give the correct scattering amplitude. From a practical point of view, we are only interested in corrections to the potential which alter the hyperfine splitting, although the same procedure should be used for finding modifications of the fine structure levels.

The two photon exchange Feynman amplitude is not calculable since it will involve strong interactions, but it may be treated approximately be neglecting polarization effects and off the mass shell form factor contributions. The diagrams actually used are shown in Figs. 1c and 1d. Since we have handled the potential ΔV_{eff} of Eq. (2) by first order perturbation theory, consistency demands that the iteration should not include terms in which ΔV_{eff} appears twice. Such terms will arise from the two photon amplitude as corrections to the potential rather than from second order perturbation theory with ΔV_{eff}.

By correcting the potential in the way outlined above, we will obtain recoil terms of order $(\alpha m/M)$ hfs modified by the structure of the proton. These have previously been calculated for a point proton* by ARNOWITT and by NEWCOMB and SALPETER, and for an extended proton by IDDINGS and PLATZMAN[16]. We believe that our method is much simpler. It should appeal to those who, like ourselves, find the perturbation theory based on the Bethe-Salpeter equation cumbersome and difficult to use.

---

* The result for a point proton is logarithmically divergent in the double Pauli terms.

[16] IDDINGS, C. K., and P. M. PLATZMAN: Phys. Rev. **113**, 192 (1958).

Zeitschrift für Physik 202, 436–451 (1967)

The Reaction $\gamma\,{}^4\mathrm{He} \rightarrow {}^3\mathrm{H}\,n\,\pi^+$ in Impulse Approximation

T. P. KOKOTT, M. P. LOCHER, and H. ROLLNIK
Physikalisches Institut der Universität Bonn

Received March 11, 1967

The reaction $\gamma + {}^4\mathrm{He} \rightarrow {}^3\mathrm{H} + n + \pi^+$ is calculated in the impulse approximation. The influence of nuclear wave functions on the differential cross section is discussed numerically using Gaussian and Irving-Gunn wave functions for the triton and the α-particle. The differences are large enough to be looked for experimentally.

1. Introduction

Incoherent π^+-photoproduction on ${}^4\mathrm{He}$, namely the reaction

$$\gamma + {}^4\mathrm{He} \rightarrow {}^3\mathrm{H} + n + \pi^+ \qquad \text{(I)}$$

has been recently investigated by the Frascati bubble chamber group of ARGAN *et al.*[1,2]. Their analysis favours the existence of a low-lying ${}^4\mathrm{H}$ resonant state (with a Q value of a few MeV) decaying into ${}^3\mathrm{H} + n$. (There is no evidence for particle-stable ${}^4\mathrm{H}$.) Part of the arguments supporting this interpretation comes from the comparison of the experimental results with a theoretical calculation of the background reaction (I) in impulse approximation under the kinematical condition of the experiment in [2] by V. HIPPEL and DIVAKARAN[3]. But because of the controversy[4] concerning the existence of the ${}^4\mathrm{H}$ further more detailed experiments are necessary. To provide the theoretical background for such investigations we have carried through detailed calculations for the differential cross section of process (I) using the impulse approximation. Especially we studied the influence of different forms of the nuclear wave function for the triton and the α-particle. The final state interactions due to nuclear forces have not been taken into account, but we included the effect of the exclusion principle for the free neutron and the neutrons of the triton in reaction (I). Moreover we treated the photoproduction cross section on the proton not as a constant but used their

[1] ARGAN, P. E., G. BENDISCIOLI, A. PIAZZOLI, V. BISI, M. I. FERRERO, and G. PIRAGINO: Phys. Rev. Letters **9**, 405 (1962).

[2] ARGAN, P. E., G. C. MANTOVANI, and A. PIAZZOLI: Phys. Rev. **140**, B 601 (1965).

[3] (a) HIPPEL, F. V., and P. P. DIVAKARAN: Phys. Rev. Letters **12**, 128 (1964); **12**, 497 (E) (1964). — (b) Further results by the same authors, as given in [2].

[4] ARGAN, P. E., G. C. MANTOVANI, P. MARAZZINI, A. PIAZZOLI, and D. SCANNICCHIO: Nuovo cimento, Suppl. **3**, 245 (1965), esp. p. 246.

experimental energy dependence, contrary to the impulse approximation calculation done up till now.

Our basic formulae are given in section 2. The used radial part of the nuclear wave functions are described in section 3. In the last section we discuss some of our numerical results. The Appendix B contains a comparison of our results with previous calculations[3] and the Argan measurements.

2. General Form of the Matrix Element in Impulse Approximation

Starting with the basic papers of Ref. [5] on the application of the impulse approximation on photomeson production on nuclei a series of calculations has been done in this framework. For the special case of reaction (I) the matrix element has already been given in Ref. [3a], where it has been evaluated for Gaussian space wave functions in the overall CM-system and with a constant cross section at the production vertex. We use throughout the laboratory system of ^{4}He, for kinematics see Appendix A. To fix the notation and to show clearly all the assumptions involved, we write down the matrix element in some detail.

In the impulse approximation the transition matrix element is basically decomposed as

$$\langle {}^3\mathrm{H}, n, \pi^+ | T | \gamma, {}^4\mathrm{He} \rangle = \sum_{j=1}^{4} \langle {}^3\mathrm{H}, n | e^{i \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{r}_j} T_j | {}^4\mathrm{He} \rangle \qquad (1)$$

where the operator T_j denotes photoproduction on the j-th nucleon, which is considered to be on shell. $\boldsymbol{Q}$ denotes the momentum transfer on this nucleon ($\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}$, for notation, see Appendix A). The production must take place on a proton, a positive pion being produced. By the antisymmetry of the initial state it suffices to calculate the production of the pion on one of these protons, if only the correct normalization is respected. Due to the Pauli principle in the final state we are left essentially with three terms:

a direct term

Fig. 1a

[5] See, e.g., CHEW, G. F., and H. W. LEWIS: Phys. Rev. **84**, 779 (1951). — FESHBACH, H., and M. LAX: Phys. Rev. **81**, 189 (1951); **88**, 509 (1952).

and two exchange terms

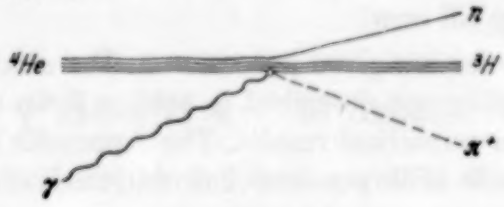


Fig. 1b

where the free neutron of the final state can be one of the spectator neutrons in the α-particle target.

For the wave functions of ^{4}He and ^{3}H entering into (1) we assume a totally symmetric S-wave space part and are thus led to the following expressions:

α-particle[6]:

$$\varphi_\alpha = \frac{\sqrt{2M_\alpha}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\,\psi_\alpha(r_{ij})\,\chi_\alpha\,e^{i\,\boldsymbol{p}_\alpha\,\boldsymbol{R}_\alpha} \tag{2}$$

where

$$r_{ij}=|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|;\qquad \boldsymbol{R}_\alpha=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{r}_i$$

and

$$\chi_\alpha=\mathscr{A}_4\{u^+(1)\,u^-(2)\,u^+(3)\,u^-(4)\,\eta_-(1)\,\eta_-(2)\,\eta_+(3)\,\eta_+(4)\}. \tag{2a}$$

$\mathscr{A}_4$ is the antisymmetrization operator for four particles and $u^\pm$ resp. $\eta_\pm$ denote the spin resp. isospin vectors of the four nucleons. The spin-isospin wave function (2a) leads automatically to $S=0$ and $I=0$ as it must be for the α-particle.

Triton[7]:

$$\varphi_T=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\,\psi_T(r_{ij})\,\chi_T^s\,e^{i\,\boldsymbol{p}_T\,\boldsymbol{R}_T};\qquad s=\pm\tfrac{1}{2} \tag{3}$$

where

$$\boldsymbol{R}_T=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{r}_i$$

and

$$\chi_T^s=\mathscr{A}_3\{u^-(1)\,u^+(2)\,u^s(3)\,\eta_-(1)\,\eta_-(2)\,\eta_+(3)\} \tag{3a}$$

describes the spin-isospin function with $S=I=\frac{1}{2}$. The space wave functions ψ are normalized to unity. For the following considerations the

[6] GAMBA, A.: Nuovo cimento **8**, 605 (1961), and Ref. [7a].

[7] (a) GERJUOY, E., and J. SCHWINGER: Phys. Rev. **61**, 138 (1942). — (b) VERDE, M.: Helv. Phys. Acta: **23**, 453 (1950); (E) **24**, 298 (1951); — Nuovo cimento **7**, 283 (1950). — (c) DERRICK, G., and J. M. BLATT: Nuclear Phys. **8**, 310 (1958). — Other references can be found in these papers.

generalized Pauli principle is no longer important. Therefore we no longer write the isospin functions explicitely. Thus we use instead of (2a) and (3a):

$$\chi_a=\frac{u^+(1)\,u^-(2)-u^-(1)\,u^+(2)}{\sqrt{2}}\,\frac{u^+(3)\,u^-(4)-u^-(3)\,u^+(4)}{\sqrt{2}} \tag{2b}$$

and

$$\chi_T^s=\frac{u^+(1)\,u^-(2)-u^-(1)\,u^+(2)}{\sqrt{2}}\,u^s(3)\,. \tag{3b}$$

For the final state wave function of triton and neutron we write (restricting the production to the proton with the label "4")

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{p}_T,\boldsymbol{p}_n)=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}\{&e^{i\,\boldsymbol{p}_T\cdot\boldsymbol{R}_T+i\,\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{r}_4}\psi_T(r_{ij})\,\chi_T^s(1,2,3)\,\chi^{s'}(4)-\\&-e^{i\,\boldsymbol{p}_T\cdot\boldsymbol{R}'_T+i\,\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{r}_1}\psi_T(r'_{ij})\,\chi_T^s(4,2,3)\,\chi^{s'}(1)-\\&-e^{i\,\boldsymbol{p}_T\cdot\boldsymbol{R}''_T+i\,\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{r}_2}\psi_T(r''_{ij})\,\chi_T^s(1,4,3)\,\chi^{s'}(2)\}\end{aligned} \tag{4}$$

where $\chi^{s'}(4)=u^{s'}(4)$ is the spin-function of the neutron and the coordinates in the second (third) term are obtained by permuting 1 and 4 (2 and 4).

Inserting (2) and (4) into Eq. (1) we can easily factorize the transition matrix element in a nuclear part F depending on the nuclear wave functions and a part describing photoproduction on a free proton. We obtain for the first term in (4) corresponding to the graph Fig. 1a and all similar terms:

$$\begin{aligned}D=\frac{N}{(2\pi)^3}\int d^3r_1\,d^3r_2\,d^3r_3\,d^3r_4\,\times\\\times e^{-i\,(\boldsymbol{p}_T\cdot\boldsymbol{R}_T+\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{r}_4-\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{r}_4)}\,\psi_T^*\,\psi_a\,\langle\chi_T^s\,\chi^{s'}(4)|\,T_4\,|\chi_a\rangle\end{aligned} \tag{5}$$

where

$$N=\frac{2\sqrt{2M_a}}{\sqrt{3}(2\pi)^{\frac{3}{2}}};\qquad \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}$$

includes the effects of symmetrization of the wave functions. D therefore is the total direct contribution to the matrix element (1). Going over to Jacobian relative coordinates ξ_i [see (13)] we get

$$D=N\,\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}_T-\boldsymbol{p}_n)\,\langle\chi_T^s(1,2,3)\,\chi^{s'}(4)|\,T_4\,|\chi_a\rangle\,F(0,0,\boldsymbol{p}_T) \tag{5'}$$

with

$$\begin{aligned}F(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\int d^3\xi_1\,d^3\xi_2\,d^3\xi_3\,e^{i\,(\boldsymbol{p}_1\cdot\xi_1+\boldsymbol{p}_2\cdot\xi_2+\boldsymbol{p}_3\cdot\xi_3)}\times\\\times\psi_T^*(\xi_1,\xi_2)\,\psi_a(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,.\end{aligned}$$

The momentum delta function comes from the $\boldsymbol{R}_4$-integration.

The second and third term in Eq. (4), the exchange terms, factorize in the same manner

$$E = -N\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}_T-\boldsymbol{p}_n)\times$$
$$\times\left\{\langle\chi_T^s(4,2,3)\chi^{s'}(1)|\,T_4\,|\chi_a\rangle\,F\left(-\frac{\boldsymbol{Q}}{2},-\frac{\boldsymbol{Q}}{3},-\boldsymbol{p}_n\right)+\right. \tag{6}$$
$$\left.+\langle\chi_T^s(1,4,3)\chi^{s'}(2)|\,T_4\,|\chi_a\rangle\,F\left(+\frac{\boldsymbol{Q}}{2},-\frac{\boldsymbol{Q}}{3},-\boldsymbol{p}_n\right)\right\}.$$

The total matrix element is therefore

$$\langle{}^3\mathrm{H},n,\pi^+|\,T\,|\gamma,{}^4\mathrm{He}\rangle = D+E. \tag{1'}$$

The "inelastic form factor" F will be discussed separately.

In the production part $\langle\chi_T^s\,\chi^{s'}|\,T\,|\chi_a\rangle$ the spin dependence can be calculated using the explicit form for the production operator $T_4 = L+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{K}$ operating on particle four. The result for the exchange part E is the same as for D up to a factor $\frac{1}{2}$ which is compensated by the appearance of two terms in E.

Therefore the square of the matrix element, if we omit the δ^3-function, is given by:

$$\frac{1}{2}\sum_{s,s'}\left|\langle{}^3\mathrm{H},n,\pi^+|\,\tilde{T}\,|\gamma,{}^4\mathrm{He}\rangle\right|^2$$
$$=C'\left\{F(0,0,p_T)-F\left(\frac{\boldsymbol{Q}}{2},\frac{\boldsymbol{Q}}{3},\boldsymbol{p}_n\right)\right\}^2\{|\boldsymbol{L}|^2+|\boldsymbol{K}|^2\} \tag{7}$$

with

$$C' = (2\pi)^{-3}\frac{4}{3}M_a$$

where we have anticipated that F depends only on the moduli of the arguments.

Going over to the cross section in the lab. system of ^{4}He we have

$$d\sigma = \frac{4\pi^4}{k}\frac{m\cdot M_T}{M_a}\int\delta^4(k+p_a-q-p_T-p_n)\times$$
$$\times\frac{1}{2}\sum_{ss'}\left|\langle|\,\tilde{T}\,|\rangle\right|^2\frac{d^3p_T}{E_T}\frac{d^3p_n}{E_n}\frac{d^3q}{2E_\pi}. \tag{8}$$

Choosing as final state parameters, e.g. the energy of the pion E_π and the solid angles of pion and triton, we get

$$\frac{d\sigma}{dE_\pi\,d\Omega_\pi\,d\Omega_T} = 2\pi^4\frac{m\cdot M_T}{M_a}\frac{q}{k}\sum_{i=1}^{2}p_T^{(i)}\frac{\frac{1}{2}\sum_{ss'}\left|\langle|\,\tilde{T}\,|\rangle\right|^2}{\left|M_a+k-E_\pi-Q\dfrac{E_T^{(i)}}{p_T^{(i)}}\cos\vartheta\right|} \tag{9}$$

where $\vartheta = \sphericalangle\,\boldsymbol{Q},\,\boldsymbol{p}_T$, cp. Appendix A.

The absolute value of the triton three-momentum $\boldsymbol{p}_T$ is two-valued, see Eq. (A_1). The energy δ-function in (8) therefore leads to the two terms in Eq. (9).

Fortunately the factor $|L|^2+|\boldsymbol{K}|^2$ in (7) can be expressed directly by the cross section for π^+-photoproduction on protons, for which experimental values are available. In the laboratory system of the proton, henceforth called the "effective" system, the following relation holds

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_\pi^{\mathrm{eff}}}=2\pi^4\,\frac{q^{\mathrm{eff}}}{k^{\mathrm{eff}}}\,\frac{\{|L|^2+|\boldsymbol{K}|^2\}}{\left|1+\dfrac{k^{\mathrm{eff}}}{m}\left(1-\dfrac{E_\pi^{\mathrm{eff}}}{q^{\mathrm{eff}}}\cos\theta^{\mathrm{eff}}\right)\right|}. \tag{10}$$

Now, for the direct term, the momentum $\boldsymbol{p}$ of the proton is fixed by external kinematics $\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{p}_T$, and hence the energy and momentum transfer s and t in the $\pi^+ n$-CM-system is given. Thus we can easily relate the effective quantities to those of ^{4}He laboratory system:

$$s=(k^{\mathrm{eff}}+p^{\mathrm{eff}})^2=(k+p)^2;\qquad \boldsymbol{p}^{\mathrm{eff}}=0$$

and similarly for t. The resulting k^{eff}, $\cos\theta^{\mathrm{eff}}$ and E_π^{eff} are given in Appendix A.

For the exchange term in (7) we use the same relation (10) as a first approximation although in this case the energy in the photoproduction system is not fixed by the external momenta, the neutron produced being absorbed into the triton. However, numerically the overall cross section depends only weakly on the momentum dependence of the production cross section (10). The approximation made in the exchange term is therefore justified retrospectively.

Collecting our results the final formula for the differential cross section (9) reads

$$\frac{d^4\sigma}{dE_\pi\,d\cos\theta_\pi\,d\cos\theta_T\,d\Phi}$$

$$=\frac{2}{3}\pi^2 m\cdot M_T\frac{q}{k}\sum_{i=1}^{2}\frac{p_T^{(i)}\,\sigma^{(i)}\left|F(0,0,p_T^{(i)})-F\left(\dfrac{Q}{2},\dfrac{Q}{3},p_\pi^{(i)}\right)\right|^2}{\left|M_a+k-E_\pi-\dfrac{E_T^{(i)}}{p_T^{(i)}}\,Q\cos\vartheta\right|} \tag{11}$$

where

$$\sigma^{(i}=|L|^2+|\boldsymbol{K}|^2\qquad \text{cp. (10)}.$$

It remains to discuss the structure factor F.

3. Nuclear Wave Functions

In the previously defined approximation the nuclear wave functions enter only in the structure factor F defined in Eq. (5′). For reasons of simplicity we first choose as usually:

a) *Gaussian wave functions.*

$$\psi_\alpha(r_{ij})=\sqrt{N_\alpha}\,e^{-\alpha\sum_{i<j}^{4} r_{ij}^2} \quad \text{and} \quad \psi_T(r_{ij})=\sqrt{N_T}\,e^{-t\sum_{i<j}^{3} r_{ij}^2}. \tag{12}$$

In Jacobian coordinates

$$\xi_{n-1}=\boldsymbol{r}_n-\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}\boldsymbol{r}_i; \qquad \boldsymbol{R}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i \tag{13}$$

this leads to

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\xi_1,\xi_2,\xi_3)&=\sqrt{N_\alpha}\,e^{-\alpha(2\xi_1^2+\frac{8}{3}\xi_2^2+3\xi_3^2)}\\ \psi_T(\xi_1,\xi_2)&=\sqrt{N_T}\,e^{-t(\frac{3}{2}\xi_1^2+2\xi_2^2)}\end{aligned} \tag{12′}$$

with

$$N_\alpha=\left(\frac{2^7\alpha^3}{\pi^3}\right)^{\frac{3}{4}}; \qquad N_T=\left(\frac{12t^2}{\pi^2}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

The parameters α and t are connected to the rms radius by

$$\alpha=\frac{9}{64}\,\frac{1}{R_\alpha^2} \quad \text{and} \quad t=\frac{1}{6}\,\frac{1}{R_T^2}.$$

We take[8]

$$R_\alpha=1.59\times10^{-13}\,\text{cm}; \qquad R_T=1.68\times10^{-13}\,\text{cm}.$$

Absolute experimental results for reaction (I) not being available, we shall use the same parameters for both Gaussian and Irving-Gunn wave functions. The differences of the theoretical predictions are then only due to the form of the wave functions. For the triton the Irving-Gunn parameter has been fitted from the reaction $\gamma\,{}^3\text{H}\to n\,{}^2\text{H}$ as $R_T=1.94\cdot10^{-13}$ cm.

The integrations involved in F can be done by hand, the result is

$$\begin{aligned}F(p_1,p_2,p_3)=2^6\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{t^{\frac{3}{4}}}{\alpha^{\frac{9}{4}}}\left[\left(\frac{8}{3}+2\,\frac{t}{\alpha}\right)\left(2+\frac{3t}{2\alpha}\right)\right]^{-\frac{3}{4}}\times\\ \times\exp\left\{-\frac{p_1^2}{6t+8\alpha}-\frac{p_2^2}{8(t+\frac{4}{3}\alpha)}-\frac{p_3^2}{12\alpha}\right\}.\end{aligned} \tag{14}$$

---

[8] COLLARD, H., R. HOFSTADTER, A. JOHANSSON, R. PARKS, M. RYNEVELD, A. WALKER, M. R. YEARIAN, R. B. DAY, and R. T. WAGNER: Phys. Rev. Letters **11**, 132 (1963). — HOFSTADTER, R.: Revs. Modern Phys. **28**, 214 (1956).

b) Second we use *Irving-Gunn functions*[9], which seems to be more realistic at least for the triton[10]:

$$\psi_\alpha(r_{ij})=\sqrt{N_\alpha}\,\frac{e^{-\alpha\sqrt{\sum r_{ij}^2}}}{\sqrt{\sum r_{ij}^2}};\qquad \psi_T(r_{ij})=\sqrt{N_T}\,\frac{e^{-t\sqrt{\sum r}}}{\sqrt{\sum r_{ij}^2}} \tag{15}$$

with

$$N_\alpha=\frac{\alpha^{\frac{7}{2}}}{\pi^2}\,4\sqrt{\frac{7}{3}};\qquad N_T=\frac{t^2}{\pi^{\frac{1}{2}}}\,3^{\frac{1}{2}}\,2\sqrt{2}$$

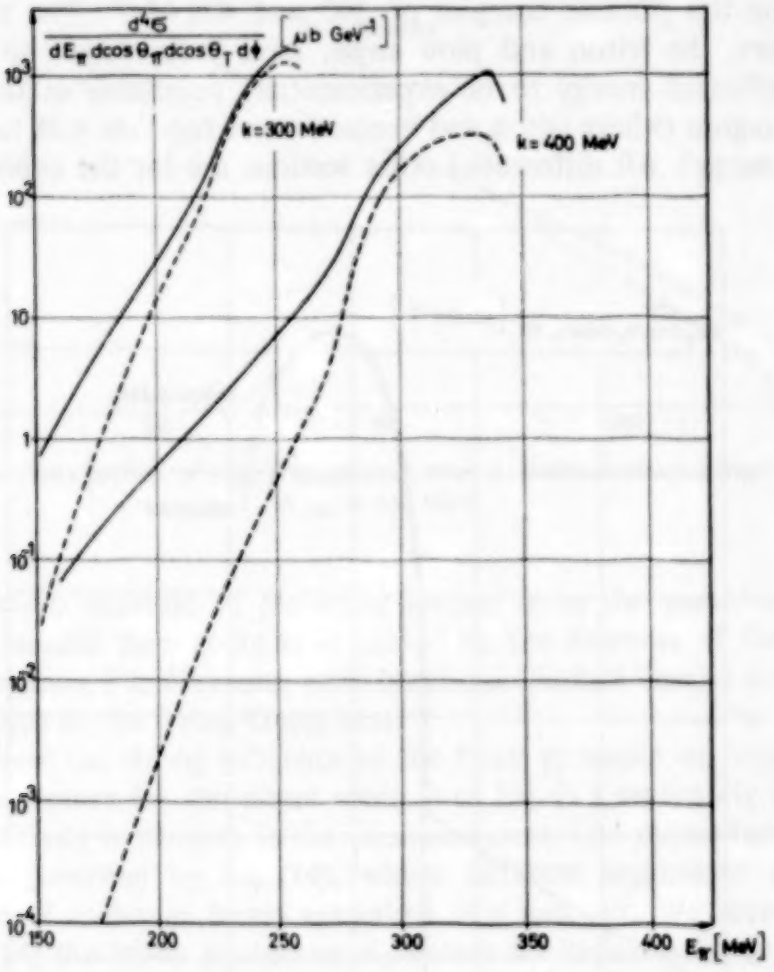


Fig. 2. The differential cross section (11) vs. the pion energy. This and the following figures are in the lab. system of ^{4}He. The solid lines are calculated with the Irving-Gunn functions (15) the dashed lines with Gaussian wave functions (12). The photon energies k are 400 and 300 MeV. The remaining parameters are $\theta_\pi=90°$, $\theta_T=36°$, $\Phi=180°$. We use $R_\alpha=1.59$ F and $R_T=1.68$ F throughout

[9] Gunn, J. C., and I. Irving: Phil. Mag. **42**, 1353 (1951).

[10] Bösch, R., J. Lang, R. Müller, and W. Wölfli: Helv. Phys. Acta **38**, 753 (1965).

and

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \frac{1}{R_a}; \qquad t = \frac{\sqrt{5}}{3}\frac{1}{R_T}.$$

In this case part of the integrations involved in $F(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)$ has been done numerically.

4. Discussion of Numerical Results

The differential cross section (11) vs. the pion energy is shown in Fig. 2 for the photon energies of 300 and 400 MeV. The remaining parameters, the triton and pion angle, have been chosen to give the triton sufficient energy to be experimentally detectable in the "quasi elastic" region (where triton and neutron move together with no relative kinetic energy). All differential cross sections are for the coplanar case

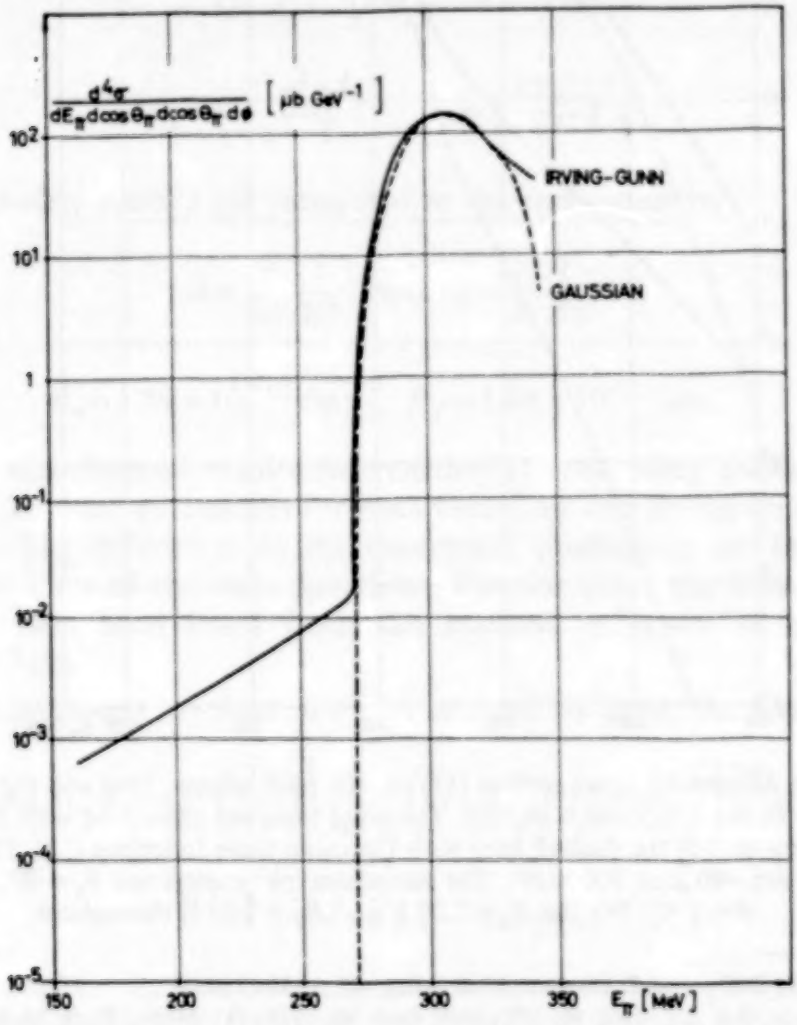


Fig. 3. The same as in Fig. 2 but without the exchange term (6), for $k = 400$ MeV

($\Phi = 180°$). For π^+-photoproduction on protons experimental values[11] have been inserted in (11). However, our results are not much affected if we put the quantity $\sigma^{(i)}$ equal to a constant.

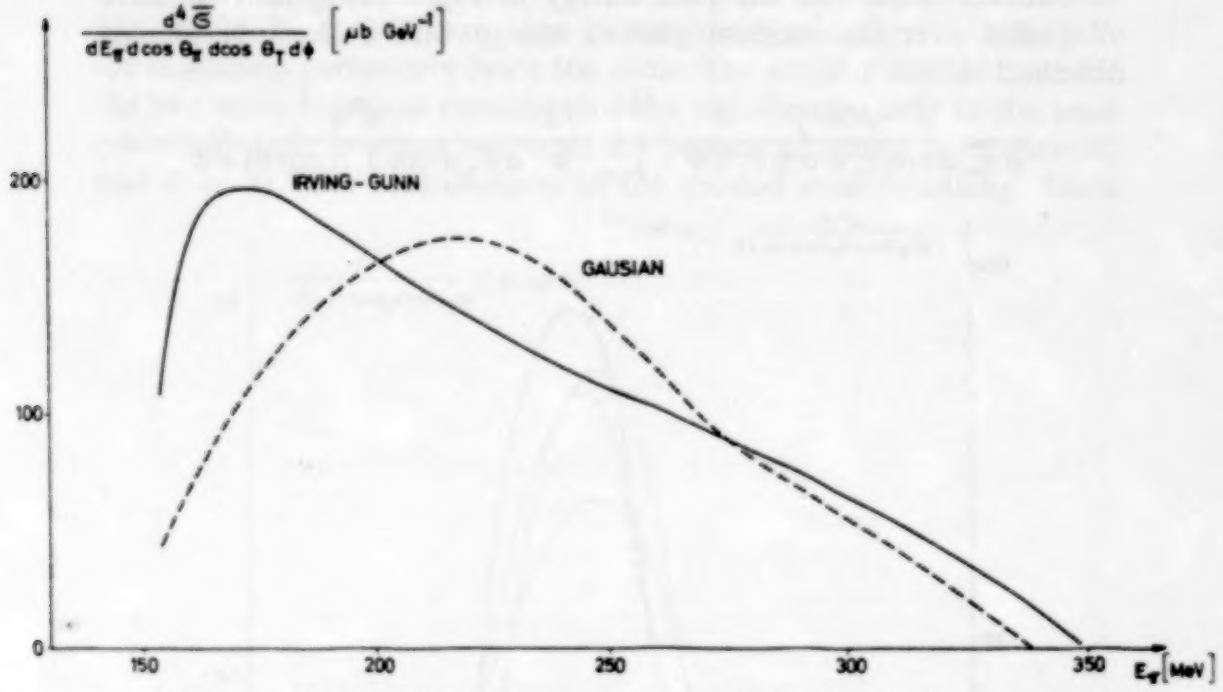


Fig. 4. The cross section of Fig. 2 integrated over a Bremsstrahlspektrum k^{-1} with $k_{max} = 400$ MeV

The steep decrease of the cross section from the maximum of E_π towards smaller pion energies is caused by the decrease of the nuclear wave functions. For Gaussian wave functions (dashed lines) it is therefore steeper than in the Irving-Gunn case.

To show the strong influence of the Pauli principle we have plotted the cross section for the direct term D of Eq. (1′) separately in Fig. 3. This sensitivity is obvious in the Gaussian case. The momentum dependance is governed by Eq. (14), where different arguments enter the exponent, if exchange terms are taken into account. We mention that by Eq. (14) the triton parameter R_T enters the momentum dependance only in the exchange term.

[11] Freytag, D., W. Schille, and R. Wedemeyer: Z. Physik **186**, 1 (1965). — Freytag, C., D. Freytag, K. Lübelsmeyer, and W. Paul: Z. Physik **175**, 1 (1963). — Althoff, K., H. Fischer, and W. Paul: Z. Physik **175**, 19 (1963). — Kilner, J.: Thesis, Caltech 1960. — Hand, L., and C. Schaerf: Phys. Rev. Letters **6**, 229 (1961). — Walker, R. L.: Proc. of the Rochester Conf. 1960, p. 17. — Beneventano, M., G. Pinocchiaro, R. Finzi, L. Mezzetti, L. Paoluzze, and C. Schaerf: Nuovo cimento **17**, 274 (1960). — Knapp, E. A., R. Kenney, and V. Perez-Mendez: Phys. Rev. **114**, 605 (1959).

Above $E_\pi = 270$ MeV the two-valuedness of p_T occurs. The onset of the second term in (11) leads to the sharp bend in the Irving-Gunn curve (the corresponding bend in the Gaussian case is beyond the scale of Fig. 3).

The variation with the pion energy in Fig. 2 being fast, we have integrated over the incident photon energy with a Bremsstrahlungs-distribution.

$$\frac{d^4\bar{\sigma}}{dE_\pi\, d\cos\theta_\pi\, d\cos\theta_T\, d\Phi} = \int_{k_{min}}^{k_{max}} \frac{dk}{k}\, \frac{d^4\sigma}{dE_\pi\, d\cos\theta_\pi\, d\cos\theta_T\, d\Phi}$$

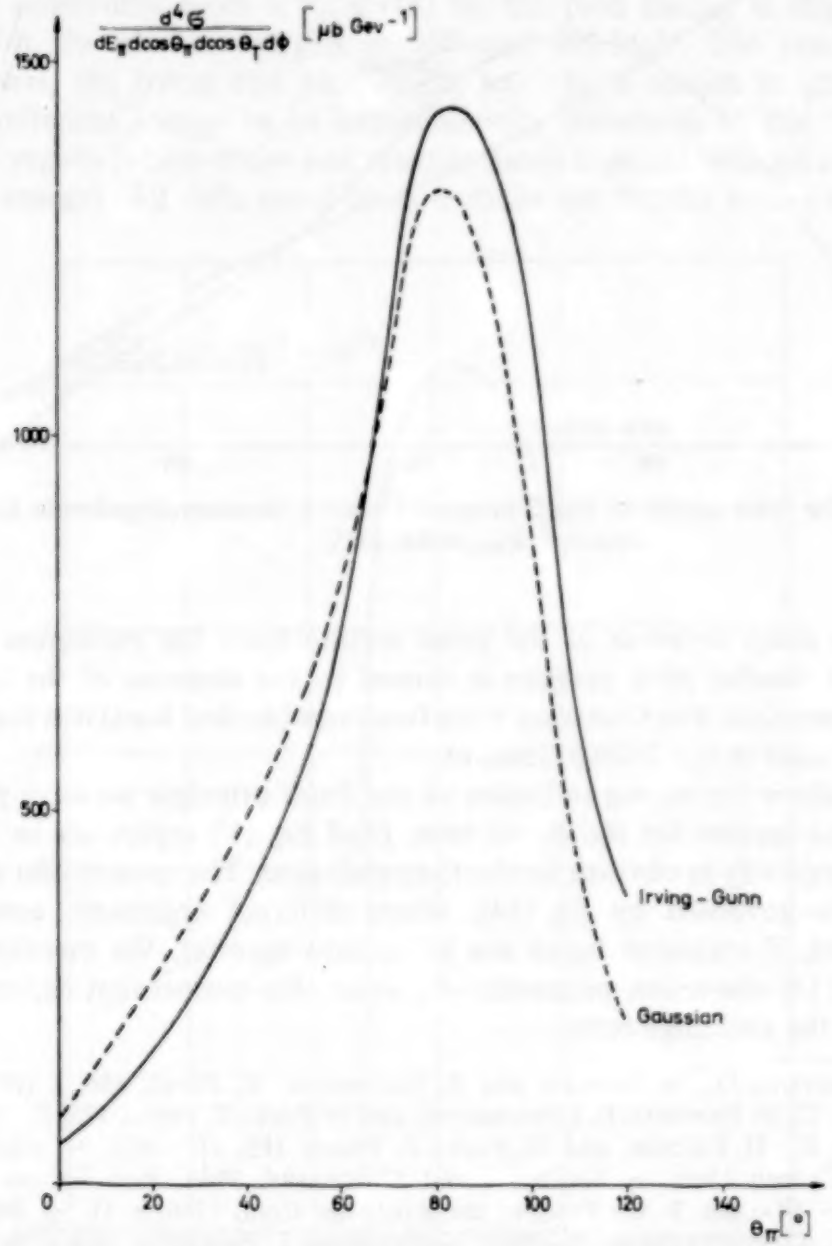


Fig. 5. The differential cross section (11) vs. the pion angle for $k = 300$ MeV, $E_\pi = 250$ MeV, $\theta_T = 36°$, $\Phi = 180°$

where k_{min} is determined by the final state momenta. As upper limit we take $k_{max} = 400$ MeV. The results in Fig. 4 show a clear distinction between the Gaussian and Irving-Gunn case. The variation of the differential cross section (11) with the pion (triton) angle is shown in Fig. 5 (Fig. 6). E_π is chosen near its maximum value for $k = 300$ MeV, the remaining parameters being the same. The angular distributions for the two wave functions considered differ significantly only at the peak (about 15 p.c.), however we recall the neglect of mixed symmetry S', and P or D wave contributions to the ground state functions. These

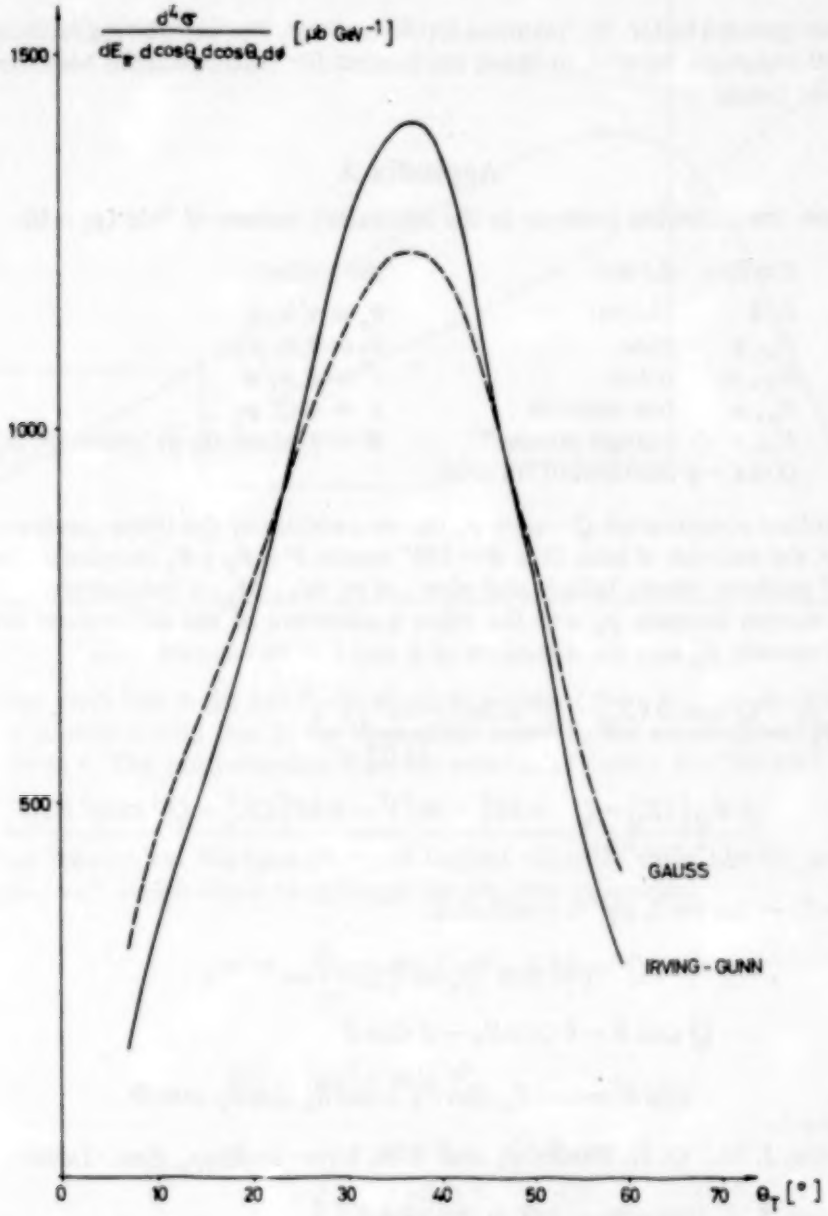


Fig. 6. Eq. (11) vs. the triton angle for $k = 300$ MeV, $E_\pi = 250$ MeV, $\theta_\pi = 90°$, $\Phi = 180°$

admixtures are probably a few per cent[12]. The contribution of the mixed symmetry S state (called S') is $\frac{1}{2}$ p.c. from the analysis[10] of photo-disintegration $\gamma\,{}^3\mathrm{H} \to {}^2\mathrm{H}n$. From the elastic scattering of electrons on ^{3}H and ^{3}He a S' of 4 p.c. is obtained[13]. Electro-disintegration of ^{3}He yields[14] $S' < 4$ p.c. (compatible with zero).

To distinguish between these different versions precise coincidence experiments are needed. Simultaneously they would yield a highly desirable test of the basic assumptions of the impulse approximation.

In Appendix B we give further cross sections integrated over some of the final state parameters.

We are grateful to Dr. W. SANDHAS for discussions. For calculating facilities on the IBM 7090 computer we wish to thank the Institut für Instrumentelle Mathematik der Universität Bonn.

Appendix A

We use the following symbols in the laboratory system of ^{4}He ($\boldsymbol{p}_a = 0$):

the four vectors:		the angles:
k, $\boldsymbol{k}$	photon	$\theta_\pi = \sphericalangle\, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{q}$
E_π, $\boldsymbol{q}$	pion	$\theta_T = \sphericalangle\, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}_T$
E_T, $\boldsymbol{p}_T$	triton	$\vartheta' = \sphericalangle\, \boldsymbol{p}_T \boldsymbol{q}$
E_n, $\boldsymbol{p}_n$	free neutron	$\vartheta = \sphericalangle\, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{p}_T$
E_p, $\boldsymbol{p}$	"target proton"	$\Phi = \sphericalangle$ plane $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{q})$, plane $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{p}_T)$
$\boldsymbol{Q} \equiv \boldsymbol{k} - \boldsymbol{q}$	momentum transfer	

by momentum conservation $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{p}_T + \boldsymbol{p}_n$ the momentum of the triton-neutron system. We count the azimuth Φ such that $\Phi = 180°$ means $\vartheta' = \theta_T + \theta_\pi$ (coplanar case). The masses of nucleon, triton, helium and pion are m, M_T, M_a, μ respectively.

The relation between $\boldsymbol{p}_T$ and the other parameters of the differential cross section (11), namely E_π and the directions of $\boldsymbol{q}$ and $\boldsymbol{k}$ is two-valued. It is

$$p_T^{(i)} = \frac{Q\cos\vartheta\,(E_Q^2 - Q^2 + M_T^2 - m^2) \pm}{2(E_Q^2 -} \qquad (A_1)$$

$$\frac{\pm E_Q[(E_Q^2 - Q^2 + M_T^2 - m^2)^2 - 4M_T^2(E_Q^2 - Q^2\cos^2\vartheta)]^{\frac{1}{2}}}{-Q^2\cos^2\vartheta)}$$

$+$ for $i=1$, $-$ for $i=2$, $p_T^{(2)} < 0$ excluded.

$$Q^2 = k^2 + q^2 - 2qk\cos\theta_\pi,$$

$$Q\cos\vartheta = k\cos\theta_T - q\cos\vartheta',$$

$$\cos\vartheta' = \cos\theta_\pi\cos\theta_T + \sin\theta_\pi\sin\theta_T\cos\Phi$$

---

[12] BLATT, J. M., G. H. DERRICK, and J. N. LYNESS: Phys. Rev. Letters **8**, 323 (1962).

[13] SCHIFF, L. I.: Phys. Rev. **133**, B 802 (1964).

[14] GRIFFY, T. A., and R. J. OAKES: Phys. Rev. **135**, B 1161 (1964).

and

$$E_Q = k + M_\alpha - E_\pi .$$

By this

$$p_n^{(i)\,2} = Q^2 + p_T^{(i)}(p_T^{(i)} - 2Q\cos\vartheta) . \qquad (A_2)$$

The quantities k^{eff}, $\cos\theta^{\mathrm{eff}}$ etc. are defined as energy and π-angle is the laboratory system of $\gamma + p \to n + \pi^+$ ($p^{\mathrm{eff}} = 0$). For the direct term, Fig. 1a, we have $\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{p}_T$ in

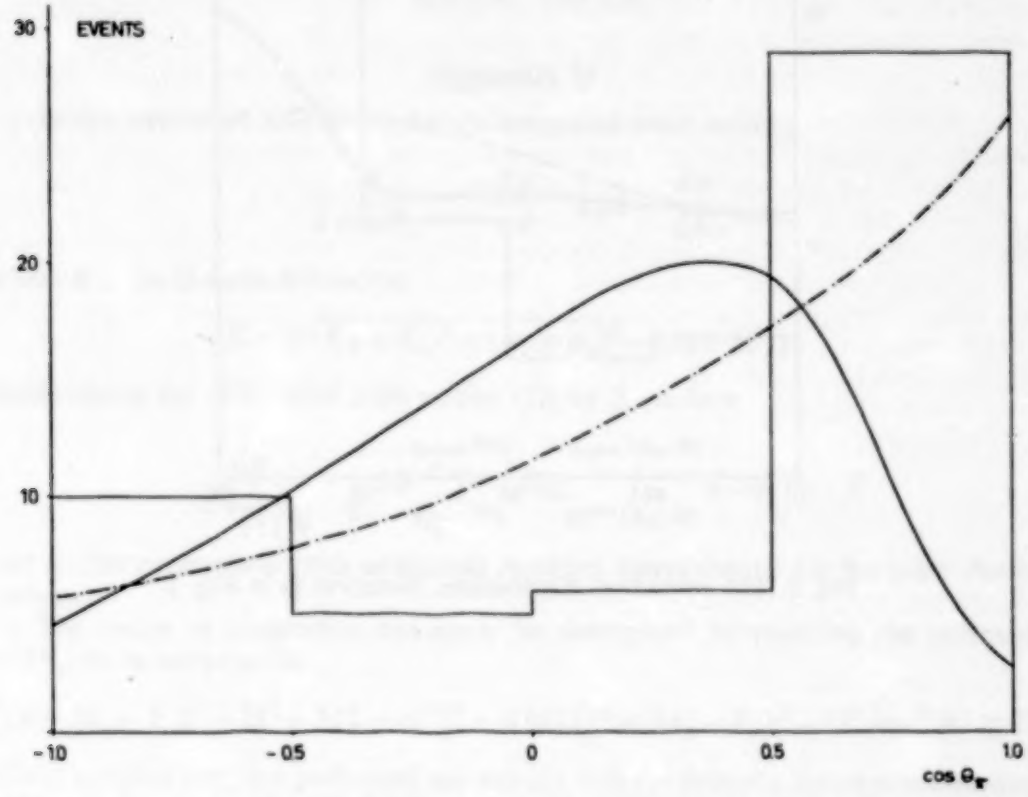


Fig. 7. The solid line is the $\cos\theta_\pi$-distribution obtained from (11) by integration, see text. The dashed-dotted line is the theoretical curve[3b], the experimental points are from [2]. The normalisation is to the number of events. $k = 300$ MeV

the helium laboratory. We have therefore defined values of s and t at the production vertex $\gamma p \to n\pi^+$ which allow to calculate the effective quantities:

$$k^{\mathrm{eff}\,(i)} = \frac{k}{m}\,(E_p^{(i)} + p_T^{(i)}\cos\theta_T) \qquad (A_3)$$

with

$$E_p^{(i)} = (m^2 + p_T^{(i)2})^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\theta^{\mathrm{eff}\,(i)} = \frac{\cos\theta_\pi - p_T^{(i)}/k\cos\vartheta'}{\left(1 + \left(\frac{p_T^{(i)}}{k}\right)^2 - 2\,\frac{p_T^{(i)}}{k}\cos\theta_T\right)^{\frac{1}{2}}} . \qquad (A_4)$$

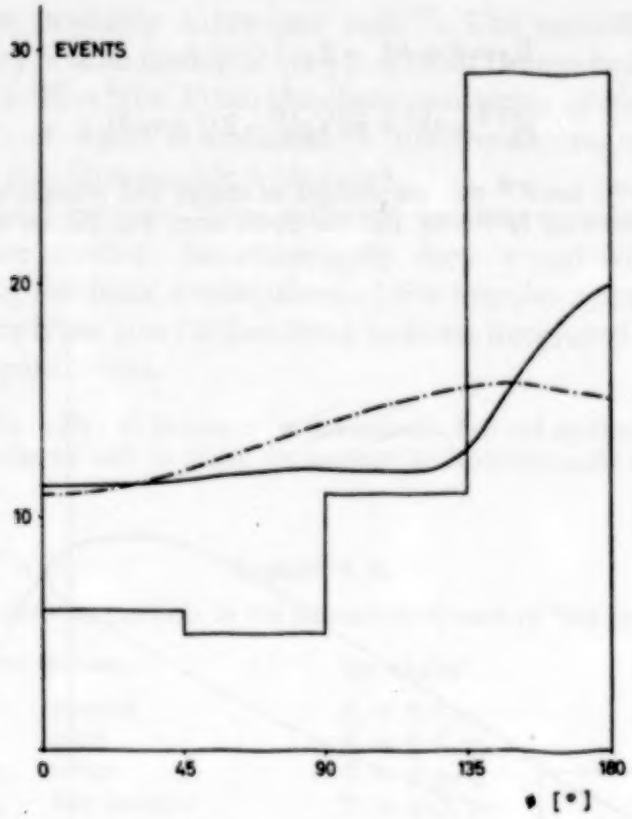


Fig. 8. The azimuthal distribution. Notation as in Fig. 7

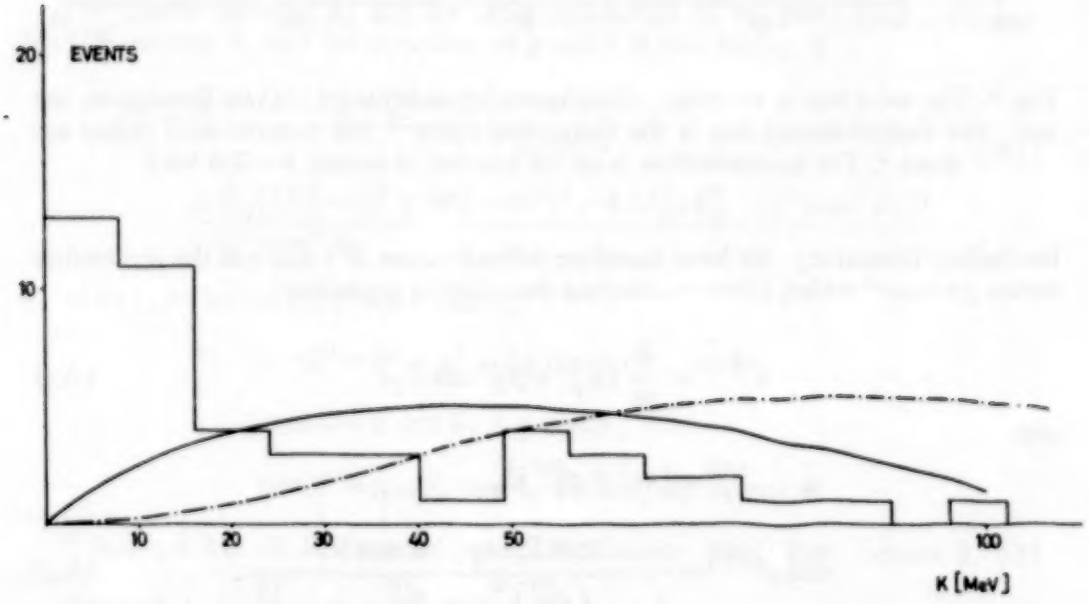


Fig. 9. The Q-value distribution. For definitions see Appendix B

From this the energy E_π^{eff} follows as usually:

$$E_\pi^{\mathrm{eff}}=\frac{W\cdot A+k^{\mathrm{eff}}\cos\theta^{\mathrm{eff}}\{A^2-4\mu^2[W^2-k^{\mathrm{eff}2}\cos^2\theta^{\mathrm{eff}}]\}^{\frac{1}{2}}}{2(W^2-k^{\mathrm{eff}2}\cos^2\theta^{\mathrm{eff}})} \qquad (\mathrm{A}_5)$$

where

$$W=k^{\mathrm{eff}}+m$$

$$A=2k^{\mathrm{eff}}\cdot m+\mu^2$$

Appendix B

In this section we give results for the integrated cross sections

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta_\pi},\quad \frac{d\sigma}{d\Phi}\quad\text{and}\quad\frac{d\sigma}{dK}$$

where K is the Q-value defined by

$$K=\sqrt{(E_T+E_n)^2-(\boldsymbol{p}_T+\boldsymbol{p}_n)^2}-(m+M_T).$$

Abbreviating the differential cross section (11) by Σ we have

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta_\pi}\sim\int_0^\pi d\Phi\int_{E_\pi^{\min}(\Phi)}^{E_\pi^{\max}(\Phi)}dE_\pi\int_{\theta_T^{\min}(E_\pi,\Phi)}^{\theta_T^{\max}(E_\pi,\Phi)}d\cos\theta_T\cdot\Sigma$$

and similar expressions (with additional Jacobian determinants) for the other distributions.

The region of integration can easily be determined by requiring the radicand of (A_1) to be nonnegative:

$$[(k+M_a-E_\pi)^2-Q^2+M_T^2-m^2]^2-4M_T^2[(k+M_a-E_\pi)^2-Q^2\cos^2\vartheta]\geqq 0.$$

The integration has been performed numerically with the help of a Simpson-integration program. One point of each distribution has been checked by Runge-Kutta and by Monte Carlo integration. Only Gaussian wave functions were used because of computer time limits. The results are given in Fig. 7, 8 and 9. The distributions are normalized to the number of experimental points in [2] which are also shown. The dashed-dotted lines are the previous calculations[3b], which use a constant cross section $\gamma p\to n\pi^+$. However, it does not suffice to neglect the momentum dependence of $\sigma(\vartheta)$ in Eq. (11) to make the discrepancies disappear*. According to our results the arguments of Ref. [2] in favour of the existence of a resonant $({}^3\mathrm{H}n)$ state are still correct.

* We are grateful for comments of Dr. V. Hippel regarding his calculations.

Zeitschrift für Physik 202, 452–476 (1967)

Evaluation of Multipoles for Photo- and Electroproduction of Pions

I. Theoretical Background

D. SCHWELA, H. ROLLNIK, R. WEIZEL, and W. KORTH
Physikalisches Institut der Universität Bonn

Received March 15, 1967

With this paper we start a systematic study of the multipole amplitudes for electro- and photoproduction of pions in the low energy region. It is based on the integral equations following from fixed t dispersion relations and the Watson theorem. We start with a discussion of general mathematical problems one encounters when solving the singular integral equations. Especially the non-uniqueness of their solutions poses difficult problems which cannot be solved within the framework of the dispersion theory. As boundary conditions "from outside" we use at threshold the predictions of the static theory. But thereby only the magnetic dipole excitation of the first isobar is determined. For the electric quadrupole amplitude one needs additional conditions.

1. Introduction and Summary: Basic Ideas and Comparison with Previous Work

During the last ten years there have been many attempts to understand quantitatively the photo- and electroproduction of pions in the region of the first resonance. The general basis are the (fixed momentum transfer) dispersion relations[1–34] or, in a simplified version, the isobaric model[35]. There is general agreement about the main qualitative features of these processes, but in fact only the first steps have been done for a systematic investigation of the dispersion equations for the multipole amplitudes.

[1] CHEW, G. F., and F. E. LOW: Phys. Rev. **101**, 1579 (1956).

[2] CHEW, G. F., M. L. GOLDBERGER, F. E. LOW, and Y. NAMBU (CGLN): Phys. Rev. **106**, 1345 (1957). — LOGUNOV, A. A., A. N. TAVKHELIDZE, and L. D. SOLOV'EV: Nuclear Phys. **4**, 427 (1957).

[3] FUBINI, S., Y. NAMBU, and V. WATAGHIN (FNW): Phys. Rev. **111**, 329 (1958).

[4] SOLOV'EV, L. D.: Nuclear Phys. **5**, 256 (1958).

[5] LAZARUS, A. J., W. K. H. PANOFSKY, and F. R. TANGHERLINI: Phys. Rev. **113**, 1330 (1959).

[6] ROBINSON, C. J.: Univ. of Illinois report 1959. Tables of cross section for π^+ photoproduction from Hydrogen according to the theory of CHEW, LOW, GOLDBERGER and NAMBU.

[7] DIETZ, K., u. G. HÖHLER: Z. Naturforsch. **14a**, 994, (1959).

[8] HÖHLER, G., u. A. MÜLLENSIEFEN: Z. Physik **157**, 30 (1959).

[9] BALDIN, A. M., and B. B. GOVORKOV: Nuclear Phys. **13**, 193 (1959). — BALDIN, A. M.: Soviet Phys. JETP **11**, 416 (1960).

[10] SOLOV'EV, L. D., and G. N. TENTYUKOVA: Soviet Phys. JETP **37**, 889 (1959).

[11] GARTENHAUS, S., and C. N. LINDNER: Phys. Rev. **113**, 917 (1959).

[12] HÖHLER, G., and K. DIETZ: Z. Physik **160**, 453 (1960).

This is the first of a series of papers in which we try to evaluate the multipoles via the dispersion theory as far as possible.

The theoretical study of the multipole amplitudes in the region of the first (P_{33}) resonance usually starts from the remarkable result of the static meson theory [1] that the magnetic dipole amplitude $M_{1+}^{\frac{3}{2}}$ is proportional to the corresponding scattering amplitude by an explicitly known factor. Though first regarded as fortuitous this proportionality survived when in the dispersion technique a more reliable tool was found for the calculation of photo- and electroproduction [2, 3, 16].

From the beginning corrections to this simple rule were expected [2, 3] due to recoil effects [3, 12] and to the influence of the pion-pion resonances [36]. In principle it should be possible to calculate these corrections as

---

[13] TOLLIS, B. DE, E. FERRARI, and H. MUNCZEK: Nuovo cimento **18**, 198 (1960).

[14] GOURDIN, M., D. LURIE, and A. MARTIN: Nuovo cimento **18**, 933 (1960).

[15] TOLLIS, B. DE, and A. VERGANELAKIS: Nuovo cimento **22**, 406 (1961).

[16] DENNERY, P.: Phys. Rev. **124**, 2000 (1961).

[17] BALL, J. S.: Phys. Rev. **124**, 2014 (1961).

[18] WARBURTON, A. E. A., and M. GOURDIN: Nuovo cimento **22**, 362 (1961).

[19] MC KINLEY, J.: Some corrections to partial wave dispersion relations for pion photoproduction. Technical Report No. 38, Univ. of Illinois 1962.

[20] BALDIN, A. M., and A. I. LEBEDEV: Nuclear Phys. **40**, 44 (1963). — LEBEDEV, A. I.: Private communication.

[21] HENDRY, A. W.: Nuclear Phys. **40**, 296 (1963). — BARBOUR, I. M.: Nuovo cimento **27**, 1382 (1963).

[22] HAND, L. N.: Phys. Rev. **129**, 1834 (1963).

[23] HÖHLER. G., and W. SCHMIDT: Ann. Phys. (N. Y.) **28**, 34 (1964).

[24] SCHMIDT, W.: Z. Physik **182**, 76 (1964).

[25] FINKLER, P.: An evaluation of the dispersion relations of photoproduction. Preprint, Purdue University, Lafayette 1964.

[26] KORTH, W., H. ROLLNIK, D. SCHWELA, and R. WEIZEL: Evaluation of multipoles for photo- and electroproduction of Pions. Preprint 2—7, Univ. of Bonn 1965.

[27] DONNACHIE, A., and G. SHAW: Ann. Phys. (N. Y.) **37**, 333 (1966).

[28] ZAGURY, N.: Phys. Rev. **145**, 1112 (1966).

[29] SCHWELA, D.: Dispersionstheoretische Berechnung von Multipolen für die Photo- und Elektroproduktion von π-Mesonen. Preprint 2—10, Univ. of Bonn 1966.

[30] KORTH, W.: Anwendung der Helitizitätsformalismus auf die Photo- und Elektroproduktion von Mesonen. Preprint 2—11, Univ. of Bonn 1966.

[31] MENNESSIER, G.: Nuovo cimento **46**, 459 (1966).

[32] DONNACHIE, A., and G. SHAW: Low Energy photopion Production, SU (6) and the Panofsky ratio. CERN Preprint 66/749/5-TH 613 (1966).

[33] SCHMIDT, W., and G. SCHWIDERSKI: Application of helicity formalism in Pion photoproduction. Univ. Preprint 3/66-2, Karlsruhe 1966.

[34] BERENDS, F. A., A. DONNACHIE, and D. WEAVER: Photoproduction and electroproduction of Pions, I. Dispersion relation theory. CERN Preprint 66/112015-TH 703 (1966).

[35] GOURDIN, J. M., and P. SALIN: Nuovo cimento **27**, 193 (1963). — SALIN, P.: Nuovo cimento **28**, 1294 (1963). — LOUBATON, J. P.: Nuovo cimento **39**, 591 (1965).

[36] See e.g. BALDIN's rapporteurs' review on "Electromagnetic Interactions" at the 12th High-Energy Conference at Dubna, p. 994, 1964. Also see refs.[13, 14, 15].

well as the other "small" multipoles at least for not too high energies from a system of coupled singular integral equations for the multipole amplitudes which follows from fixed momentum transfer dispersion relations and the Watson theorem[37].

This treatment was first used by BALL[17] who starting from the Mandelstam representation, derived "fixed" dispersion relations for the invariant amplitudes $A_i(s, t, u)$. He calculated Re A_i (and therewith the real part of the multipoles) assuming the imaginary part of A_i to be completely given by the magnetic part of the magnetic dipole $Im\, M^{\frac{3}{2}}_{1+\mu}$ for which the result of the static theory was used.

BALL's method has been refined in the work of HÖHLER and SCHMIDT[23, 24] who evaluated the real parts of all partial waves $l \leqq 1$ and compared the results with experiment in the region from threshold up to 600 MeV photon lab. energy.

But all these calculations – even if they are very detailed – do not attempt to solve really the mentioned singular integral equations. Before we outline our method to attack this problem we like to mention some recent papers which try to find solutions by a method completely different from ours. DONNACHIE and Shaw[27] and even earlier LEBEDEV[20] solved the equations by iteration. In general the iteration of a singular integral equation is a very complicated problem, see the mathematical rigorous method by BERG[38]. But due to the fact that the static theory gives a very good formula for the first approximation, the iteration of DONNACHIE and SHAW[27] works very well for the magnetic dipole amplitude $M^{\frac{3}{2}}_{1+}$. But the authors get no reliable results for the electric quadrupole E_{1+} where no good formula is known to start with. Thus it is indicated also numerically that the simple iteration procedure converges quickly only if a rather good input is used. This is due to the fact that the left hand side of the integral equation has a zero on the integration region due to the P_{33} resonance. Therefore an iteration for the electric dipole amplitude E_{0+} which leads to s-wave pion nucleon states was more successful. In this case the sum of the Born approximation and the dispersion integral over $Im\, M^{\frac{3}{2}}_{1+}$ was used as a first approximation[27].

On the other hand a general method is known to solve the singular but linear integral equations, which was first developed by MUSKHELISHVILI and rediscovered independently by OMNÉS[39]. This method was first

[37] WATSON, K. M.: Phys. Rev. **95**, 228 (1954).

[38] BERG, L.: Math. Nachr. **14**, 193 (1955).

[39] MUSKHELISHVILI, N.: Singuläre Integralgleichungen (translation of the second russian edition. Berlin: Akademie-Verlag 1965; English version of the first russian edition: Singular Integral Equations. Groningen: Noordhoff 1953. Also see POGORZELSKI, W.: Integral equations and their applications. New York: Pergamon Press 1966. – GAKHOV, F. D.: Boundary value problems. New York: Pergamon Press 1966. – OMNÉS, R.: Nuovo cimento **8**, 316 (1958).

applied to photoproduction by SOLOV'EV and TENTYUKOVA[10] in the case of the M_{1+}-amplitude and by WARBURTON and GOURDIN[18] for the electric dipole E_{0+}. More detailed calculations for the excitation of the first isobar are given in an unpublished note by FINKLER[25]. But if one tries to use the Muskhelishvili-Omnes method for the $J=I=\frac{3}{2}$ isobar one encounters typical difficulties which were first discussed in an unpublished note by the present authors[26].

Before we write down our formalism in detail we outline the general ideas of the method in simple physical terms and describe the main problems of our approach. Any theoretical treatment of the photo- or electroproduction of pions starts from the simple diagrams of Fig. 1a – c).

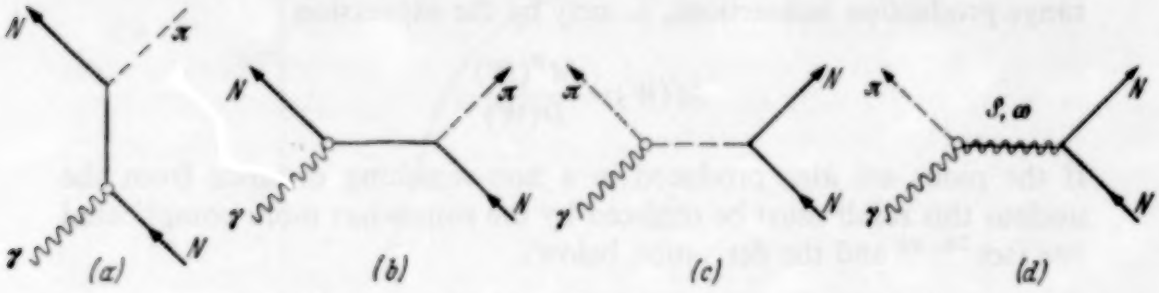


Fig. 1. Lowest order diagrams for photo- and electroproduction

Physically these diagrams only contain the interaction of the incoming photon with the charge and the magnetic moments of the nucleus and the meson – which in the case of a virtual photon is described by the nucleon and meson form factors – and the pion-nucleon coupling in lowest order. It is easy to include in addition an electromagnetic coupling between photons, pions and vector mesons as it is depicted in Fig. 1d. But in any of these diagrams the final state interaction due to the strong forces between nucleons and pions is neglected. If we use for purpose of illustration the results of potential scattering theory any final state interaction shows up in an enhancement or a decrease of the wave function of the final particles for small distances. Most explicitely: We normalize the final state wave function by:

$$\Psi_f(r) \to e^{i\delta} \frac{\sin(q\,r+\delta)}{q\,r} \qquad \text{for } r \to \infty \tag{1}$$

where we have restricted ourselves for simplicity to s-waves. q denotes the momentum in the final state and $\delta=\delta(q)$ the corresponding scattering phase shift. Then, near the origin one has

$$\Psi_f(r) \to \frac{1}{D^*(W)} \frac{\sin q\,r}{q\,r} \qquad \text{for } r \to 0. \tag{2}$$

Here $D(W)$ denotes the Jost function of the problem depending on the CMS-energy W. This function describes the effect of the final state interactions and can be calculated once the phase shifts for all energies are known according to the formula

$$D(W)=\exp\left\{-\frac{W}{\pi}\int_{W_0}^{\infty}\frac{\delta(W')}{W'(W'-W-i\varepsilon)}\,dW'\right\}. \tag{3}$$

Here $W_0=M+m_\pi$ gives the threshold for the CMS-energy. If the contribution of the diagrams of Fig. 1a–c to the multipole amplitude in question is given by the Born approximation $M^B(W)$ one can take into account the final state interactions in a simple manner from very short range production interactions, namely by the expression

$$M(W)=\frac{M^B(W)}{D(W)}.$$

If the pions are also produced in a non-vanishing distance from the nucleus this result must be replaced by the somewhat more complicated one (see [26, 29] and the derivation below).

$$\begin{aligned}M(W)&=\frac{1}{D(W)}\left[M^B(W)\left(D(W)+\frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty}\frac{D(W')\,h(W')}{W'-W-i\varepsilon}\,dW'\right)+\right.\\&\left.+\frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty}\frac{M^B(W')-M^B(W)}{W'-W}\,D(W')\,h(W')\,dW'\right] \qquad (4)\\&\equiv M^B(W)+\frac{1}{D(W)}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty}\frac{D(W')\,h(W')\,M^B(W')}{W'-W-i\varepsilon}\,dW'.\end{aligned}$$

All preceding formulae assume a real phase shift $\delta(W)$. For the πN scattering in the $J=I=\frac{3}{2}$ channel this condition is fulfilled up to the highest energies up to now investigated, see Fig. 2. Therefore we applied (4) to the magnetic excitation of the N^*_{33} and found the discouraging result given in Fig. 3, labelled "particular solution" [26], while one expects a result similar to the dashed line which gives the multipole of the static theory and is in fair agreement with experiment.

This failure might be due to the following two reasons:

1. The formula (4) is only approximate insofar it contains only the righthand unitary cut for $W\geqq W_0$ which is necessary to fulfill the Watson theorem

$$\mathfrak{Im}\,M(W)=h^*(W)\,M(W) \tag{5}$$

and lefthand singularities only due to the Born approximation M^B. In order to get the exact solution one has to replace M^B by a function $M_{in}(W)$ which has the correct left hand cuts.

2. Even if we had found the correct $M_{in}(W)$ Eq. (4) might be not the most general function fulfilling all the requirements of analycity and unitarity. This is certainly the case if the phase shift $\delta(W)$ normalized according to $\delta(W_0)=0$ tends to a positive limit for $W\to\infty$ (cp. section 3):

$$\delta(\infty)>0. \tag{6}$$

The $J=I=\frac{3}{2}$ phase shift of Fig. 2 used in our calculations has

$$\delta(\infty)=\pi. \tag{6a}$$

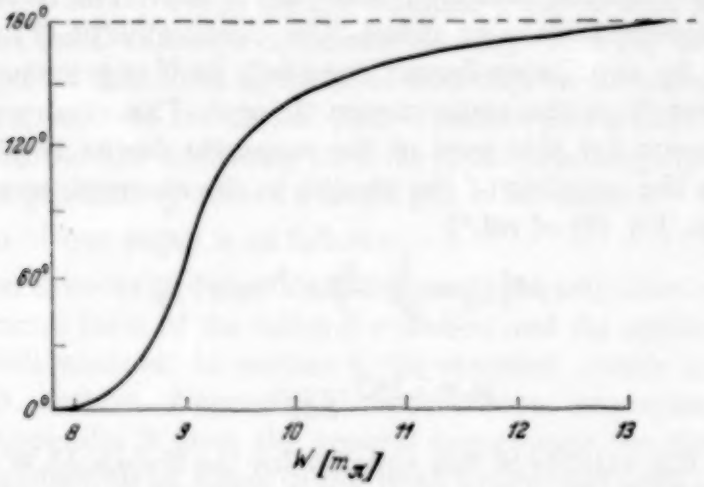


Fig. 2. P_{33} phase shift vs. CMS-energy W as given by refs.[40]

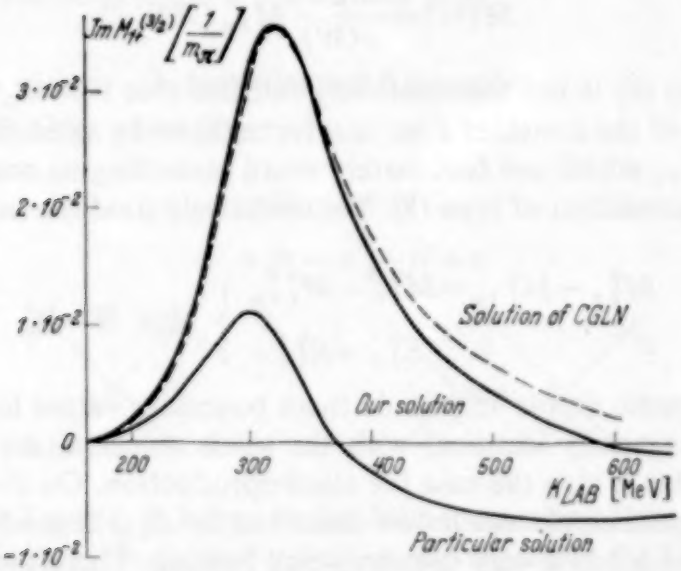


Fig. 3. Solution of the characteristic equation compared with CGLN

[40] Roper, L. D., R. M. Wright, and B. T. Feld: Phys. Rev. **138**, B190 (1965). — Auvil, P., A. Donnachie, A. T. Lea, and C. Lovelace: Phys. Letters **12**, 76 (1964). — Bareyre, P., C. Bricman, A. V. Stirling, and G. Villet: Phys. Letters **18**, 342 (1965).

Under these circumstances the most general solution of our problem is given by

$$M(W)=(4)+\frac{c}{D(W)} \tag{7}$$

where c is an arbitrary real constant.

The first possibility was recently investigated by GUTBROD and SIMON[41]. In fact these authors were able to improve the predictions of Eq. (4) considerably. But of course the basic ambiguity (7) remains as long as an asymptotic behaviour like (6a) is kept. Therefore we discuss this nonuniqueness in more detail. The constant c of (7) can only be determined by conditions from "outside". In [26] we proposed to take this condition from the static meson theory[1]. This theory gives an explicit expression for that part of the magnetic dipole amplitude which is caused by the coupling of the photon to the magnetic moments of the nucleons (cp. Eq. (9) of ref.[1])

$$M^{\frac{3}{2}}_{1+\mu}=\frac{k}{q^2}\,\frac{\mu_v}{f}\,e^{i\delta_{33}}\sin\delta_{33}$$
$$\mu_v=2.345\,\frac{e}{2M}. \tag{8}$$

We assume this validity of this equality for the threshold $W=W_0$. Even if one includes a suitable kinematical factor $\rho(W)$ in $M(W)$

$$M(W)=\frac{1}{\rho(W)}\,M_{1+}(W) \tag{9}$$

the condition (8) is not automatically fulfilled (for $W=W_0$). But by the right choice of the constant c we can force (8) to be valid. For the other parts of M_{1+}, which are fortunately small according to common belief, we have no condition of type (8). We tentatively used the boundary conditions:

$$\left.\begin{aligned} M^{\frac{3}{2}}_{1+}-M^{\frac{3}{2}}_{1+\mu}&=M^{\frac{3}{2}\,B}_{1+}-M^{\frac{3}{2}\,B}_{1+\mu} \\ E^{\frac{3}{2}}_{1+}&=E^{\frac{3}{2}\,B}_{1+}. \end{aligned}\right\} \quad \text{for } W=W_0 \tag{10a, 10b}$$

and

For the magnetic dipole amplitude these boundary values lead to a solution which is nearly identical with the static solution, see Fig. 3 "our solution". This is also the case for electroproduction. On the other hand the electric quadrupole excitation described by E_{1+} depends completely on (10b) which has a very unconvincing footing. Therefore in this case we tend to take the constant c from experiment. But if we know E_{1+} for a special energy we can calculate its energy dependence completely.

[41] GUTBROD, F., and D. SIMON: On the theory of photo- and electroproduction of the N^* (1236). DESY Preprint 67/1, 1967.

The explained ambiguity can be understood in a different way using the N/D-method, see section 4. A D-function for a phase shift with the property (6a) obeying the asymptotic condition $D(\infty)=1$ contains necessarily a pole on the real axis (CDD-pole) which leads to a zero in the amplitude. This zero shows up in Fig. 3. If one fixes the position of this pole (or zero) its residue can be determined. Therefore we have again one open parameter which can be connected with c of Eq. (7).

This interpretation of the ambiguity (7) allows a more detailed comparison with ref.[25]. FINKLER avoids the problem connected with Eq. (6a) by putting $\delta=0$ for $W=W_m$. By the resulting jump in δ he introduced a CDD-pole in the D-function calculated directly from Eq. (3). The position of this pole is then fixed by the condition that the scattering amplitude be the current value at resonance. Thus FINKLER has a CDD-zero at the same position for the scattering and the multipole amplitudes. On the contrary our philosophy allows a more general situation.

The plan of our paper is as follows:

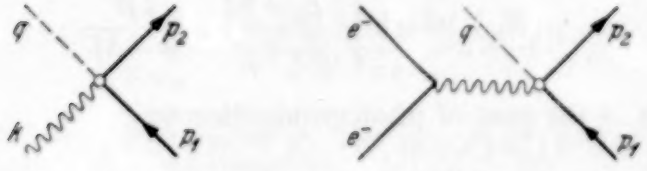
In section 2 we write down some kinematical preliminaries. Section 3 gives the general form of the integral equation and the application of the Muskhelishvili method. In section 4 the essential results are rederived by the N/D method. Appendix A repeart some important kinematic formulae. Appendix B gives the general expressions for the multipoles for electroproduction of pions in the Born approximations. Appendix C finally contains the corresponding formula for ρ and ω exchange. Numerical results will be given in a subsequent paper.

2. Notation and Kinematics

We consider the processes

$$\gamma+N\to\pi+N$$

$$e^-+N\to e^-+N+\pi$$



$k=(\boldsymbol{k}, k_0)$ and $q=(\boldsymbol{q}, q_0)$ denote the four-momenta of the photon and the pion and $p_1=(-\boldsymbol{k}, E_1)$ and $p_2=(-\boldsymbol{q}, E_2)$ represent the four-momenta of the initial and final nucleon, respectively, in the CMS of γN. In the lab-system of the $ee\gamma$-vertex $r_1=(\boldsymbol{r}_1, \varepsilon_1)$, $r_2=(\boldsymbol{r}_2, \varepsilon_2)$ and $K=(\boldsymbol{K}, K_0)$ denote the four-vector momenta of the incoming, outgoing electron and photon respectively. The square of the mass of the virtual

photon is taken to be $-\lambda^2$ so that

$$(r_1-r_2)^2=K^2=k^2=\lambda^2.$$

As usual we define

$$s=-(p_1+k)^2, \quad t=-(q-k)^2, \quad u=-(p_2-k)^2$$

$s=W^2$ denotes the square of the total CMS energy of γN. Conservation of energy-momentum and the mass shell restrictions $p_1^2=p_2^2=-M^2$, $q^2=-1$, $k^2=\lambda^2$ lead to

$$s+t+u=2M^2+1-\lambda^2.$$

For further reference we write down the kinematical expressions for the energies and momenta:

$$E_1=\frac{W^2+M^2+\lambda^2}{2W}, \quad E_2=\frac{W^2+M^2-1}{2W}$$

$$k_0=\frac{W^2-M^2-\lambda^2}{2W}, \quad q_0=\frac{W^2-M^2+1}{2W}$$

$$|\boldsymbol{q}|^2=\frac{[W^2-(M+1)^2][W^2-(M-1)^2]}{4W^2}=(E_2+M)(E_2-M)$$

$$|\boldsymbol{k}|^2=\frac{[W^2-(M+i\lambda)^2][W^2-(M-i\lambda)^2]}{4W^2}=(E_1+M)(E_1-M).$$

We derive dispersion relations for the multipoles in the usual way[16, 17, 27, 29, 31, 34]. Starting from the Mandelstam representation for the invariant amplitudes A_i we write down fixed t dispersion relations from which we get equations for the multipoles by the well known projection procedure. For completeness we give the main formulae in Appendix A. The reader is referred to the papers[29, 30] for further detail. For the kinematical factor of Eq. (9) we have chosen

$$\rho(W,\lambda^2)=q\,k\sqrt{\frac{E_2+M}{E_1+M}}\cdot\frac{2W}{W-M} \tag{11}$$

which reduces in the case of photoproduction to

$$\rho(W)=q\sqrt{2W(E_2+M)}. \tag{11a}$$

This factor allows for the correct threshold behaviour of the multipoles and improves the convergence of the integrals considerably. Furthermore the function $M(W,\lambda^2)$ as defined in Eq. (12) below (section 3) is free of kinematical singularities. In principle one can use equally well other factors, which provide the correct threshold behaviour and which do not

change the analytic properties of the multipole on the physical cut. Then, on the cut, the solution of the singular integral equation including the kernel (Eq. (22) in section 3) will be always the same.

3. Solution of the Singular Integral Equations

By the usual projection procedure for the multipoles as described in greater detail in refs.[29, 34] we derive the following system of dispersion relations for the multipoles

$$M_i(W,\lambda^2)=M_i^B(W,\lambda^2)+M_i^{(\rho,\omega)}(W,\lambda^2)+ \\ +\frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty} dW'\,\frac{\mathfrak{Im}\,M_i(W',\lambda^2)}{W'-W-i\,\varepsilon}+ \\ +\frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty} dW'\sum_j K_{ij}(W,W',\lambda^2)\,\mathfrak{Im}\,M_j(W',\lambda^2). \tag{12}$$

Here $M_i(W,\lambda^2)$ denotes any of the various magnetic, electric or longitudinal multipoles divided by $\rho(W)$ as given by (11), $M_i^B(W,\lambda^2)$ denotes the contribution of the Born diagrams Fig. 1a–c, $M_i^{(\rho,\omega)}(W,\lambda^2)$ the contribution of ρ, ω-exchange Fig. 1d (the index i labels spin and isospin indices which are of no interest in the present context).

A remark on the validity of (12) should be made: We expect (12) to be valid only for W-values below 11 m_π corresponding to equivalent photon energies of about 600 MeV. This wellknown limitation is due to a possible divergence of the multipole expansion and the increasing importance of multiple meson production.

Assuming the Watson theorem[37] to be valid on the whole cut, i.e.

$$\mathfrak{Im}\,M_k(W,\lambda^2)=e^{-i\,\delta_k(W)}\sin\delta_k(W)\,M_k(W,\lambda^2)\equiv h_k^*(W)\,M_k(W,\lambda^2), \tag{13}$$

Eq. (12) can be transformed into the singular integral equations:

$$M_i(W,\lambda^2)=M_i^B(W,\lambda^2)+M_i^{(\rho,\omega)}(W,\lambda^2)+ \\ +\frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty}\frac{h_i(W')\,M_i(W',\lambda^2)}{W'-W-i\,\varepsilon}\,dW'+ \\ +\frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty} dW'\sum_j K_{ij}(W,W',\lambda^2)\,h_j^*(W')\,M_j(W',\lambda^2) \tag{14}$$

where $M_i^B(W,\lambda^2)$ and $M_i^{(\rho,\omega)}(W,\lambda^2)$ can be evaluated from the formulae of appendices B and C and $h_i(W)$ is assumed to be known from an investigation of πN scattering. The assumption (13) means that (14) can be applied only to those multipoles to which *a* πN-partial-wave-amplitude corresponds the phase of which is real.

First let us consider Eq. (14) with $K_{ij}(W, W', \lambda^2)=0$ the general solution of the singular integral equation ("characteristic" equation)

$$M(W)=M^B(W)+M^{(\rho,\omega)}(W)+\frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty} dW' \frac{h^*(W')\,M(W')}{W'-W-i\varepsilon} \tag{15}$$

(we omit the index i and the dependence on λ^2 for convenience) with the asymptotic condition $M(\infty)=0$ is given by [39]:

$$\begin{aligned} M(W)&=M^B(W)+M^{(\rho,\omega)}(W)+\\ &+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{D(W)}\int_{W_0}^{\infty} dW' \frac{D(W')\,h(W')\big(M^B(W')+M^{(\rho,\omega)}(W')\big)}{W'-W-i\varepsilon}+\\ &+P(W)\cdot\frac{1}{D(W)} \qquad (16)\\ &\equiv M^P(W)+P(W)\cdot\frac{1}{D(W)} \end{aligned}$$

where

$$\frac{1}{D(W)}=\exp\left\{\frac{W}{\pi}\int_{W_0}^{\infty}\frac{\delta(W')}{W'(W'-W-i\varepsilon)}\,dW'\right\} \tag{17}$$

is a solution of the homogeneous equation

$$M_0(W)=\frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty} dW' \frac{h^*(W')\,M_0(W')}{W'-W-i\varepsilon}. \tag{18}$$

$P(W)$ is a polynomial the degree of which has to be determined from the asymptotic condition

$$\lim_{W\to\infty} M(W)=0. \tag{19}$$

$M^P(W)$ is called the "particular" solution. Eq. (16) is the sum of the particular solution and the most general solution of Eq. (18). Let us discuss the asymptotic condition in some detail. We consider the function $M(W)-M^{BV}(W)\equiv M(W)-M^B(W)-M^{(\rho,\omega)}(W)$ in the limit $W\to\infty$. From the Titchmarsh theorem (ref. [42], p. 139) a necessary and sufficient condition for (15) to be valid is given by

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{Im}\,M(W)|^p\,dW<\infty \qquad p>1$$

from which follows

$$\int|M(W)-M^{BV}(W)|^p\,dW<\infty. \tag{19a}$$

[42] TITCHMARSH, E. C.: Theory of Fourier integrals, 2. ed., p. 339. Oxford 1948. — NOYES, P., and D. Y. WONG: Phys. Rev. Letters **3**, 191 (1959). — CHEW, G. F., and S. MANDELSTAM: Phys. Rev. **119**, 467 (1960).

Therefore $M(W)-M^{BV}(W)$ is bounded on the real axis*. Then from the validity of (15) and the Phragmen-Lindelöf-theorem [43]

$$|M(W)-M^{BV}(W)|<K$$

in the upper part of the complex W-plane.

From (19a)

$$\lim\left(M(W)-M^{B}(W)\right)=0$$

for W on the real axis and therefore by means of the extended version of the Phragmen-Lindelöf theorem as given by NEVANLINNA [43]

$$\lim\left(M(W)-M^{B}(W)-M^{(\rho,\omega)}(W)\right)=0 \tag{19b}$$

uniformly for $0<\arg W<\pi-\eta(\eta>0)$. Quite the same considerations are valid for the lower part of the W plane, so that (19b) is valid for any direction in the complex plane. Eq. (19) is a direct consequence of (19b) and the asymptotic behaviour of $M^{BV}(W)$. By analogy also

$$\lim_{W\to\infty} M_0(\infty)=0.$$

The polynomial $P(W)$ depends crucially on the high energy behaviour of $D(W)$ and therefore on the high energy behaviour of the phase shift. To see this better we write

$$\frac{1}{D(W)}=\left(\frac{W_0}{W-W_0}\right)^{\frac{\delta(W)}{\pi}}\cdot\exp\left\{\frac{W}{\pi}\int_{W_0}^{\infty}\frac{\delta(W')-\delta(W)}{W'(W'-W-i\varepsilon)}\,dW'\right\}. \tag{20}$$

In the limit $W\to\infty$ the exponential term in Eq. (20) tends to a constant and for high values of W

$$\frac{1}{D(W)}=\text{const}\cdot\left(\frac{1}{W}\right)^{\frac{\delta(\infty)}{\pi}}. \tag{21}$$

Now let us assume that $\delta(\infty)=n\pi$ with $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Then if

- $n<0$ there exists no solution of (15) at all, because $1/D(W)$ diverges like W^n as $W\to\infty$;
- $n=0$ there exists one unique solution ($P(W)\equiv0$) because $1/D(W)$ tends to a constant value as $W\to\infty$;
- $n>0$ there exist infinitely many solutions of (15) and $P(W)$ has the degree $n-1$. In this case $1/D(W)$ vanishes like $1/W^n$ as $W\to\infty$.

---

* To be rigorous, we have assumed a Hölder condition to be valid on the cut.

[43] NEVANLINNA, R.: Eindeutige Analytische Funktionen, 2. ed. S. 44/45. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1953.

In the same way one sees that also for $0<\delta(\infty)<\pi$ the solution is not unique but contains one arbitrary parameter.

In case the kernel $K_{ij}(W, W', \lambda^2)$ differs from zero in the range of W, W' the integral Eq. (14) can be reduced to a system of nonsingular integral equations which may be solved by means of the Fredholm theory, if the kernels and the phase shifts fulfill some convergence conditions, which we shall discuss in our subsequent paper.

The problem of finding a solution if $K_{ij}(W, W', \lambda^2) \neq 0$ is reduced to the problem of solving the following nonsingular integral equation: Replace $M_i^B(W, \lambda^2) + M_i^{(\rho,\omega)}(W, \lambda^2)$ by

$$M_i^B(W,\lambda^2) + M_i^{(\rho,\omega)}(W,\lambda^2) + \frac{1}{\pi}\int dW' \sum_j K_{ij}(W,W',\lambda^2)\, h_j^*(W')\, M_j(W',\lambda^2)\,.$$

This yields

$$M_i(W,\lambda^2) = N_i(W,\lambda^2) + \sum_j \frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty} F_{ij}(W,W',\lambda^2)\, M_i(W',\lambda^2)\, dW' \tag{22}$$

where

$$N_i(W,\lambda^2) = M_i^B(W,\lambda^2) + M_i^{(\rho,\omega)}(W,\lambda^2) + \\ + \frac{1}{D_i(W)} \cdot \frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty} \frac{D_i(W')\, h_i(W')\, M_i^B(W',\lambda^2)}{W'-W-i\varepsilon}\, dW' \tag{23}$$

and

$$F_{ij}(W,W',\lambda^2) = K_{ij}(W,W',\lambda^2)\, h_j(W') + \frac{1}{D_i(W)}\,\frac{1}{\pi} \times \\ \times \int_{W_0}^{\infty} \frac{D_i(W'')\, h_i(W'')\, K_{ij}(W'',W',\lambda^2)\, h_j^*(W')}{W''-W-i\varepsilon}\, dW''. \tag{24}$$

For the mathematical details the reader is referred to the cited literature[29, 39].

4. Application of the N/D-Method

It is illustrative to reformulate the results of the preceding section in the language of the N/D-(Wiener-Hopf) method[42]. For that purpose we start from the usual ansatz for the solution of (15)

$$M(W) = \frac{\mathfrak{N}(W)}{\mathfrak{D}(W)} \tag{25}$$

where the nominator $\mathfrak{N}(W)$ carries the singularities of the Born approximation $M^B(W)$ but is regular on the righthand (unitarity) cut. On the other hand $\mathfrak{D}(W)$ should have the correct singularities on the righthand cut. Moreover we normalize $\mathfrak{N}$ and $\mathfrak{D}$ in such a way that

$$\mathfrak{D}(\infty) = 1. \tag{26}$$

Such a $\mathfrak{D}$-function can always be constructed. We only need to divide the D-function of Eq. (17) by a suitable real polynomial of degree

$$n=\frac{\delta(\infty)}{\pi}.$$

But in this way additional CDD-poles are introduced into $\mathfrak{D}(W)$. Therefore the discontinuity or the imaginary part of $\mathfrak{D}(W)$ is no longer given by

$$\mathfrak{Im}\,\mathfrak{D}(W)=-h(W)\,\mathfrak{D}(W) \tag{27}$$

which follows directly from (13) but by the expression

$$\mathfrak{Im}\,\mathfrak{D}(W)=-h(W)\,\mathfrak{D}(W)+\pi\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\delta(W-a_n) \tag{28}$$

where a_n are the positions of the CDD-poles and λ_n the corresponding residues. From (27) and (28) we deduce the following integral equation for $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{D}(W)=1+\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_n}{a_n-W}-\frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty}\frac{h(W')\,\mathfrak{D}(W')}{W'-W-i\varepsilon}\,dW'. \tag{29}$$

The poles of $\mathfrak{D}(W)$ lead in general to CDD-zeros of the multipole amplitudes. The residues λ_n are fixed once the positions a_n of the poles are given. This follows from

$$\mathfrak{D}(W)=\frac{D(W)}{A\prod_{n=1}^{N}(a_n-W)} \tag{30}$$

where A can be determined from (26). The only remaining arbitrary parameters a_n correspond to the open constants of Eq. (16). To see this in more detail we start from the well known formula for $\mathfrak{R}(W)$

$$\mathfrak{R}(W)=\frac{1}{\pi}\int_{L}\frac{\mathfrak{D}(W')\,\mathfrak{Im}\,M^B(W')}{W'-W-i\varepsilon}\,dW' \tag{31}$$

where the integration goes along the lefthand cut L and $2i\mathfrak{Im}\,M^B(W)$ is the discontinuity of the Born approximation along this cut. Introducing the integral Eq. (29) into (31) one finds

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(W)=M^B(W)+\sum_n\frac{\lambda_n}{a_n-W}\left[M^B(W)-M^B(a_n)\right]-\\-\frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty}\frac{h(W')}{W'-W}\left[M^B(W)-M^B(W')\right]\mathfrak{D}(W')\,dW'\end{aligned} \tag{32}$$

or

$$\mathfrak{N}(W)=\mathfrak{D}(W)\mathfrak{M}^P(W)-\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_n M^B(a_n)}{a_n-W} \tag{33}$$

where the particular solution $\mathfrak{M}^P(W)$ is defined analogously to (16) only replacing D by $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{M}^P(W)=M^B(W)+\frac{1}{\mathfrak{D}(W)}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty}\frac{h(W')\mathfrak{D}(W')M^B(W')}{W'-W-i\varepsilon}\,dW'. \tag{34}$$

Finally we find from (33)

$$M(W)=\mathfrak{M}^P(W)-\frac{1}{\mathfrak{D}(W)}\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_n M^B(a_n)}{a_n-W}. \tag{35}$$

This expression contains because of (30) no poles at $W=a_n$. On the other hand $\mathfrak{N}(W)$ is regular for $W=a_n$ and on the right-hand cut which can be explicitely seen in (32). Therefore the expression (35) contains zeros for $W=a_n$, which fact can also be checked directly. By straightforward algebra one can bring (35) exactly in the form of Eq. (16). To avoid too lengthy expressions we only write down the relevant formulae for $N=1$. In this the CDD pole a must be real and one has

$$\mathfrak{D}(W)=\frac{D(W)}{A(a-W)};\quad \lambda=\frac{D(a)}{A}, \tag{36}$$

$$\mathfrak{M}^P(W)=M^P(W)-\frac{1}{D(W)}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty}\frac{h(W')D(W')M^B(W')}{W'-a}\,dW' \tag{37}$$

so that

$$M(W)=M^P(W)+\frac{c}{D(W)} \tag{38}$$

with

$$\begin{aligned}c&=-D(a)M^B(a)-\frac{1}{\pi}\int_{W_0}^{\infty}\frac{h(W')D(W')M^B(W')}{W'-a}\,dW'\\&=-D(a)M^P(a).\end{aligned}$$

Therefore we have the final result

$$M(W)=M^P(W)-\frac{D(a)}{D(W)}M^P(a) \tag{39}$$

where the zero for $W=a$ is explicit. From our considerations it is evident that this CDD zero is always be present if $\delta(\infty)=\pi$. In principle it could be compensated by a pole of the $\mathfrak{N}(W)$ function for $W=a$. Such a pole does not occur if $\mathfrak{N}(W)$ is determined by the singularities of the Born

approximation. But even if one replaces $M^B(W)$ by a different inhomogeneity as in ref.[41] the occurence of such a pole is highly improbable. In fact the numerical results of [41] show that the zero is only pushed to higher W-values. – To conclude this section we deduce from (31) an approximation for the nominator functions $\mathfrak{N}(W)$ valid for phase shifts with a pronounced resonance (cp. also ref.[25]). In this case we replace by integrating over the lefthand cut the exact $\mathfrak{D}$-function by

$$\mathfrak{D}(W)=\frac{W_r-W}{W_r}\cdot\frac{1}{A(a-W)} \tag{36}$$

which follows from (30) and (18) by the approximation

$$\delta(W)\cong\pi\,\theta(W-W_r)$$

compare Fig. 4:

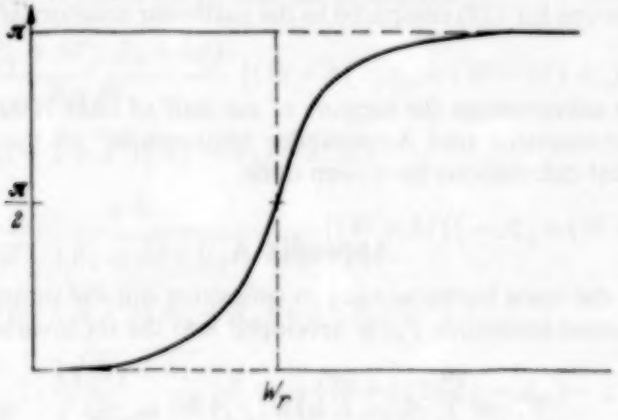


Fig. 4. The approximation for the P_{33} phase shift (dashed lines) with which $D(W)$ was evaluated on the left hand cut

Using the expression (36) for the evaluation of (31) one finds

$$\begin{aligned} M(W)&\equiv\frac{\mathfrak{N}(W)}{\mathfrak{D}(W)}\\ &\cong\frac{1}{D(W)}\left[\left(1-\frac{W}{W_r}\right)M^B(W)-\left(1-\frac{W_r}{a}\right)M^B(a)\right]. \end{aligned} \tag{37}$$

In the last expression one is of course not allowed to use the approximation (36) for $\mathfrak{D}(W)$. This corresponds to the following approximation for the particular solution

$$M^P(W)=\frac{1}{D(W)}\left(1-\frac{W}{W_r}\right)M^B(W). \tag{38}$$

From this expression it is evident that M^P has for $W = W_r$ no resonance but a zero. The resonance behaviour of (37) is in this approximation completely due to the contribution of the solution of the homogeneous Eq. (18). Also for the exactly evaluated M^P this fact is nearly true. For illustration we compare in Fig. 5 the approximation (39) with the exact particular solution.

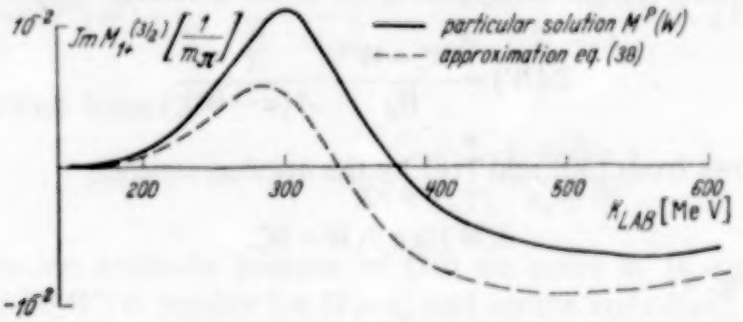


Fig. 5. Approximation Eq. (38) compared to the particular solution $M^P(W)$ of Eq. (16)

We gratefully acknowledge the support of the staff of IBM 7090 computer of the "Institut für Instrumentelle und Angewandte Mathematik" of the Bonn university where all numerical calculations have been done.

Appendix A

Here we give the main formulae used in projecting out the multipole amplitudes. The Lorentz-invariant amplitude T_{fi} is developed into the six invariants:

$$T_{fi} = \sum_{i=1}^{6} A_i(s,t,u)\,\bar{u}(p_2)\,M_i\,u(p_1). \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \tfrac{1}{2} i\gamma_5 F_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu, & M_2 &= 2i\gamma_5 F_{\mu\nu} P^\mu (q - \tfrac{1}{2}k)^\nu \\ M_3 &= \gamma_5 F_{\mu\nu}\gamma^\mu q^\nu, & M_4 &= 2(\gamma_5 F_{\mu\nu}\gamma^\mu P^\nu - M M_1) \\ M_5 &= i\gamma_5 F_{\mu\nu} k^\mu q^\nu, & M_6 &= \gamma_5 F_{\mu\nu} k^\mu \gamma^\nu \end{aligned} \tag{A.2}$$

where

$$F_{\mu\nu} = \varepsilon_\mu k_\nu - \varepsilon_\nu k_\mu, \qquad P_\mu = \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2)_\mu .$$

ε_μ denotes the polarization vector of the photon. The invariants given above are identical to those of DENNERY[16].

T_{fi} is related to the CGLN amplitude $\mathfrak{F}$ by:

$$\langle \chi_f | \mathfrak{F} | \chi_i \rangle = \frac{M}{4\pi W}\, T_{fi} \tag{A.3}$$

χ_i, χ_f denote Pauli spinors. Then with

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}, \qquad \hat{\boldsymbol{q}} = \frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|},$$

$$\mathfrak{F}=i\sigma\cdot\varepsilon\,\mathfrak{F}_1+(\sigma\cdot\hat{q})(\sigma\cdot\hat{k}\times\varepsilon)\,\mathfrak{F}_2+i(\sigma\cdot\hat{k})(\hat{q}\cdot\varepsilon)\,\mathfrak{F}_3+$$
$$+i(\sigma\cdot\hat{q})(\hat{q}\cdot\varepsilon)\,\mathfrak{F}_4+i(\sigma\cdot\hat{k})(\hat{k}\cdot\varepsilon)\,\mathfrak{F}_5+i(\sigma\cdot\hat{q})(\hat{k}\cdot\varepsilon)\,\mathfrak{F}_6- \qquad \text{(A.4)}$$
$$-i(\sigma\hat{k})\varepsilon_0\,\mathfrak{F}_7-i(\sigma\hat{q})\varepsilon_0\,\mathfrak{F}_8$$

where by current conservation (in the following we write k, q instead of $|\boldsymbol{k}|, |\boldsymbol{q}|$ resp.)

$$\mathfrak{F}_7=\frac{k}{k_0}(\mathfrak{F}_1+x\,\mathfrak{F}_3+\mathfrak{F}_5)\quad\text{and}\quad\mathfrak{F}_8=\frac{k}{k_0}(x\,\mathfrak{F}_4+\mathfrak{F}_6) \qquad \text{(A.5)}$$

with $x=\cos\vartheta=\hat{q}\,\hat{k}$.

It is convenient to eliminate from Eq. (A.4) the amplitudes $\mathfrak{F}_5$ and $\mathfrak{F}_6$ and to work with the set $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_4$, $\mathfrak{F}_7$, $\mathfrak{F}_8$ because the angular momentum decomposition of $\mathfrak{F}_7$ and $\mathfrak{F}_8$ is simpler that that of $\mathfrak{F}_5$ and $\mathfrak{F}_6$ and spurious singularities in the scalar multipoles are avoided.

The connection between the $\mathfrak{F}_i$ and the A_i is given by:

$$\mathfrak{F}_1=\frac{\sqrt{(E_1+M)(E_2+M)}}{8\pi W}\{(W-M)(A_1+(W-M)A_4)-$$
$$-\tfrac{1}{2}(t-1+\lambda^2)(A_3-A_4)+\lambda^2A_6\}$$
$$\mathfrak{F}_2=\frac{qk}{8\pi W\sqrt{(E_1+M)(E_2+M)}}\{(W+M)(-A_1+(W+M)A_4)-$$
$$-\tfrac{1}{2}(t-1+\lambda^2)(A_3-A_4)+\lambda^2A_6\}$$
$$\mathfrak{F}_3=\frac{qk}{8\pi W}\cdot\sqrt{\frac{E_2+M}{E_1+M}}\{\beta A_2+(W+M)(A_3-A_4)-\lambda^2A_5\}$$
$$\mathfrak{F}_4=\frac{q^2}{8\pi W}\sqrt{\frac{E_1+M}{E_2+M}}\{-\beta A_2+(W-M)(A_3-A_4)+\lambda^2A_5\} \qquad \text{(A.6)}$$
$$\mathfrak{F}_7=\frac{k}{8\pi W}\sqrt{\frac{E_2+M}{E_1+M}}\{(E_1+M)(A_1+(W-M)A_4)+\alpha A_2+$$
$$+\gamma A_5+(\tfrac{1}{2}(t-1+\lambda^2)+q_0(W+M))(A_3-A_4)-$$
$$-(\lambda^2+k_0(W+M))A_6\}$$
$$\mathfrak{F}_8=\frac{q}{8\pi W}\sqrt{\frac{E_1+M}{E_2+M}}\{(E_1-M)(-A_1+(W+M)(A_4-A_6))-$$
$$-\alpha A_2-\gamma A_5+(\tfrac{1}{2}(t-1+\lambda^2)+q_0(W-M))(A_3-A_4)\}.$$

In these equations

$$\alpha=(W-\tfrac{3}{4}k_0)(t-1)+(2q_0-k_0)(k_0W+\tfrac{3}{4}\lambda^2)$$
$$\beta=2Wk_0+\tfrac{3}{2}\lambda^2;\quad\gamma=\tfrac{1}{2}(k_0(t-1)+(k_0-2q_0)\lambda^2),$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_1 &= \sum_{l=0}^{\infty} [(l M_{l+} + E_{l+}) P'_{l+1}(x) + ((l+1) M_{l-} + E_{l-}) P'_{l-1}(x)] \\
\mathfrak{F}_2 &= \sum_{l=1}^{\infty} [(l+1) M_{l+} + l M_{l-}] P'_l(x) \\
\mathfrak{F}_3 &= \sum_{l=1}^{\infty} [(E_{l+} - M_{l+}) P''_{l+1}(x) + (E_{l-} + M_{l-}) P''_{l-1}(x)] \\
\mathfrak{F}_4 &= \sum_{l=1}^{\infty} [M_{l+} - E_{l+} - M_{l-} - E_{l-}] P''_l(x) \\
\mathfrak{F}_7 &= \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1) S_{l+} P'_{l+1}(x) - l S_{l-} P'_{l-1}(x)] \\
\mathfrak{F}_8 &= \sum_{l=0}^{\infty} [l S_{l-} - (l+1) S_{l+}] P'_l(x)
\end{aligned} \tag{A.7}$$

The scalar multipoles $S_{l\pm}$ and the longitudinal multipoles $L_{l\pm}$ as used in references[16, 29] are connected by

$$S_{l\pm} = \frac{k}{k_0} L_{l\pm}$$

(cp. [28, 34]). Inverting the Eq. (A.7) we derive[16, 17]

$$\begin{aligned}
M_{l\pm} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{l+1} \\ -\frac{1}{l} \end{pmatrix} \int_{-1}^{+1} dx \Big[& \mathfrak{F}_1 P_l(x) - \mathfrak{F}_2 P_{l\pm1}(x) - \\
& - \mathfrak{F}_3 \frac{P_{l-1}(x) - P_{l+1}(x)}{2l+1} \Big],
\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
E_{l\pm} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{l+1} \\ \frac{1}{l} \end{pmatrix} \int_{-1}^{+1} dx \Bigg[& \mathfrak{F}_1 P_l(x) - \mathfrak{F}_2 P_{l\pm1}(x) + \\
& + \begin{pmatrix} l \\ -(l+1) \end{pmatrix} \mathfrak{F}_3 \frac{P_{l-1}(x) - P_{l+1}(x)}{2l+1} + \\
& + \mathfrak{F}_4 \begin{pmatrix} \frac{l+1}{2l+3} \\ \frac{l}{2l-1} \end{pmatrix} (P_l(x) - P_{l\pm2}(x)) \Bigg],
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$S_{l\pm} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{l+1} \\ \frac{1}{l} \end{pmatrix} \int_{-1}^{+1} dx [\mathfrak{F}_7 P_l(x) + \mathfrak{F}_8 P_{l\pm1}(x)]. \tag{A.10}$$

In conclusion we write down the isospin dependence of the invariant amplitudes. In the following equations τ_α are the Pauli matrices, $A_l^{(0)}$, $A_l^{(\frac{1}{2})}$ and $A_l^{(\frac{3}{2})}$ denote the amplitudes describing states of total isospin $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ resp.

$$\begin{aligned} A_l(s,t,u) &\equiv A_l^{(0)}\tau_\alpha + A_l^{(+)}\delta_{\alpha 3} + A_l^{(-)}\tfrac{1}{2}[\tau_\alpha,\tau_3] \\ &\equiv A_l^{(0)}\tau_\alpha + \tfrac{1}{3}\tau_\alpha\tau_3 A_l^{(\frac{3}{2})} + (\delta_{\alpha 3} - \tfrac{1}{3}\tau_\alpha\tau_3) A_l^{(\frac{1}{2})} \qquad \text{(A.11)} \\ A_l^{(\frac{3}{2})} &= A_l^{(+)} + 2A_l^{(-)}, \quad A_l^{(\frac{1}{2})} = A_l^{(+)} - A_l^{(-)}. \end{aligned}$$

Appendix B

In this appendix we write down the Born approximation for the multipoles. In the following formulae we use:

$$e_r = \sqrt{\frac{4\pi}{137}}, \quad G_r = 2M\sqrt{4\pi}\cdot f, \quad f^2 = 0.08.$$

$G_M^{S,V}(\lambda^2)$ ($G_E^{S,V}(\lambda^2)$) are the usual isotopic scalar and isotopic vector magnetic (electric) form factors as given e.g. in ref.[44]. F_π denotes the π-meson form factor. The functions $Q_l(z)$ denote the associated Legendre polynomials defined by

$$Q_l(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{P_l(x)}{x-z}\,dx.$$

The arguments $1/v$ and $1/V$ are given by

$$\frac{1}{v} = \frac{2q_0 k_0 + \lambda^2}{2q\,k}; \quad \frac{1}{V} = \frac{2E_2 k_0 + \lambda^2}{2q\,k}.$$

δ_{lk} is the usual Kronecker symbol.

$$M_{l\pm}^{(\frac{0}{\pm})}(W,\lambda^2)^B = \begin{bmatrix} \frac{1}{l+1} \\ -\frac{1}{l} \end{bmatrix} \frac{e_r G_r}{8\pi W}\sqrt{\frac{E_2+M}{E_1+M}} \times$$

$$\times \left[\frac{4M(W-M)}{4M^2+\lambda^2} \frac{(Q_{l-1}-Q_{l+1})\left(-\frac{1}{V}\right)}{2l+1} \begin{pmatrix} G_E^S \\ G_E^V \\ -G_E^V \end{pmatrix} + \right.$$

$$+ \left\{ \frac{(W-M)(E_1+M)}{q\,k} Q_l\left(-\frac{1}{V}\right) + \frac{W+M}{E_2+M} Q_{l\pm1}\left(-\frac{1}{V}\right) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{4M(W+M)+2\lambda^2}{4M^2+\lambda^2} \cdot \frac{(Q_{l-1}-Q_{l+1})\left(-\frac{1}{V}\right)}{2l+1} \right\} \begin{pmatrix} G_M^S \\ G_M^V \\ -G_M^V \end{pmatrix} - \right.$$

[44] HAND, L. N., D. G. MILLER, and R. WILSON: Revs. Modern Phys. **35**, 335 (1963).

$$-\frac{2}{2l+1}\left[Q_{l-1}\left(\frac{1}{v}\right)-Q_{l+1}\left(\frac{1}{v}\right)\right]\begin{pmatrix}0\\0\\F_\pi\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{2\delta_{l\pm1,0}}{W-M}\cdot\frac{q\,k}{E_2+M}\left\{\begin{pmatrix}G_M^S\\G_M^V\\-G_M^V\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+\frac{4M(W+M)+2\lambda^2}{4M^2+\lambda^2}\begin{pmatrix}0\\0\\G_M^V\end{pmatrix}-\frac{4M(W-M)}{4M^2+\lambda^2}\begin{pmatrix}0\\0\\G_E^V\end{pmatrix}\right\}\Bigg],$$

$$E_{l\pm}^{(0)}(W,\lambda^2)^B=\begin{bmatrix}\frac{1}{l+1}\\\frac{1}{l}\end{bmatrix}\frac{e_r G_r}{16\pi W}\frac{\sqrt{E_2+M}}{\sqrt{E_1+M}}\times$$

$$\times\left[\left\{\frac{(W-M)(E_1+M)}{q\,k}Q_l\left(-\frac{1}{V}\right)+\frac{W+M}{E_2+M}Q_{l\pm1}\left(-\frac{1}{V}\right)+\right.\right.$$

$$+\frac{4M}{4M^2+\lambda^2}\left(\begin{bmatrix}l\\-(l+1)\end{bmatrix}\left(W+M+\frac{\lambda^2}{2M}\right)\times\right.$$

$$\times\frac{(Q_{l-1}-Q_{l+1})\left(-\frac{1}{V}\right)}{2l+1}+\begin{bmatrix}\frac{l+1}{2l+3}\\\frac{l}{2l-1}\end{bmatrix}\frac{q(E_1+M)}{k(E_2+M)}\times$$

$$\left.\left.\left.\times\left(W-M-\frac{\lambda^2}{2M}\right)(Q_l-Q_{l\pm2})\left(-\frac{1}{V}\right)\right)\right\}\begin{pmatrix}G_M^S\\G_M^V\\-G_M^V\end{pmatrix}+\right.$$

$$+\frac{4M}{4M^2+\lambda^2}\left\{\begin{bmatrix}l\\-(l+1)\end{bmatrix}(W-M)\frac{(Q_{l-1}-Q_{l+1})\left(-\frac{1}{V}\right)}{2l+1}+\right.$$

$$\left.\left.+\begin{bmatrix}\frac{l+1}{2l+3}\\\frac{l}{2l-1}\end{bmatrix}\frac{q(E_1+M)}{k(E_2+M)}(W+M)(Q_l-Q_{l\pm2})\left(-\frac{1}{V}\right)\right\}\times\right.$$

$$\times\begin{pmatrix} G_E^S \\ G_E^V \\ -G_E^V \end{pmatrix}+2\left\{\begin{bmatrix} l \\ -(l+1) \end{bmatrix}\frac{Q_{l-1}\left(\frac{1}{v}\right)-Q_{l+1}\left(\frac{1}{v}\right)}{2l+1}-\right.$$

$$\left.-\begin{bmatrix} \frac{l+1}{2l+3} \\ \frac{l}{2l-1} \end{bmatrix}\frac{q(E_1+M)}{k(E_2+M)}\left(Q_l\left(\frac{1}{v}\right)-Q_{l\pm 2}\left(\frac{1}{v}\right)\right)\right\}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_\pi \end{pmatrix}+$$

$$+2\frac{E_1+M}{W+M}\delta_{l0}\left\{\begin{pmatrix} G_M^S \\ G_M^V \\ -G_M^V \end{pmatrix}-\frac{4M}{4M^2+\lambda^2}\left(W-M-\frac{\lambda^2}{2M}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G_M^V \end{pmatrix}+\frac{4M}{4M^2+\lambda^2}(W+M)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ G_E^V \end{pmatrix}\right\}\Bigg],$$

$$S_{l\pm}^{(0)}(W,\lambda^2)^B=\begin{bmatrix} \frac{1}{l+1} \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix}\frac{e_r G_r}{16\pi W}\sqrt{\frac{E_2+M}{E_1+M}}\times$$

$$\times\left[\frac{2M(2E_2-k_0)}{4M^2+\lambda^2}\left\{\frac{W-M}{q}Q_l\left(-\frac{1}{V}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(W+M)(E_1+M)}{k(E_2+M)}Q_{l\pm 1}\left(-\frac{1}{V}\right)\right\}\begin{pmatrix} G_E^S \\ G_E^V \\ -G_E^V \end{pmatrix}-$$

$$-\left\{\left[\frac{2E_2-k_0}{2M}\left(W+M-\frac{\lambda^2(W-M)}{4M^2+\lambda^2}\right)-E_1-M\right]\times\right.$$

$$\times\frac{Q_l\left(-\frac{1}{V}\right)}{q}+\left[\frac{2E_2-k_0}{2M}\left(W-M-\frac{\lambda^2(W+M)}{4M^2+\lambda^2}\right)+\right.$$

$$\left.+E_1-M\right]\frac{E_1+M}{k(E_2+M)}Q_{l\pm 1}\left(-\frac{1}{V}\right)\begin{pmatrix} G_M^S \\ G_M^V \\ -G_M^V \end{pmatrix}+$$

$$+(2q_0-k_0)\left[\frac{Q_l\left(\frac{1}{v}\right)}{q}-\frac{E_1+M}{E_2+M}\frac{Q_{l\pm 1}\left(\frac{1}{v}\right)}{k}\right]\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_\pi \end{pmatrix}+$$

$$+\frac{2k_0}{\lambda^2}\left(k\,\delta_{l,0}-q\,\frac{E_1+M}{E_2+M}\,\delta_{l\pm1,0}\right)\times$$

$$\times\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\F_\pi\end{pmatrix}-\frac{8M^2}{4M^2+\lambda^2}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\G_E^V\end{pmatrix}+\frac{\lambda^2}{4M^2}\begin{pmatrix}0\\0\\G_M^V\end{pmatrix}\right]\right\}+$$

$$+\frac{k}{M(W+M)}\times$$

$$\times\delta_{l0}\left\{\begin{pmatrix}\left[\left(\frac{\lambda^2}{4M^2+\lambda^2}-1\right)(W+E_1)-2M\right]\begin{pmatrix}G_M^S\\G_M^V\end{pmatrix}\\\left(k_0-\frac{\lambda^2(k_0+2M)}{4M^2+\lambda^2}\right)G_M^V\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+\frac{4M^2(E_1+W)}{4M^2+\lambda^2}\begin{pmatrix}G_E^S\\G_E^V\\-\frac{k_0+2M}{E_1+W}\,G_E^V\end{pmatrix}\right\}+$$

$$+\frac{q(E_1+M)}{M(W-M)(E_2+M)}\times$$

$$\times\delta_{l\pm1,0}\left\{\begin{pmatrix}\left[\left(\frac{\lambda^2}{4M^2+\lambda^2}-1\right)(W+E_1)+2M\right]\begin{pmatrix}G_M^S\\G_M^V\end{pmatrix}\\\left(k_0+\frac{\lambda^2(2M-k_0)}{4M^2+\lambda^2}\right)G_M^V\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{4M^2(E_1+W)}{4M^2+\lambda^2}\begin{pmatrix}G_E^S\\G_E^V\\\frac{-k_0+2M}{E_1+W}\,G_E^V\end{pmatrix}\right\}\right].$$

Appendix C

In this appendix we give the formulae for the multipoles for elementary ρ- and ω-exchange Fig. 1d.

The invariant amplitudes, using simple FEYNMAN rules are given by:

$$A_1=-\Lambda(\lambda^2)F_2\,\frac{t}{t_R-t},\qquad A_2=\Lambda(\lambda^2)F_2\,\frac{t-1-\lambda^2}{(t-1)(t_R-t)}$$

$$A_4=\Lambda(\lambda^2)F_1\,\frac{1}{t_R-t},\qquad A_5=\Lambda(\lambda^2)F_2\,\frac{2P\cdot k}{(t-1)(t_R-t)}$$

$$A_3=A_6=0$$

F_1, F_2 are the coupling constants for the vector meson-nucleon interaction. $\Lambda(\lambda^2)$ is the $\gamma\pi\rho(\omega)$-form factor, t_R denotes the mass squared of the exchanged vector meson. The argument of the associated Legendre polynomials is defined by

$$\frac{1}{r}=\frac{t_R-1+2q_0k_0+\lambda^2}{2qk}$$

ρ-meson-exchange yields a contribution only to the isospin $\frac{1}{2}$ amplitude $A_l^{(0)}$, while ω-meson-exchange contributes only to the amplitude $A_l^{(+)}=A_l^{(\frac{1}{2})}=A_l^{(\frac{3}{2})}$.

Therefore in the following formulae the superscript (0) is associated with ρ-exchange and (+) is associated with ω-exchange.

$$M_{l\pm}^{(0)}_{(+)}(W,\lambda^2)=\begin{bmatrix}\frac{1}{l+1}\\ -\frac{1}{l}\end{bmatrix}\frac{\Lambda(\lambda^2)}{16\pi W}\sqrt{\frac{E_2+M}{E_1+M}}\times$$

$$\times\left[\frac{E_1+M}{qk}\{[(W-M)^2+\tfrac{1}{2}(t_R-1+\lambda^2)]F_1^{(0)}_{(+)}-\right.$$

$$-(W-M)t_RF_2^{(0)}_{(+)}\}Q_l\left(\frac{1}{r}\right)-$$

$$-\frac{Q_{l\pm1}\left(\frac{1}{r}\right)}{E_2+M}\{[(W+M)^2+\tfrac{1}{2}(t_R-1+\lambda^2)]F_1^{(0)}_{(+)}+$$

$$+(W+M)t_RF_2^{(0)}_{(+)}\}+\frac{Q_{l-1}\left(\frac{1}{r}\right)-Q_{l+1}\left(\frac{1}{r}\right)}{2l+1}\times$$

$$\times\{(W+M)F_1^{(0)}_{(+)}-(W^2-M^2+\lambda^2)F_2^{(0)}_{(+)}\}+$$

$$\left.+\frac{qk}{E_2+M}\cdot\delta_{l\pm1,0}[F_1^{(0)}_{(+)}+2(W+M)F_2^{(0)}_{(+)}]\right]$$

$$E_{l\pm}^{(0)}_{(+)}(W,\lambda^2)=\begin{bmatrix}\frac{1}{l+1}\\ \frac{1}{l}\end{bmatrix}\frac{\Lambda(\lambda^2)}{16\pi W}\sqrt{\frac{E_2+M}{E_1+M}}\cdot\left[\frac{E_1+M}{qk}Q_l\left(\frac{1}{r}\right)\times\right.$$

$$\times\{[(W-M)^2+\tfrac{1}{2}(t_R-1+\lambda^2)]F_1^{(0)}_{(+)}-(W-M)t_RF_2^{(0)}_{(+)}\}-$$

$$-\frac{Q_{l\pm1}\left(\frac{1}{r}\right)}{E_2+M}\{[(W+M)^2+\tfrac{1}{2}(t_R-1+\lambda^2)]F_1^{(0)}_{(+)}+$$

$$+(W+M)t_RF_2^{(0)}_{(+)}\}-\begin{bmatrix}l\\ -(l+1)\end{bmatrix}\frac{Q_{l-1}\left(\frac{1}{r}\right)-Q_{l+1}\left(\frac{1}{r}\right)}{2l+1}\times$$

$$\times \{(W+M) F_1^{(0)}_{(+)} - (W^2 - M^2 + \lambda^2) F_2^{(0)}_{(+)}\} -$$

$$- \begin{bmatrix} l+1 \\ \overline{2l+3} \\ l \\ \overline{2l-1} \end{bmatrix} \left[Q_l\left(\frac{1}{r}\right) - Q_{l\pm 2}\left(\frac{1}{r}\right) \right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{q(E_1+M)}{k(E_2+M)} [(W-M) F_1^{(0)}_{(+)} + (W^2 - M^2 + \lambda^2) F_2^{(0)}_{(+)}] \right\} +$$

$$+ \delta_{l0} [F_1^{(0)}_{(+)} + 2(W-M) F_2^{(0)}_{(+)}] (E_1+M) \Bigg],$$

$$S_{l\pm}^{(0)}_{(+)}(W, \lambda^2) = \begin{bmatrix} 1 \\ \overline{l+1} \\ 1 \\ \overline{l} \end{bmatrix} \frac{A(\lambda^2)}{16\pi W} \sqrt{\frac{E_2+M}{E_1+M}} \times$$

$$\times \Bigg[\{[-(E_1+M)(1-\lambda^2-2q_0 k_0) - 2E_2(k_0^2+\lambda^2)] F_2^{(0)}_{(+)} +$$

$$+ (E_2-M)(E_1+M) F_1^{(0)}_{(+)}\} \frac{Q_l\left(\frac{1}{r}\right)}{q} + \frac{E_1+M}{E_2+M} \times$$

$$\times \{[(E_1-M)(1-\lambda^2-2q_0 k_0) + 2E_2(k_0^2+\lambda^2)] F_2^{(0)}_{(+)} +$$

$$+ (E_1-M)(E_2+M) F_1^{(0)}_{(+)}\} \frac{Q_{l\pm 1}\left(\frac{1}{r}\right)}{k} +$$

$$+ (2M F_2^{(0)}_{(+)} + F_1^{(0)}_{(+)}) \Bigg\{ k\,\delta_{l0} + q\,\delta_{l\pm 1,0} -$$

$$- \frac{1}{r} \left[k\, Q_l\left(\frac{1}{r}\right) + q \frac{E_1+M}{E_2+M} Q_{l\pm 1}\left(\frac{1}{r}\right) \right] \Bigg\} \Bigg].$$

In BALL's treatment[17] somewhat different formulae are given for the contribution of the vector mesons. This amounts essentially to adding a constant to the amplitude A_1 (cp. refs. 14, 16). By this change only the multiples E_{0+}, M_{1-}, L_{0+}, and L_{1-} are affected.

Zeitschrift für Physik 202, 477–485 (1967)

Photoproduction of N^* (1236) by Polarized γ-Quanta

K. Böckmann, W. Sandhas, and H. Wessel
Physikalisches Institut der Universität Bonn and KFA Jülich

Received March 20, 1967

The one-pion-exchange model with gauge invariant extension is used to calculate cross sections and decay distributions for the reaction $\gamma p \to N^{*++} \pi^-$ where the γ-quanta are linearly polarized. We show that measurements with polarized γ-quanta would provide a sensitive check of the model. In particular, the relevance of the terms added to the one-pion-exchange part to guarantee gauge invariance could be tested.

1. Introduction

Experimental data for the production of the isobar N^{*++} (1236) in the reaction $\gamma p \to p\pi^+\pi^-$ have become available recently[1,2]. In this context the peripheral model has been used[1] to describe cross sections and decay angular distributions of the N^*. The simplest form of the peripheral model[3a] which consists in calculating the one-pion-exchange (OPE-) diagram, shown in Fig. 1,I, violates gauge invariance. Stichel

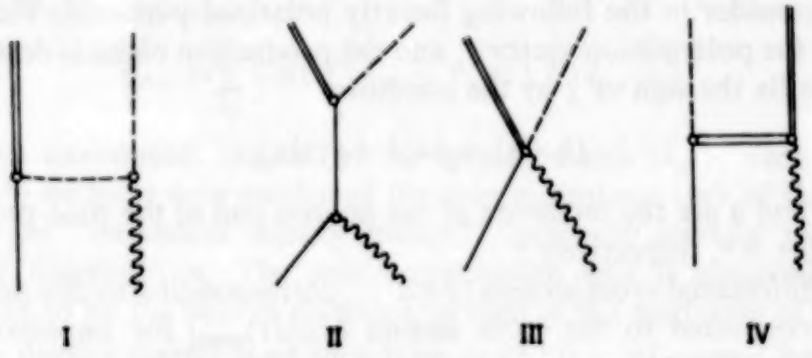


Fig. 1. Graphs for the reaction $\gamma p \to N^* \pi$

and Scholz[3b] have proposed a gauge invariant extension of the simple OPE-model (graphs II – IV in Fig. 1) which yields better agreement with experiment. Further improvement is reached by a slight modification of the gauge invariant extension and by including absorptive corrections due to the strong interaction in the final state[4].

[1] Aachen-Berlin-Bonn-Hamburg-Heidelberg-München Collaboration: Phys. Letters **23**, 707 (1966).

[2] Brown-Harvard-MIT-Padova-Weizmann Institute Bubble Chamber Group: presented at "XIIIth International Conference on High Energy Physics", Berkeley 1966.

[3a] Drell, S. D.: Phys. Rev. Letters **5**, 278 (1961).

[3b] Stichel, P., and M. Scholz: Nuovo cimento **34**, 1381 (1964).

[4] Locher, M. P., and W. Sandhas: Z. Physik **195**, 461 (1966).

Despite of the reasonable agreement of experimental and theoretical results further experimental information would be necessary to confirm the model. We will show that polarized γ-quanta would provide a sensitive test for its validity. In particular the relevance of the contact graph III, shown in Fig. 1, which is decisive for the gauge invariant extension of the peripheral model, can be checked.

In Sec. 2 we give the general formulae for cross sections and the N^*-spin density matrix, valid in the case of linearly polarized γ-quanta. Sec. 3 is concerned with the results obtained for the one-pion-exchange model and for its gauge invariant extension. Absorptive effects are not incorporated. They could, however, easily be taken into account by inserting the amplitudes corrected in the manner as described in Ref. [4].

An alternative N^*-production model in terms of an isobar-N^{**}-excitation mechanism has been proposed [2]. It would be useful to study the influence of γ-polarization also in this model. Such investigations would show whether polarization experiments are sensitive enough to favour one of the two models.

2. Cross Sections and Density Matrices

We consider in the following linearly polarized γ-quanta. The angle between the polarization vector $\boldsymbol{\varepsilon}_\chi$ and the production plane is designated by χ. We fix the sign of χ by the condition

$$(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\chi=|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{q}|\sin\chi \tag{2.1}$$

where $\boldsymbol{k}$ and $\boldsymbol{q}$ are the momenta of the photon and of the pion produced besides the N^*, respectively.

The differential cross section $(d\sigma/dt)_\chi$, corresponding to this polarization, is connected to the cross section $(d\sigma/dt)_{\text{unpol}}$ for unpolarized γ-quanta according to

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_\chi=\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{\text{unpol}}[1+\Sigma(t)\cos 2\chi] \tag{2.2}$$

with the asymmetry function [5]

$$\Sigma(t)=\frac{-2\sum\limits_{\lambda_{N^*}}\sum\limits_{\lambda_p}\langle\lambda_{N^*}|\,T\,|\lambda_p,+\rangle\langle\lambda_{N^*}|\,T\,|\lambda_p,-\rangle^*}{\sum\limits_{\lambda_{N^*}}\sum\limits_{\lambda_p}\{|\langle\lambda_{N^*}|\,T\,|\lambda_p,+\rangle|^2+|\langle\lambda_{N^*}|\,T\,|\lambda_p,-\rangle|^2\}} \tag{2.3}$$

which contains the T-matrix elements $\langle\lambda_{N^*}|T|\,\lambda_p,\lambda_\gamma\rangle=\langle\lambda_{N^*}|T|\,\lambda_p,\pm\rangle$. Here λ_{N^*}, λ_p and λ_γ are the helicities of the N^*, the proton and the γ,

[5] We follow here the analogous notation of DE SWART, J. J.: Physica **25**, 233 (1959), and LE BELLAC, M., F. M. RENARD, and J. TRAN THANH VAN: Nuovo cimento **34**, 450 (1964).

respectively. As a consequence of parity conservation one has

$$\Sigma(t)=\frac{-2\sum_{\lambda_{N^*}} \mathrm{Re}\{\langle\lambda_{N^*}|\,T\,|\tfrac{1}{2},+\rangle\langle\lambda_{N^*}|\,T\,|\tfrac{1}{2},-\rangle^*\}}{\sum_{\lambda_{N^*}}\{|\langle\lambda_{N^*}|\,T\,|\tfrac{1}{2},+\rangle|^2+|\langle\lambda_{N^*}|\,T\,|\tfrac{1}{2},-\rangle|^2\}}. \tag{2.4}$$

The representation (2.4) shows explicitly that $\Sigma(t)$ is a real function. Furthermore we recall that in the Born approximation, used in the following, the T-matrix elements themselves are already real.

Analogously the spin density matrix of the N^* is given by

$$\rho_{m\,m'}=N[\rho^{(0)}_{m\,m'}+\rho^{(+)}_{m\,m'}\cos 2\chi+i\,\rho^{(-)}_{m\,m'}\sin 2\chi] \tag{2.5}$$

with the normalization N chosen such that $\mathrm{Tr}\,\rho=1$.

The term

$$\rho^{(0)}_{m\,m'}=\sum_{\lambda_p}\sum_{\lambda_\gamma}\langle m|\,T\,|\lambda_p,\lambda_\gamma\rangle\langle m'|\,T\,|\lambda_p,\lambda_\gamma\rangle^* \tag{2.6}$$

is the (unnormalized) density matrix occuring in the unpolarized case. The additional terms in (2.5) can be written in the form

$$\rho^{(\pm)}_{m\,m'}=\mp(\tilde\rho_{m\,m'}\pm\tilde\rho^*_{m'\,m}) \tag{2.7}$$

where the abbreviation

$$\tilde\rho_{m\,m'}=\sum_{\lambda_p}\langle m|\,T\,|\lambda_p,+\rangle\langle m'|\,T\,|\lambda_p,-\rangle^* \tag{2.8}$$

has been introduced. Instead of the helicity states $|\lambda_{N^*}\rangle$, used in (2.3) and (2.4) we have now employed the spin eigenstates $|m\rangle$ of the N^* to obtain the "canonical density matrix"[6] generally used in the decay angular distributions. The spin quantization axis is assumed in the following to be the proton direction as seen in the restframe of the N^*.

The density matrix [and each term in (2.5)] is, of course, hermitian. Furthermore, from rotation and parity invariance we derive the symmetry properties

$$\rho^{(0,+)}_{-m,-m'}=(-1)^{m-m'}\rho^{(0,+)}_{m,m'} \tag{2.9}$$

and

$$\rho^{(-)}_{-m,-m'}=-(-1)^{m-m'}\rho^{(-)}_{m,m'}. \tag{2.10}$$

We therefore may write

$$\rho_{m\,m'}=\rho^{(1)}_{m\,m'}+\rho^{(2)}_{m\,m'} \tag{2.11}$$

with

$$\rho^{(1)}_{m\,m'}=N[\rho^{(0)}_{m\,m'}+\rho^{(+)}_{m\,m'}\cos 2\chi] \tag{2.12}$$

and

$$\rho^{(2)}_{m\,m'}=i\,N\,\rho^{(-)}_{m\,m'}\sin 2\chi \tag{2.13}$$

[6] Gottfried, K., and J. D. Jackson: Nuovo cimento **34**, 735 (1964).

where the matrices $\rho^{(1)}_{mm'}$ and $\rho^{(2)}_{mm'}$ obey the properties (2.9) and (2.10), respectively. These considerations show that the symmetry (2.9), valid in the unpolarized case for the density matrix is not fulfilled any longer for our total $\rho_{mm'}$. We therefore have to modify correspondingly the arguments of Ref. [7] which lead from the general expression (17) to the special form (22) given there for the decay distribution $W(\Theta, \Phi)$. As a consequence of Eq. (2.9) and of the hermiticity of $\rho^{(1)}_{mm'}$, the term $e^{i(m-m')\Phi}\,\rho^{(1)}_{mm'}$ which occurs in the general form for $W(\Theta, \Phi)$ [cf. Ref. [7] Eq. (17)] can be replaced by $\cos(m-m')\Phi \cdot \mathrm{Re}\,\rho^{(1)}_{mm'}$. Analogously the hermiticity of $\rho^{(2)}_{mm'}$ and the relation (2.10) show that $e^{i(m-m')\Phi}\cdot\rho^{(2)}_{mm'}$ can be replaced by $-\sin(m-m')\Phi \cdot \mathrm{Im}\,\rho^{(2)}_{mm'}$.

The diagonal elements of the hermitian matrices $\rho^{(1)}$ and $\rho^{(2)}$ are, of course, real. Taking into account the symmetry properties (2.9) and (2.10) we furthermore conclude that the elements $\rho^{(1)}_{m,-m}$ are purely imaginary while the $\rho^{(2)}_{m,-m}$ are real. Thus we have no contribution of $\rho^{(1)}_{m,-m}$, $\rho^{(2)}_{m,m}$ and $\rho^{(2)}_{m,-m}$ to the decay angular distribution $W(\Theta, \Phi)$*. This distribution, therefore, appears to be

$$W(\Theta,\Phi)=\frac{3}{4\pi}\left\{(\tfrac{1}{2}-\rho^{(1)}_{11})\sin^2\Theta+\rho^{(1)}_{11}(\tfrac{1}{3}+\cos^2\Theta)-\right.$$
$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Re}\,\rho^{(1)}_{3,-1}\cos 2\Phi-\mathrm{Im}\,\rho^{(2)}_{3,-1}\sin 2\Phi\right]\sin^2\Theta- \quad (2.14)$$
$$\left.-\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Re}\,\rho^{(1)}_{31}\cos\Phi-\mathrm{Im}\,\rho^{(2)}_{31}\sin\Phi\right]\sin 2\Theta\right\}.$$

Here we have used furthermore that from (2.10) follows $\mathrm{Tr}\,\rho^{(2)}=0$, i.e., $1=\mathrm{Tr}\,\rho=\mathrm{Tr}\,\rho^{(1)}$, and from (2.9) $\mathrm{Tr}\,\rho^{(1)}=2(\rho^{(1)}_{11}+\rho^{(1)}_{33})$. Finally we get the integrated decay distributions

$$W(\cos\Theta)=\int_0^{2\pi} W(\Theta,\Phi)\,d\Phi=3(\rho^{(1)}_{11}-\tfrac{1}{4})\cos^2\Theta+\tfrac{3}{4}-\rho^{(1)}_{11}, \quad (2.15)$$

$$W(\Phi)=\int_0^{\pi} W(\Theta,\Phi)\sin\Theta\,d\Theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left\{1-\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Re}\,\rho^{(1)}_{3,-1}\cos 2\Phi-\mathrm{Im}\,\rho^{(2)}_{3,-1}\sin 2\Phi\right)\right\}. \quad (2.16)$$

It should be noted that in Born approximation, where $\rho^{(1)}_{mm'}$ is purely real and $\rho^{(2)}_{mm'}$ is purely imaginary, we have $\mathrm{Re}\,\rho^{(1)}_{mm'}=\mathrm{Re}\,\rho_{mm'}$ and $\mathrm{Im}\,\rho^{(2)}_{mm'}=\mathrm{Im}\,\rho_{mm'}$.

* These elements are even zero in Born approximation where $\rho^{(1)}_{mm'}$ is purely real and $\rho^{(2)}_{mm'}$ purely imaginary. Non-vanishing of $\rho^{(1)}_{m,-m}$ and $\rho^{(2)}_{m,\pm m}$ in Born approximation would therefore contradict to the above general properties.

[7] GOTTFRIED, K., and J. D. JACKSON: Nuovo cimento **33**, 309 (1964).

3. Discussion and Numerical Results

For the calculation of the asymmetry function $\Sigma(t)$ and of the matrices $\rho^{(0,\pm)}$ we need the T-matrix elements $\langle \lambda_{N^*} | T | \lambda_p, \lambda_\gamma \rangle$. In the unmodified peripheral model these are given by expressions $\langle \lambda_{N^*} | B^I | \lambda_p, \lambda_\gamma \rangle$ corresponding to the one-pion-exchange diagramm I of Fig. 1. As a consequence of the factor*

$$\varepsilon^{\pm} \cdot q = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_1 \cdot q \tag{3.1}$$

contained in this term we have the relation

$$\langle \lambda_{N^*} | B^I | \lambda_p, \pm \rangle = - \langle \lambda_{N^*} | B^I | \lambda_p, \mp \rangle \tag{3.2}$$

which implies

$$\Sigma(t) = 1 . \tag{3.3}$$

For pure one-pion-exchange (in Coulomb gauge) we therefore obtain

$$\left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_\chi = \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_{\text{unpol}} \cdot 2 \cos^2 \chi . \tag{3.4}$$

Furthermore we find in this case

$$\rho^{(+)} = \rho^{(0)} \quad \text{and} \quad \rho^{(-)} = 0 \tag{3.5}$$

which immediately leads to

$$\rho_{m\,m'} = \frac{\rho^{(0)}_{m\,m'}}{\sum\limits_m \rho^{(0)}_{m\,m}} = \rho^{\text{unpol}}_{m\,m'} . \tag{3.6}$$

Inserting here the values derived in the unpolarized case for pure one-pion-exchange we get

$$\rho_{m\,m'} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for} \quad m = m' = \frac{1}{2} \quad \text{or} \quad -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} . \end{cases} \tag{3.7}$$

These simple properties are rapidly changed if the gauge invariant extension of the peripheral model, discussed in Sec. 1, is used.

The orbital current part of the diagram 1,II vanishes in Coulomb gauge and the corresponding part of diagram 1,IV still fulfills the symmetry (3.2). This means that the inclusion of these diagrams does not change the properties (3.3) to (3.6). However, the symmetry (3.2) does not hold for the contact graph III shown in Fig. 1. The inclusion of this graph, therefore, effects deviations of the $\cos^2 \chi$ behaviour in the cross section. Furthermore, in contrast to (3.6) the density matrix differs, in general, from the one valid in the unpolarized case. In particular for a γ-polarization perpendicular to the production plane, where the graph 1,I and the orbital current part of 1,IV vanish, the contact graph solely

* $\varepsilon^{\pm}$, $\varepsilon_{1,2}$ are the usual γ-polarization vectors.

determines the cross section and the density matrix. The behaviour of the cross section can also be seen from the explicit result

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{\chi} = \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)_{\text{unpol}} \cdot 2\cos^2\chi - \\ -\frac{1}{96\pi q^2 s}\left(\frac{e g^*}{m_\pi}\right)^2 \cos 2\chi \cdot [(M+M^*)^2 - t] \tag{3.8}$$

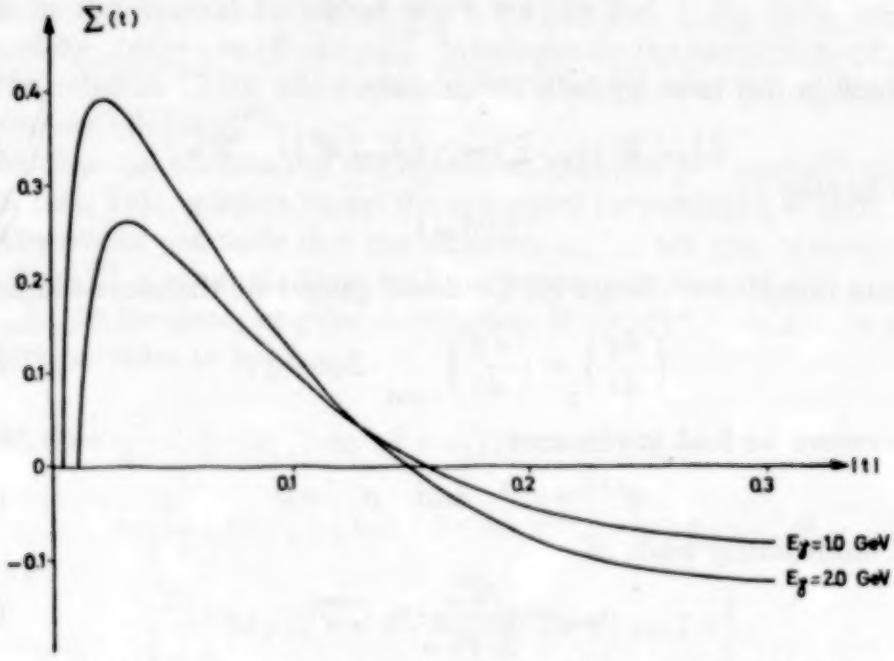


Fig. 2. Asymmetry function $\Sigma(t)$ for $E_\gamma = 1$ GeV and $E_\gamma = 2$ GeV

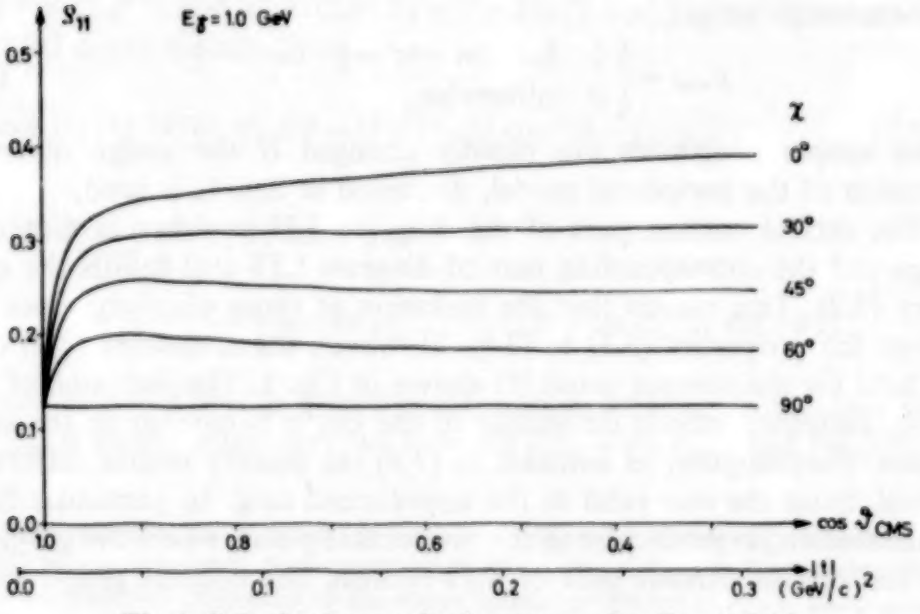


Fig. 3. Spin density matrix elements ρ_{11} for $E_\gamma = 1$ GeV

calculated with the Born approximation of Ref. [4]. The second term in (3.8) appears only due to the contact graph.

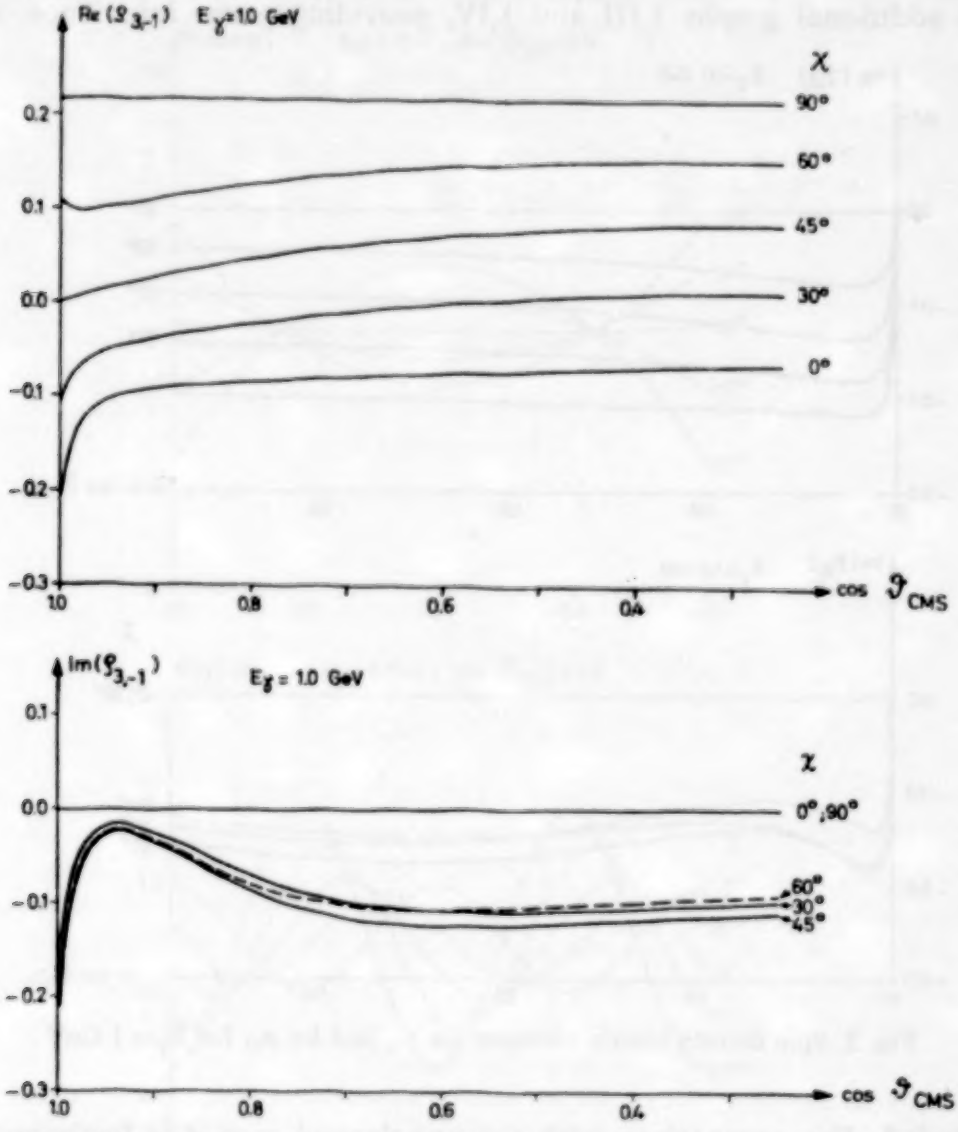


Fig. 4. Spin density matrix elements Re $\rho_{3,-1}$ and Im $\rho_{3,-1}$ for $E_\gamma = 1$ GeV

The above considerations show that measurements with polarized γ-quanta would provide a sensitive check for the significance of the contact graph and moreover of the gauge invariant peripheral model itself.

To show the magnitude of the effect we have calculated the asymmetry function $\Sigma(t)$ for the γ-(lab.)-energies $E_\gamma = 1$ GeV and $E_\gamma = 2$ GeV (see Fig. 2). $\Sigma(t)$ differs, due to the contact graph clearly from one. The numerical results for the density matrices are shown in Figs. 3 to 5. As

discussed above we would find $\rho_{mm}=\frac{1}{2}$ for $m=\frac{1}{2}$ or $m=-\frac{1}{2}$ and $\rho_{mm'}=0$ otherwise if only the one-pion-exchange diagram (in Coulomb gauge) is taken into account. Again we find strong deviation of this behaviour if the additional graphs 1,III and 1,IV, providing gauge invariance, are

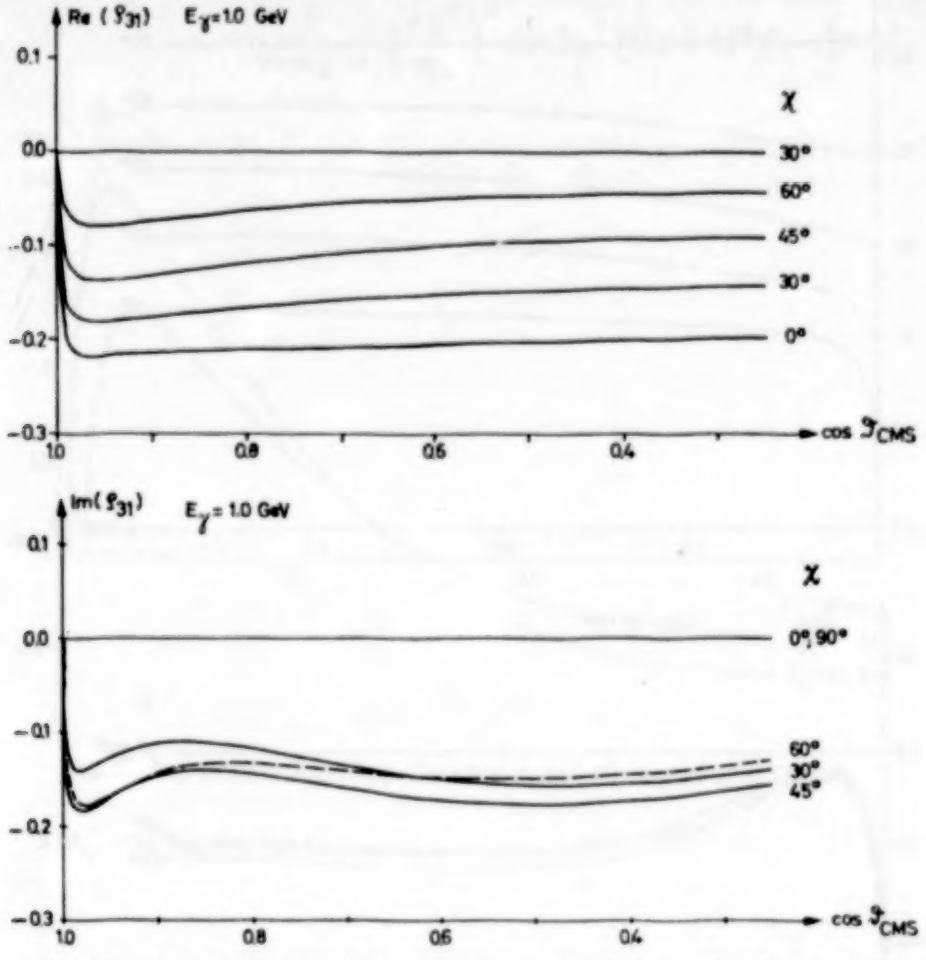


Fig. 5. Spin density matrix elements Re ρ_{31} and Im ρ_{31} for $E_\gamma=1$ GeV

included. For comparison with the unpolarized case it is furthermore useful to recognize that for $\chi=45°$, even after gauge invariant extension of the one-pion-exchange model, the real part of the spin density matrix $\rho_{mm'}$ equals $\rho^{\text{unpol}}_{mm'}$. As a further illustration of these properties the decay angular distributions $W(\cos\Theta)$ and $W(\Phi)$ are given in Fig. 6a, b for the special case $E_\gamma=1$ GeV and $\cos\vartheta_{CMS}=0.8$ (ϑ_{CMS}=center-of-mass production angle).

Our conclusion is that measurements with polarized γ-quanta would be very useful to study the applicability of the peripheral model to N^*-photo-production and in particular to check the gauge invariant extension of this model.

At present experimental data[8] are only available at 800 MeV. For 90° production angle the function $\Sigma(t)$ calculated in the peripheral model is very small in accordance with experiment.

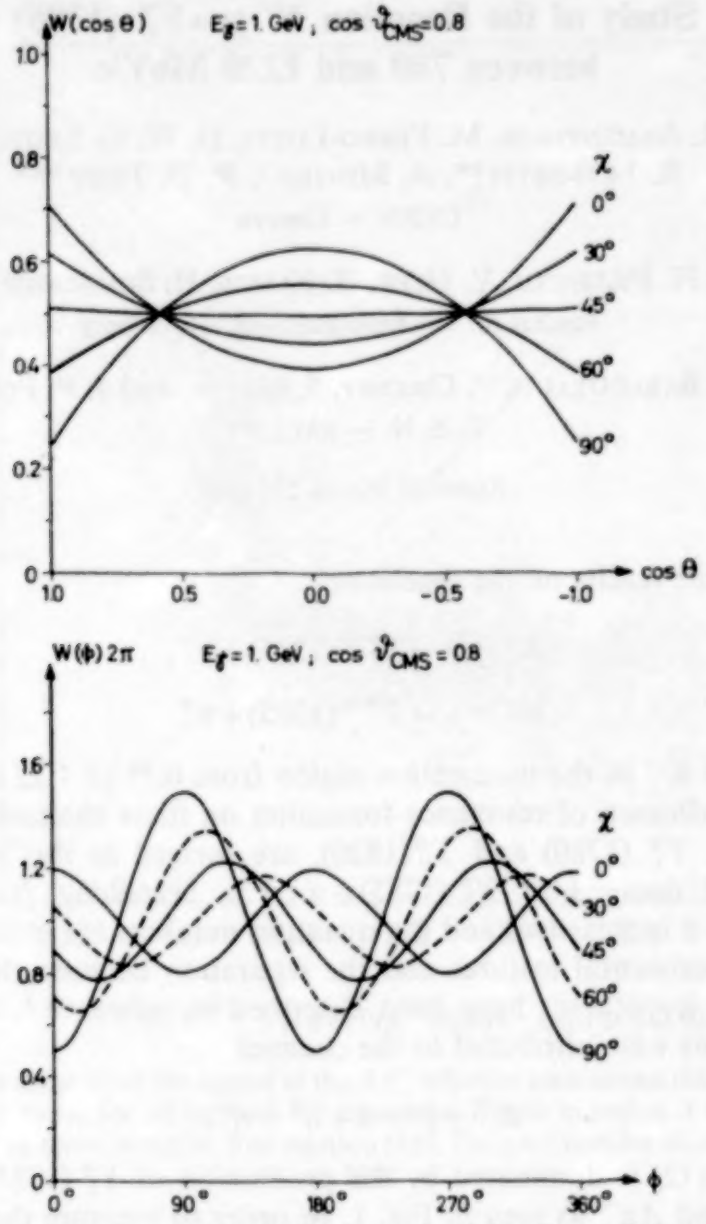


Fig. 6. Integrated decay angular distributions of N^* for $E_\gamma = 1$ GeV and $\cos \vartheta_{CMS} = 0.8$: a) $W(\cos \Theta)$, b) $W(\Phi)$

We would like to thank Prof. H. ROLLNIK for encouraging interest and critical reading of the manuscript and Dr. M. P. LOCHER for useful discussions.

For generous calculating facilities on the IBM 7090 computer we want to thank the Institut für Instrumentelle Mathematik at Bonn.

[8] MOZLEY, R. F.: Presented at "International Conference on Low and Intermediate Energy Electromagnetic Interactions", Dubna 1967.

Zeitschrift für Physik 202, 486–491 (1967)

A Study of the Reaction $K^- p \to Y_1^*(1385) + \pi$ between 780 and 1220 MeV/c

R. ARMENTEROS, M. FERRO-LUZZI, D. W. G. LEITH*,
R. LEVI-SETTI**, A. MINTEN*, R. D. TRIPP***
CERN – Geneva

H. FILTHUTH, V. HEPP, E. KLUGE, H. SCHNEIDER
Institut für Hochenergiephysik, Heidelberg

R. BARLOUTAUD, P. GRANET, J. MEYER, and J. P. PORTE
C. E. N. – SACLAY

Received March 23, 1967

We report results on the reactions

$$K^- + p \to Y^{*+}(1385) + \pi^-, \tag{1a}$$

$$K^- + p \to Y^{*-}(1385) + \pi^+ \tag{1b}$$

for incident K^- in the momentum region from 0.78 to 1.22 GeV/c, and study the influence of resonance formation on these channels. The two resonances, $Y_1^*(1760)$ and $Y_0^*(1820)$, are formed in this momentum region and decay into $Y_1^*(1385)+\pi$. The branching fraction into $Y_1^*(1385)+\pi$ is measured and the quantum numbers are confirmed.

The experimental features and the separation between the different kinematical hypotheses have been described in reference [1]. A total of ~7100 events were attributed to the channel

$$K^- + p \to \Lambda + \pi^+ + \pi^-. \tag{2}$$

Reaction (2) is dominated by the production of $Y_1^*(1385)$ decaying into $\Lambda\pi^+$ and $\Lambda\pi^-$ as seen in Fig. 1. In order to measure the total and differential cross section for $Y^{*\pm}$ production, we make the hypothesis that channel (2) proceeds completely through reactions (1). The "non-

* Present address: S. L. A. C., Stanford University, Stanford, California.
** Present address: EFINS, University of Chicago, Chicago, Illinois.
*** Present address: L. R. L., University of California, Berkeley, California.

[1] ARMENTEROS, R., M. FERRO-LUZZI, D. W. G. LEITH, R. LEVI-SETTI, A. MINTEN, R. D. TRIPP, H. FILTHUTH, V. HEPP, E. KLUGE, H. SCHNEIDER, R. BARLOUTAUD, P. GRANET, J. MEYER, J.-P. PORTE, J.-C. SCHEUER: Phys. Letters **19**, 75 (1965).

Y^*" background is difficult to estimate, our data being compatible with a maximum background as large as ~25%. Furthermore, we shall neglect interference effects between the Y^{*+} and Y^{*-} bands on the Dalitz

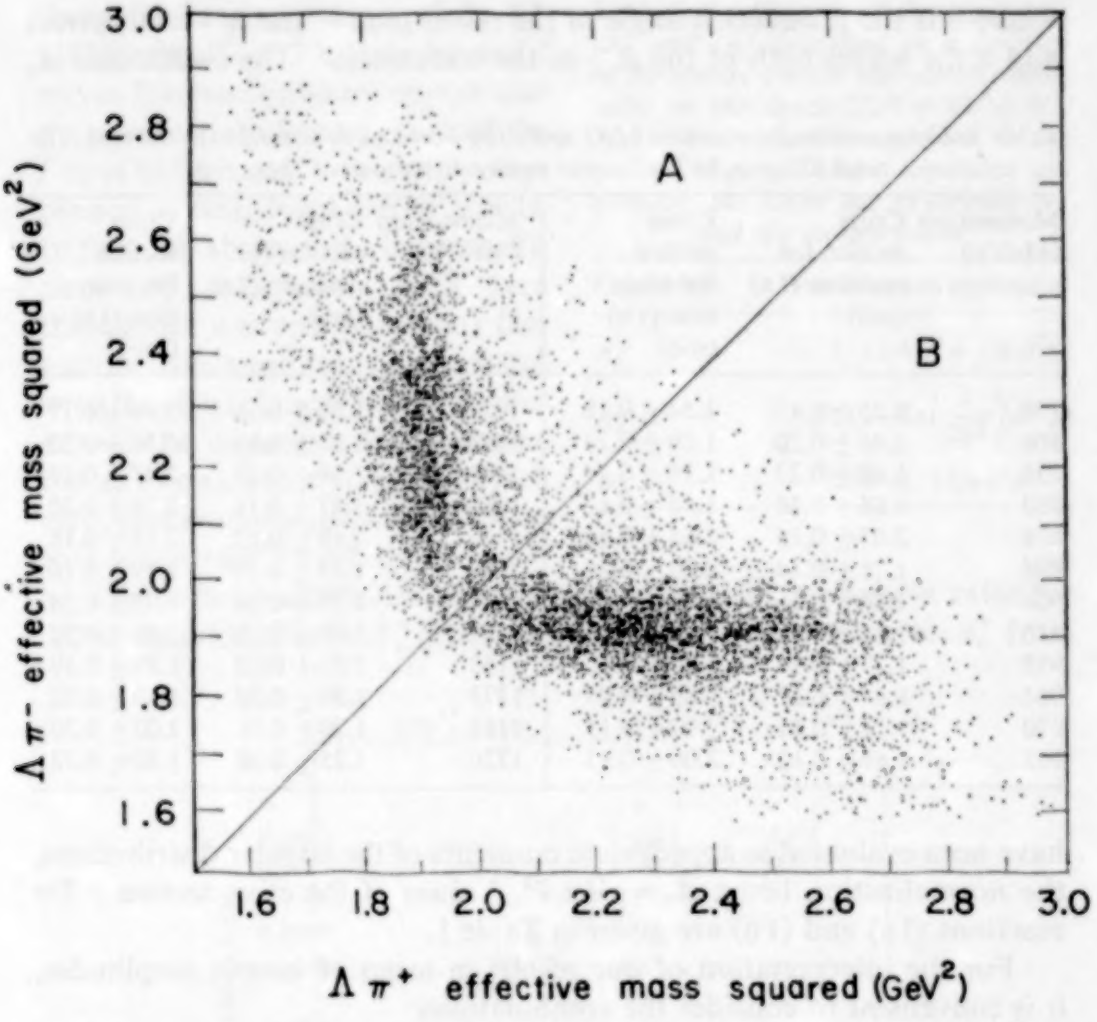


Fig. 1. Scatter diagram of the square of the $\Lambda\pi^-$ effective mass versus the square of the $\Lambda\pi^+$ effective mass, for all incident K^- momenta. Events in region A are attributed to reaction (1a), those in region B to reaction (1b). The total number of $\Lambda\pi^+\pi^-$ events is 7100

plot of Fig. 1; this interference is small and does not disturb significantly the angular distributions. Thus we attribute all events in region A of the Dalitz plot to reaction (1a), while events lying in region B are attributed to reaction (1b). We have checked that the results obtained in this manner agree with those obtained by using a narrow band around the Y^* for the masses of the $\Lambda\pi$ systems and considering only events in the region where the interference between the two Y^* bands is very small.

The differential cross section for reaction (1) has been expanded in Legendre polynomials according to

$$d\sigma/d\Omega = \lambda^2 \sum A_n P_n(\cos \vartheta) \tag{3}$$

where ϑ is the production angle of the recoil pion in the K^- c.m. system and λ the wavelength of the K^- in the c.m. system. The coefficients A_n

Table 1. *Cross section for reaction (1a) and (1b) obtained as described in the text. The total $K^- p \to \Lambda \pi^+ \pi^-$ cross section is the sum of these two*

Momentum (MeV/c)	Cross section for reaction (1a) (mb)	Cross section for reaction (1b) (mb)	Momentum (MeV/c)	Cross section for reaction (1a) (mb)	Cross section for reaction (1b) (mb)
777	1.35 ± 0.17	1.54 ± 0.18	1022	1.56 ± 0.14	2.06 ± 0.17
806	1.46 ± 0,20	1.70 ± 0.23	1044	1.83 ± 0.18	2.57 ± 0.23
838	1.49 ± 0.23	1.19 ± 0.19	1061	1.56 ± 0.13	2.47 ± 0.18
853	1.66 ± 0.18	1.56 ± 0.17	1080	1.47 ± 0.15	2.29 ± 0.20
874	2.03 ± 0.16	1.65 ± 0.14	1102	1.18 ± 0.12	2.15 ± 0.18
894	1.71 ± 0.19	2.10 ± 0.22	1117	1.33 ± 0.12	1.89 ± 0.16
904	1.66 ± 0.16	1.98 ± 0.18	1130	1.28 ± 0.24	1.72 ± 0.28
916	1.51 ± 0.15	1.90 ± 0.18	1137	1.00 ± 0.20	2.00 ± 0.32
935	1.73 ± 0.14	2.14 ± 0.16	1153	1.21 ± 0.15	1.83 ± 0.19
954	1.64 ± 0.17	1.89 ± 0.19	1173	1.50 ± 0.20	1.69 ± 0.22
970	1.27 ± 0.11	2.07 ± 0.15	1183	1.30 ± 0.14	2.02 ± 0.20
991	1.69 ± 0.12	2.00 ± 0.13	1226	1.25 ± 0.26	1.80 ± 0.33

have been evaluated as appropriate moments of the angular distributions, the normalization being $A_0 = \sigma/4\pi\lambda^2$. Values of the cross section σ for reactions (1a) and (1b) are given in Table 1.

For the interpretation of our results in terms of isospin amplitudes, it is convenient to consider the combinations

$$A_n^{\pm} = A_n(Y^{*-}) \pm A_n(Y^{*+}). \tag{4}$$

Thus the A^+ terms are due only to the square of the $I=0$ and $I=1$ amplitudes, whereas the A^- terms are due to the interference between them.

The analysis was done under the simplifying assumption that in reactions (1) the only resonant amplitudes are those corresponding to $Y_1^*(1760)$ and $Y_0^*(1820)$; thus we neglect in this preliminary analysis the influence of the newly discovered $Y_0^*(1690)$[2] and the possible

[2] DAVIES, J. D., J. D. DOWELL, P. M. HATTERSLEY, R. J. HOMER, A. W. O'DELL, A. A. CARTER, K. F. RILEY, R. J. TAPPER, D. V. BUGG, R. S. GILMORE, K. M. KNIGHT, D. C. SALTER, G. H. STAFFORD, E. J. N. WILSON: Phys. Rev. Letters **18**, 62 (1967).

occurence of a resonant amplitude with I, $I^P = 0$, $5/2^-$ around 1830 MeV[3]. The decay of a resonance with $J \geqq 3/2$ into a $3/2^\pm$ baryon and a 0^- pion may be described by two decay angular momentum amplitudes. Thus $Y_1^*(1760)$ with $J^P = 5/2^-$ proceeds through d and g waves, while $Y_0^*(1820)$ with $J^P = 5/2^+$ through p and f waves. It is reasonable to suppose that the g wave in the former case and the f wave in the latter, are strongly suppressed by centrifugal barrier effects. In fact, the absence of a large coefficient A_5^- (compatible with zero throughout our energy region) favours this assumption and in the following the effect of the higher order waves will be neglected. Furthermore, the A_6 terms are also compatible with zero, thus reinforcing the assumption that states with $J > 5/2$ are absent.

Table 2. *Coefficients of the expansions (3) and (4) expressed as a function of the orbital angular momentum amplitudes in the decay* $5/2^\pm \to 3/2^+ + 0^-$. *The numerical factors represent, in the order, the partial wave expansion coefficient, the factor due to formula (4) and the isospin factor*

Coefficient	Partial wave expansion
A_0^+	$3 \cdot 2 \cdot (1/4\, d^2 + 1/6\, p^2)$
A_3^-	$4.22 \cdot 2 \cdot \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right) d^* p)$
A_4^+	$-2.94 \cdot 2 \cdot (1/4\, d^2)$

Under these conditions and referring to Table 2, a negative value for A_4^+ is expected, due to $Y_1^*(1760)$, whereas the contributions to A_0^+ from

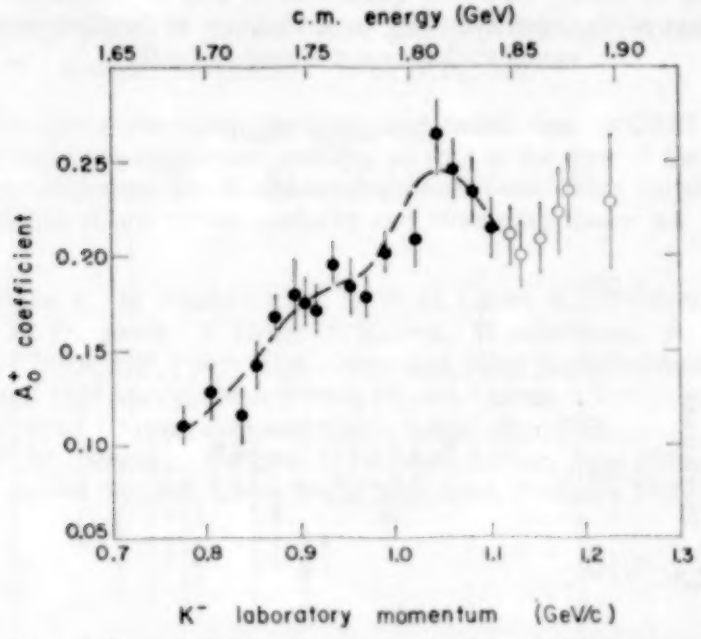


Fig. 2. Variation of the coefficient A_0^+ as a function of incident momentum. The empty circles were not used in the fit

[3] Armenteros, R., M. Ferro-Luzzi, D. W. G. Leith, R. Levi-Setti, A. Minten, R. D. Tripp, H. Filthuth, V. Hepp, E. Kluge, H. Schneider, R. Barloutaud, P. Granet, J. Meyer, J.-P. Porte: Phys. Letters **24** B, 198 (1967).

$Y_1^*(1760)$ and $Y_0^*(1820)$ should be positive. The coefficient A_3^- should show interference effects from both Y^*'s. Figs. 2, 3 and 4 show the measured values for these coefficients. The overall behaviour of the coefficients agrees with these predictions thus confirming the spin-parity

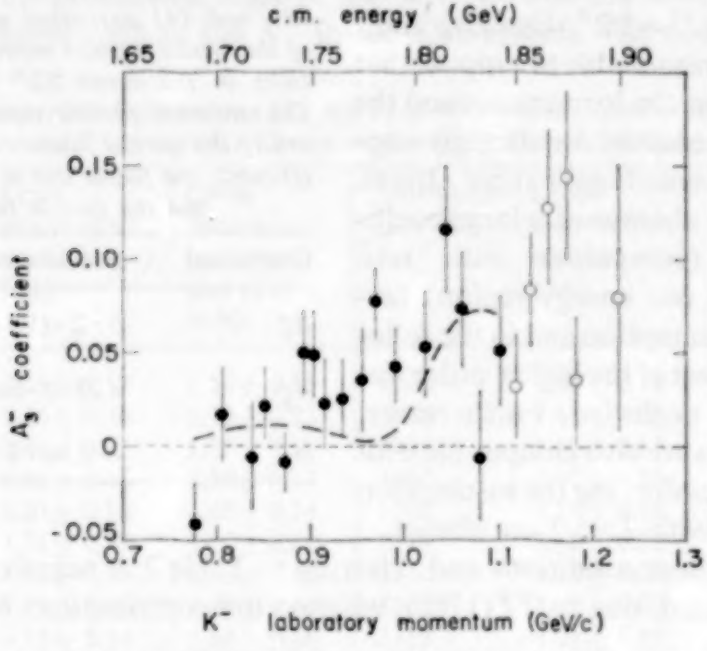


Fig. 3. Variation of the coefficient A_4^+ as a function of incident momentum. The empty circles were not used in the fit

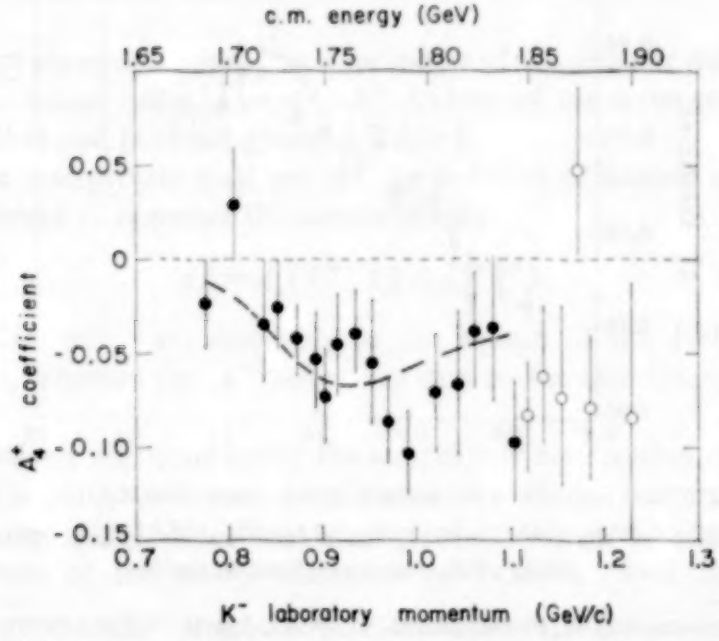


Fig. 4. Variation of the coefficient A_3^- as a function of incident momentum. The empty circles were not used in the fit

assignment of these resonances. A fit to the three coefficients A_0^+, A_4^+ and A_3^- was performed under the following conditions:

(a) masses, widths and elasticities of both Y^* have been fixed to the values shown in Table 3 derived from the analysis of ref.[3] and [4];

(b) only experimental points up to 1.1 GeV/c were introduced in order to avoid possible effects of heavier resonances;

(c) an interaction radius of 1 fermi has been used in calculating the momentum dependence of the resonant widths;

(d) a background, linearly dependent on the incident K^- momentum, has been introduced for A_0^+.

Table 3. *Parameters of the fit. Quantities in bracket have been kept fixed*

I, J^P	Mass (MeV)	Width (MeV)	Elasticity	$Y^* \pi$ branching fraction
$1,5/2^-$	[1765]	[118]	[0.44]	0.13 ± 0.03
$0,5/2^+$	[1813]	[87]	[0.60]	0.15 ± 0.05

The result of the fit is shown by the curves on Figs 2, 3 and 4. The number of data points used in the fit is 51 and the χ^2 is 62. The branching fractions thus obtained are given in Table 3. The results are in agreement with those obtained in our preliminary analysis[5] and in other experiments[6]. A more detailed partial wave analysis taking into account resonant and non resonant amplitudes is in progress.

We wish to thank the many physicists and technicians at CERN who helped generously to make this experiment possible, as well as the crew of the Saclay 81 cm hydrogen bubble chamber. Dr. VALLADAS contributed with many illuminating discussions. The untiring efforts of our scanning and measuring teams are gratefully acknowledged.

[4] ARMENTEROS, R., M. FERRO-LUZZI, D. W. G. LEITH, R. LEVI-SETTI, A. MINTEN, R. D. TRIPP, H. FILTHUTH, V. HEPP, E. KLUGE, H. SCHNEIDER, R. BARLOUTAUD, P. GRANET, J. MEYER, J. P. PORTE: Resonances and, other partial waves in $K^- p \to \Lambda \pi^0$ between 780 and 1220 MeV/c. Submitted to Physics Letters.

[5] FERRO-LUZZI, M.: Proc. Argonne User's Conf., May 1965.

[6] BIRGE, R. W.: Resonant Particles Conference Athens, June 1956. — UHLIG, R. P.: Technical Report No. 545, University of Maryland, February 1966.

Zeitschrift für Physik 202, 492–497 (1967)

The Spectrum of Alkali-Atoms

RONALD G. PARSONS* and VICTOR F. WEISSKOPF**

Received February 28, 1967

Today nobody really worries about the spectra of Alkaliatoms. Modern methods of solving many electron problems allow calculations of the spectrum and of any other properties to any desired accuracy. Still, there is a desire in many minds for a simple and clear insight in what are the essential reasons for the phenomena. In the case of the alkalis the question is to formulate in a simple way the essential reason for the difference between the spectrum of the alkali-atoms and the hydrogen atom.

The usual answer to this question refers to the so called penetrating orbits, – the German term is much more romantic, Tauchbahnen, –. One says, that the valence electron finds itself in an nS orbit, – the lowest, which the Pauli-principle admits, n being 2, 3, 4, etc., for lithium sodium, potassium, etc. – but, the energy is depressed compared to the corresponding hydrogen values $-Ry/n^2$ on account of the fact that the orbit dives into the internal region of the core, where the effective strength of the Coulomb field is much stronger. This picture has its weak points. The valence electron is mostly outside the core, first because of the large size of the orbit, and second because of the fact that inside the core it has very large kinetic energies. As long as the valence electron is outside, the core acts like a charge of unity. There is no reason for the electron to avoid orbits with low values of n, excluded by the Pauli principle. This point has been considered, of course, in the more accurate variational calculations. The additional nodes, which the Pauli-principle imposes upon the wave function of the valence electron, are all inside the core so that the wave-function outside resembles closely to a one electron problem which is not inhibited by an exclusion principle. In fact, if one forgets about this principle and ascribes main quantum numbers n to the levels, by starting with $n=1$ for S-states, $n=2$ for P-states, etc. in the same way for all Alkalis, the quantum defects δ are all smaller and mostly negative. We define δ by the expression $E_n=-Ry/(n-\delta)^2$. This is seen in Table 1. A negative value of δ indicates that the core has a repulsive effect and not an attractive one.

* Stanford Linear Accelerator Center, Stanford University, Stanford, California.
** Laboratory for Nuclear Science and Physics Department, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.

This work is supported in part through funds provided by the Atomic Energy Commission under Contract AT (30-1)-2098.

We have tried a very simple method of calculating these term values, which is based upon a reasoning almost opposite to the penetrating orbit approach. We assume that the valence electron cannot penetrate at all into the core. We base this assumption upon the Pauli principle. In a very qualitative way, the exclusion principle prevents an electron

Table 1. *Quantum defects δ for Na*

Old Assignment				New Assignment			
n	δ *S*-states	δ *P*-states	δ *D*-states	n	δ *S*-states	δ *P*-states	δ *D*-states
3	1.373	0.883	0.02	1	−0.627		
4	1.357	0.867	0.01	2	−0.643	−0.117	
5	1.352	0.862		3	−0.648	−0.133	0.02
6	1.350	0.859		4	−0.640	−0.138	0.01
7	1.350	0.858		5	−0.650	−0.141	
				6	−0.651	−0.142	

to penetrate into a region where other electrons are, except when it has a very different momentum. The valence electron can penetrate the core only by acquiring a considerably higher momentum than the average momentum of the core electrons. Its wave function must be orthogonal to the others. It is known that when, at a radius r_c, a wave function is forced to change its wave length from a large value at $r>r_c$ to a small value for $r<r_c$, the amplitude will be much smaller for $r<r_c$, than for $r>r_c$, except in the case where there is a resonance in the inside region. (See BLATT and WEISSKOPF[1], p. 382.) One then can approximate the situation by setting a boundary condition $\psi(r)=0$ for $r\sim r_c$. That such a boundary condition should be a good approximation can also be seen in the following way. The regime which determines the wave function of the valence electron in the interior of the core is such that the kinetic energies are much higher than outside. This is due to the larger Coulomb attraction but also, because of the orthogonality condition. The actual energy of the valence electron is a very small fraction of the relevant energies inside the core. Hence the position of the nodes inside will not depend much of the energy of the electron state, since this energy is only equal or less than the binding energy which is a small energy. That is why the condition $\psi(r)=0$ at the node nearest to the surface of the core will be a valid boundary condition for any wave function of a valence electron irrespective of its energy. The part of the function inside the core is very small in amplitude and the same for all states of the

[1] BLATT, and V. F. WEISSKOPF: Theoretical Nuclear Physics, Wiley 1952.

valence electron. These properties are well born out in the actual Hartree-Fock solutions which are available.

Therefore it is a good approximation to replace the core by an infinite repulsive potential at a radius $r=r_c$, where r_c is of the order of magnitude of the core-radius. AUSTIN and HEINE[2] have pointed out that the core in an Alkali metal could be represented by a repulsive pseudo-potential, and their ideas are based upon the more general treatment of the effect of the Pauli principle by non-local pseudo-potentials, which was started by KLEINMAN and PHILLIPS[3] and followed up by AUSTIN, HEINE, and SHAM[4]. We are using here a most simplified version of such a potential, replacing it by an impenetrable core.

We remind the reader of a similar situation in the theory of the scattering of slow neutrons by nuclei. Here the deep potential well of the nucleus, rather than the Pauli-principle, produces a high momentum for the neutron within the confines of the nucleus. Hence neutron scattering can be described by a repulsive potential of nuclear size, as long as the energy of the neutron is not near resonance with a quasi-stationary state. (See BLATT and WEISSKOPF, p. 382.)

The most surprising fact of the matter is the success of this simple picture. We have calculated the eigenvalues of a single electron in a potential which is Coulombian ($Z=1$) for $r>r_c$ and infinitely repulsive for $r>r_c$.

$$\begin{aligned} V(r)&=\frac{-e^2}{r} && r>r_c \\ &=+\infty && r<r_c. \end{aligned} \tag{1}$$

We have determined the value of r_c by fitting the energy of the ground state in each Alkali-atom. We then have calculated the values of the excited states and find a surprisingly good agreement with the facts. We express the level energies by

$$E_i=\frac{-Ry}{\lambda^2}$$

where Ry is the Rydberg unit for $Z=1$. Tables 2–6 show the calculated and observed values of λ for the different Alkali spectra. We find the deviations of our λ-values from the true ones to be less than 0.002 for the sodium S-states and less than 0.02 for the lithium and potassium S-states. Even for calcium the deviations of our λ's are smaller than 0.04 in the S-states. The P-states are reproduced with less accuracy but they are still very close. One gets better agreement among P-states, if one

[2] AUSTIN, B. J., and V. HEINE: J. Chem. Phys. **45**, 928 (1966).
[3] PHILLIPS, J. C., and L. KLEINMAN: Phys. Rev. **116**, 287 (1959).
[4] AUSTIN, B. J., V. HEINE, and L. J. SHAM: Phys. Rev. **127**, 127–276 (1962).

determines another core radius r_c for the P-states. This is shown in the columns marked r_c' which contain that core-radius which gives the correct value of λ for the lowest P-state. It is seen that the other P-states are extremely well reproduced.

The D-states are not well reproduced for the Alkalis heavier than Na. This is to be expected, since the Exclusion principle does not work efficiently in keeping the D-electrons out of the core. D-states are

Table 2. *Experimental and calculated values of λ for different levels of Li. r_c is the core-radius which gives the correct result for $1S$, r_c' is the core-radius which gives the best result for $2P$. The unit is a Bohr radius*

terms	λ (exp)	r_c	λ (calc)	r_c'	
$1S$	1.589		1.589		
$2S$	2.596		2.602		
$3S$	3.598	0.82	3.605		
$4S$	4.599		4.607		
$5S$	5.599		5.608		
$6S$	6.579		6.608		
$2P$	1.959		2.078		2.0
$3P$	2.956		3.098		3.0
$4P$	3.954	0.82	4.093	0	4.0
$5P$	4.953		5.094		5.0
$6P$	5.950		6.095		6.0
$7P$	6.948		7.096		7.0
$3D$	2.999	0.82	3.006		
$4D$	3.999		4.006		

Table 3. *Experimental and calculated values of λ for different levels of Na. r_c is the core-radius which gives the correct result for $1S$, r_c' is the core-radius which gives the correct result for $2P$. The unit is a Bohr radius*

terms	λ (exp)	r_c	λ (calc)	r_c'	λ'th
$1S$	1.627		1.627		
$2S$	2.643		2.642		
$3S$	3.648	0.91	3.646		
$4S$	4.649		4.647		
$5S$	5.650		5.648		
$6S$	6.651		6.649		
$2P$	2.117		2.094		2.117
$3P$	3.133		3.106		3.133
$4P$	4.138	0.91	4.111	1.02	4.130
$5P$	5.141		5.113		5.135
$6P$	6.142		6.114		6.135
$7P$	7.144		7.115		7.136
$3D$	2.990	0.91	3.006		
$4D$	3.988		4.007		

occupied, if at all, only in the inner shells of the core; thus they do not keep the valence electron in a D-state from penetrating the outer shells. A similar situation exists for the P-states in lithium. An electron in these states would not be excluded from the core by the Pauli principle. Fortunately, the P-state wave functions are weak enough at the core-radius in lithium; the predictions and the experimental values are so close to the hydrogen-values that no problem arises.

Table 4. *Experimental and calculated values of λ for different levels of K. r_c is the core-radius which gives the correct result for $1S$, r_c' is the core-radius which gives the correct result for $2P$. The unit is a Bohr radius*

terms	λ (exp)	r_c	λ (calc)	r_c'	
$1S$	1.771	1.28	1.771		
$2S$	2.802		2.791		
$3S$	3.811		3.797		
$4S$	4.815		4.800		
$5S$	5.819		5.801		
$6S$	6.823		6.802		
$2P$	2.234	1.28	2.165	1.63	2.234
$3P$	3.265		3.186		3.264
$4P$	4.275		4.193		4.273
$5P$	5.283		5.196		5.275
$6P$	6.283		6.198		6.276
$7P$	7.291		7.199		7.277
$3D$	2.854	1.28	3.009		
$4D$	3.798		3.010		

Table 5. *Experimental and calculated values of λ for different levels of Rb. r_c is the core-radius which gives the correct result for $1S$, r_c' is the core-radius which gives the correct result for $2P$. The unit is a Bohr radius*

terms	λ (exp)	r_c	λ (calc)	r_c'	λ'th
$1S$	1.805	1.37	1.805		
$2S$	2.845		2.826		
$3S$	3.857		3.833		
$4S$	4.862		4.835		
$5S$	5.864		5.837		
$6S$	6.865		6.838		
$2P$	2.289	1.37	2.185	1.92	2.289
$3P$	3.323		3.207		3.330
$4P$	4.336		4.215		4.331
$5P$	5.342		5.218		5.340
$6P$	6.346		6.220		6.343
$7P$	7.351		7.222		7.350
$3D$	2.767	1.37	3.009		
$4D$	3.707		4.010		

In Na and in higher Alkalis, however, the exclusion principle keeps the P-states away from the core. Indeed, the binding energies are smaller than the hydrogen values and are well reproduced by a repulsive potential.

Table 6. *Experimental and calculated values of λ for different levels of Cs. r_c is the core-radius which gives the correct result for $1S$, r_c' is the core-radius which gives the correct result for $2P$. The unit is a Bohr radius*

terms	λ (exp)	r_c	λ (calc)	r_c'	λ'th
$1S$	1.869	1.57	1.869		
$2S$	2.920		2.893		
$3S$	3.935		3.901		
$4S$	4.941		4.904		
$5S$	5.944		5.906		
$6S$	6.947		6.907		
$2P$	2.345	1.57	2.224	2.22	2.345
$3P$	3.390		3.250		3.391
$4P$	4.405		4.259		4.402
$5P$	5.413		5.263		5.408
$6P$	6.417		6.265		6.412
$7P$	6.419		7.267		7.418

It is difficult to predict the values of r_c from first principles. One remarkable feature should be mentioned. The values of r_c are proportional to the observed ionic radii of the Alkalis. In fact, they are almost exactly half as big apart from lithium. Qualitatively such proportionality may be understandable. It is plausible that the electron density of the closed shells extends further than the radius r_c at which the wave of a slow electron is forced to zero.

We have also used the wave functions of the valence electron in the potential (1) in order to determine the transition probabilities between the ground state and the first resonance in Alkalis. We calculated the transition matrix elements with the wave functions from (1) and then calculated the f-value of the resonance transition by means of the expression

$$f = \Delta E \left| (1S \mid z \mid 2P) \right|^2$$

where ΔE is the experimental resonance energy in Rydbergs and $(1S \mid z \mid 2P)$ is the matrix element of z in Bohr radii. One obtains f values within a few percent of unity for all alkalis except lithium where f turns out to be 0.78. Experimentally the f-values are all close to unity except $f = 0.75$ for Li.

Zeitschrift für Physik 202, 498 – 503 (1967)

Der Einfluß von Spannungsschwankungen auf die Aufladezeit eines Kondensators

H. KOPPE
Institut für Theoretische Physik der Universität Kiel

Eingegangen am 31. März 1967

The influence of electrical fluctuations on the time needed to charge a condensor up to a given level is investigated.

1. Einleitung

Gegeben sei ein Kondensator mit der Kapazität C, der über einen Widerstand R an eine feste Spannung U_0 angeschlossen ist. Der zeitliche Verlauf der Spannung U_1 am Kondensator ist dann

$$U_1 = U_0(1 - e^{-t/RC}) \tag{1}$$

und erreicht einen gegebenen kritischen Wert U_k zur Zeit

$$t_k = RC \log \frac{U_0}{U_0 - U_k}. \tag{2}$$

Wenn beim Erreichen dieser Spannung der Kondensator entladen wird, und das Spiel von vorn beginnt, erhält man einen Sägezahngenerator mit der Frequenz $1/t_k$. Die Frequenz eines solchen Generators ist aber in Wirklichkeit nicht genau konstant, da der Spannung U_0 im allgemeinen eine Rauschspannung U_R überlagert ist, und das einfache Zeitgesetz (1) nur annähernd gilt. Die Zeitpunkte t_k, bei denen die Spannung U_k das erste Mal erreicht wird, werden also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(t)$ haben, die im folgenden untersucht werden soll.

Ein ähnliches Problem ergibt sich mit der gleichen Anordnung, wenn man $U_0 = 0$ setzt, und den Widerstand R negativ macht. Das entspricht etwa dem Schwingungseinsatz eines Multivibrators. Ohne Rauschen wäre hier der Spannungsverlauf

$$U_1 = U(0)\, e^{t/|RC|}. \tag{3}$$

Im Prinzip wäre also U_1 immer gleich Null, wenn es für $t = 0$ verschwindet. Die spontane Aufladung wird in diesem Falle überhaupt erst durch das Rauschen in Gang gesetzt. Wir interessieren uns hier wieder für die Zeiten, bei denen erstmalig $U_1 = U_k$ ist.

Analoge Fragestellungen treten auch in komplizierteren Zusammenhängen auf. Wir wählen diese beiden sehr einfachen Beispiele, um einen Einblick in die Methodik zu gewinnen, nach welcher sich derartige Probleme behandeln lassen.

2. Zurückführung auf das Problem der Erstpassagen

Wir betrachten zunächst den Fall der Aufladung eines Kondensators. Für die Differenz $U_2 = U_0 - U_1$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{dU_2}{dt} = -\frac{1}{RC} U_2 - \frac{1}{RC} U_R . \tag{4}$$

Diese Gleichung ist formal identisch mit der Gleichung für die Geschwindigkeit bei der Brownschen Bewegung. Wir können daher gleich die zugeordnete Fokker-Planck-Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(U_{2,t})$ der Spannung U_2 anschreiben [1].

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{RC} \frac{\partial}{\partial U_2} U_2 W + \frac{q}{|RC|} \frac{\partial^2 W}{\partial U_2^2} . \tag{5}$$

Die Bedeutung des Parameters q ergibt sich am einfachsten aus der stationären Lösung der Gl. (5): Da W für $U_2 = \pm\infty$ verschwinden muß, gilt

$$U_2 W + q \frac{\partial W}{\partial U_2} = 0 .$$

Multipliziert man das mit U_2 und integriert über U_2, so ergibt sich

$$q = \frac{\int U_2^2 W \, dU_2}{\int W \, dU_2} = \langle U_2^2 \rangle = \langle U_1^2 \rangle - \langle U_1 \rangle^2 .$$

Demnach ist q der quadratische Mittelwert der Spannungsschwankung, die sich stationär am Kondensator einstellt, wobei es gleichgültig ist, ob diese Schwankungen durch das Rauschen in R oder etwa durch den Schrotteffekt in einer vorgelagerten Röhre zustande kommen. Wir setzen q als bekannt voraus. Wir gehen zu dimensionslosen Variablen über, indem wir setzen:

$$\tau = \frac{t}{|RC|}; \quad x = \frac{U}{\sqrt{q}} \tag{6}$$

und erhalten dann an Stelle von (5)

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} x W + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} . \tag{7}$$

[1] Vgl. CHANDRASEKHAR, S.: Rev. Mod. Phys. **18**, 33 (1943).

Diese Gleichung können wir wieder als Diffusionsgleichung für ein Teilchen lesen, und unser Problem läuft auf die Frage hinaus, die Wahrscheinlichkeit $p(\tau)$ anzugeben, daß ein Teilchen, welches sich zur Zeit $\tau=0$ an der Stelle $x_0=U_0/\sqrt{q}$ befand, die Stelle $x_k=(U_0-U_k)/\sqrt{q}$ erstmalig im Intervall $\tau, d\tau$ erreicht. Das ist aber das Problem der „Erstpassagen“[2] und kann folgendermaßen behandelt werden: Man löse (7) mit der Anfangs- und Randbedingung

$$W(x,0)=\delta(x-x_0);$$

$$W(x_k,\tau)=0;$$

dann ist

$$p(\tau)=\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=x_k}. \tag{8}$$

Leider ist das, trotz der einfachen Gestalt von (7), keine ganz leichte Aufgabe.

3. Aufladung des Kondensators

Wir setzen

$$R(x,s)=\int_0^\infty W(x,\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau$$

und entsprechend

$$P(s)=\int_0^\infty p(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau.$$

Aus (7) erhält man dann

$$sR-\frac{\partial}{\partial x}xR-\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}=\delta(x-x_0).$$

Die Lösung dieser Gleichung läßt sich durch Webersche Funktionen darstellen; das ergibt aber sehr unhandliche Ausdrücke. Wenn man nur die Momente der Verteilung $p(\tau)$ haben will, genügt es, die Potenzreihenentwicklung der Lösung in der Umgebung von $s=0$ zu kennen.

Es ist nämlich

$$P(s)=\int_0^\infty p(\tau)\left(1-s\tau+\frac{1}{2!}s^2\tau^2-\cdots\right)d\tau$$

$$=1-s\langle\tau\rangle+\frac{s^2}{2}\langle\tau^2\rangle-\cdots.$$

Wir setzen also

$$R(x,s)=R^0(x)+sR^{(1)}(x)+s^2R^{(2)}(x)+\cdots.$$

---

[2] Vgl. FÜRTH, R.: in: MISES FRANK v.: Differentialgleichung der mathematischen Physik, Bd. II, S. 555. New York, Braunschweig, Dover: Vieweg 1961.

Dann genügen die $R^{(n)}$ dem Gleichungssystem

$$\frac{d^2R^{(n)}}{dx^2}+\frac{d}{dx}xR^{(n)}=f^{(n)}=-\delta(x-x_0) \quad \text{für} \quad n=0$$
$$=R^{(n-1)} \quad \text{für} \quad n\neq 0.$$

Dabei sollen alle $R^{(n)}$ den Bedingungen $R^{(n)}(x_k)=0$, $R^{(n)}\to 0$ für $x\to\infty$ genügen. Diese Lösungen sind gegeben durch

$$R^{(n)}(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{x_k}^{x}e^{\frac{t^2}{2}}\int_{t}^{\infty}f^{(n)}(t')\,dt'\,dt\,; \tag{9}$$

damit ergibt sich

$$\langle\tau^n\rangle=(-)^{n+1}\,n!\int_{x_k}^{\infty}f^{(n)}(x)\,dx. \tag{10}$$

Aus (9) erhalten wir

$$R^{(0)}=e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{x_k}^{\mathrm{Min}(x,x_0)}e^{\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$R^{(1)}=-e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{x_k}^{x}dy\,e^{\frac{y^2}{2}}\int_{y}^{\infty}dz\,e^{-\frac{z^2}{2}}\int_{x_k}^{\mathrm{Min}(z,x_0)}dt\,e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Daraus ergibt sich zunächst

$$\langle\tau\rangle=\int_{x_k}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{x_k}^{\mathrm{Min}(x,x_0)}e^{\frac{t^2}{2}}\,dt\,dx$$
$$=\int_{x_k}^{x_0}e^{\frac{t^2}{2}}\Phi(t)\,dt \tag{11}$$

mit

$$\Phi(t)=\int_{t}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\approx e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+O(x^{-5})\right). \tag{12}$$

Da x_0 und x_k ihrer Definition nach große Zahlen sind, kann man in (11) die in (12) angegebene asymptotische Entwicklung von Φ einsetzen, und erhält

$$\langle\tau\rangle=\log\frac{x_0}{x_k}-\left(\frac{1}{x_k^2}-\frac{1}{x_0^2}\right)+O\left(\frac{1}{x_k^4}\right). \tag{13}$$

Behält man hier nur den ersten Term bei, so erhält man wieder (1). Durch die Spannungsschwankungen wird demnach die Aufladezeit etwas verkürzt, und zwar um so mehr, je kleiner x_k ist, d.h. je näher U_k an U_0 liegt; was anschaulich ohne weiteres klar ist. Für $\langle\tau^2\rangle$ ergibt sich zunächst

$$\langle\tau^2\rangle=2\int_{x_k}^{\infty}dx\,e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{x_k}^{x}dy\,e^{\frac{y^2}{2}}\int_{y}^{\infty}dz\,e^{-\frac{z^2}{2}}\int_{x_k}^{\mathrm{Min}(z,x_0)}dt\,e^{\frac{t^2}{2}},$$

kehrt man hier, ähnlich wie bei der Berechnung von $\langle\tau\rangle$, zunächst die Reihenfolge aller Integrationen um, so erhält man

$$\langle\tau^2\rangle = 2\int_{x_k}^{x_0} dt\, e^{\frac{t^2}{2}} \int_{t}^{\infty} dz\, e^{-\frac{z^2}{2}} \int_{x_k}^{z} dy\, e^{\frac{y^2}{2}} \Phi(y).$$

Eine partielle Integration nach z liefert schließlich

$$\begin{aligned}\langle\tau^2\rangle - \langle\tau\rangle^2 &= 2\int_{x_k}^{x_0} dt\, e^{\frac{t^2}{2}} \int_{t}^{\infty} dz\, e^{\frac{z^2}{2}} \Phi(z)^2 \\ &= \frac{1}{x_k^2} - \frac{1}{x_0^2} + O\left(\frac{1}{x_k^4}\right).\end{aligned} \tag{14}$$

Bemerkenswert ist, daß (in reduzierten Einheiten!) das Quadrat der Streuung gleich der Verschiebung des Erwartungswertes ist. Da es sich um sehr kleine Zahlen handelt, ist also die Streuung selbst in Wirklichkeit viel größer.

4. Selbstaufladung des Kondensators

Wir betrachten jetzt das zweite Problem, die Selbstaufladung eines Kondensators über einen negativen Widerstand. Dabei gelten im wesentlichen die selben Gleichungen wie oben, es ändert sich nur folgendes: x ist jetzt die reduzierte Spannung am Kondensator, es ist also $x_0 = 0$ und wir suchen nach den doppelseitigen Erstpassagen durch die Stellen $x = \pm x_k$. Zweitens ändert sich in der Gl. (7) das Vorzeichen des ersten Gliedes auf der rechten Seite und wir erhalten

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial x} x W + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{15}$$

Die Anfangs- und Randbedingungen lauten

$$W(x, 0) = \delta(x); \quad W = 0 \quad \text{für} \quad x = \pm x_k.$$

Für die Wahrscheinlichkeit $p(\tau)$, daß zur Zeit τ die eine oder andere der beiden Grenzen erreicht wird, ergibt sich aus Symmetriegründen

$$p(\tau) = -2 \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x = +x_k}.$$

Diese ziemlich geringfügigen Änderungen bedingen aber wesentliche Unterschiede, schon in der ganzen Fragestellung. Wie wir eingangs bemerkt hatten, wird in diesem Falle bei der Anfangsbedingung $U_1 = 0$ der ganze Aufladevorgang überhaupt erst durch die Schwankungen in Gang gesetzt, und damit wird bereits die Ermittelung von $\langle\tau\rangle$ eine nichttriviale Frage, auf die wir uns hier beschränken wollen.

Wenn man wieder eine Laplace-Transformation nach τ macht, ergibt sich nach dem gleichen Verfahren wie in Abschnitt 3

$$\langle\tau\rangle = \int_0^{x_k} dx\, e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{x_k} dt\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$= \int_0^{x_k} dx\, e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{\infty} dt\, e^{-\frac{t^2}{2}} + O(x_k^{-2}).$$

Im Unterschied zu den Rechnungen im vorigen Abschnitt kann man hier nun nicht die asymptotische Entwicklung des inneren Integrals einsetzen, da man es bis zu $x=0$ benötigt. Man führt deshalb zunächst $s=x-t$ als Integrationsvariable ein und integriert dann nach x:

$$\langle\tau\rangle = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-x_k s}}{s} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left\{ \int_\varepsilon^{\infty} \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{s}\, ds - \int_\varepsilon^{\infty} \frac{e^{-x_k s}}{s} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds \right\}.$$

Hier macht man einen Fehler von der Ordnung $0(x_k^{-2})$, wenn man im zweiten Integral den Faktor $e^{-s^2/2}$ wegläßt. Die verbleibenden Integrale lassen sich durch das Exponentialintegral ausdrücken, und man erhält

$$\langle\tau\rangle = \log x_k + \tfrac{1}{2}(\gamma + \log 2) + O(x_k^{-2}). \tag{16}$$

Dabei ist $\gamma = 0{,}5772\ldots$ die Eulersche Konstante.

Mit den ursprünglichen Variablen ergibt das

$$\langle t\rangle = |RC| \log \frac{U_k}{U_0} \qquad U_0 = \sqrt{\frac{q}{2e^{\gamma}}} = 0{,}5298 \sqrt{\langle \Delta U^2\rangle}. \tag{17}$$

Der Aufladevorgang verläuft also so, als ob man mit einer effektiven Anfangsspannung U_0 begonnen hätte.

Ich danke Herrn Prof. Dr. W. Kroebel für einen Hinweis auf dieses Problem.

Zeitschrift für Physik 202, 504–513 (1967)

Number-Conserving Approach to the Pairing-Force Model

II. Coupled Degenerate Model

KENJI HARA

Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg/West Germany

Received April 13, 1967

The pairing-force model of finite spherical nuclei is studied in a way that does not violate the conservation of particle number. In the present model, the single-particle levels are first classified into two degenerate sets, and subsequently, the energy spacings in each set are taken into account by perturbation theory. Ground state energies of the even nickel, tin and lead isotopes are calculated and are found to be correct to within 300 keV by comparison with the exact solutions of the pairing hamiltonian obtained by KERMAN, LAWSON, and MACFARLANE.

1. Introduction

This is the second in a series of papers intended to study the nuclear pairing model[1] without violating the conservation of particle number. Effects of long range forces are not considered for simplicity, but will be investigated in a future publication.

Recently, much attention has been paid to the fact that the superconductivity approximation does not keep the total number of particles constant, and several attempts[2–7] have already been made to alleviate this defect. DANG and KLEIN[8, 9], basing themselves on an entirely different method, reported that their method gave excellent results. We present in this series of papers yet another approach, which has the advantage of being simple and straightforward, although it has some limitation.

In the first paper[10], which will be refered to as I hereafter, we studied a simple model in which the single-particle levels were assumed to be almost degenerate. A model calculation on nickel isotopes produced

[1] KISSLINGER, L. S., and R. A. SORENSEN: Dan. Mat.-fys. Medd. **32**, No. 9 (1960).
[2] NOGAMI, Y.: Phys. Rev. **134**, B 313 (1964).
[3] DIETRICH, K., H. J. MANG, and J. H. PRADAL: Phys. Rev. **135**, B 22 (1964).
[4] NILSSON, S. G.: Nuclear Phys. **55**, 97 (1964).
[5] BANG, J., J. KRUMLINDE, and S. G. NILSSON: Phys. Letters **15**, 55 (1965).
[6] MANG, H. J., J. K. POGGENBURG, and J. O. RASMUSSEN: Nuclear Phys. **64**, 353 (1965).
[7] IWAMOTO, F., and H. ONISHI: To appear in Progr. Theoret. Phys. (Kyoto).
[8] DANG, G. D., and A. KLEIN: Phys. Rev. **143**, 735 (1966).
[9] DANG, G. D., and A. KLEIN: Phys. Rev. **147**, 689 (1966).
[10] HARA, K.: Nuclear Phys. A **95**, 385 (1967).

good results, so that we now generalize the previous simple model to a more realistic one. As we have already pointed out in I, the essential point of this generalization lies in the fact that the exact solution of the pairing hamiltonian can be easily obtained when there are only two sets of degenerate levels. (Number of levels, however, can be arbitrary.) This is an implicitly solvable model which one may call "Coupled degenerate model". We take advantage of this fact and proceed in the following way. We assume a situation where one can classify the single-particle levels into two groups, each of them being almost degenerate*. Neglecting energy spacings in each group of levels, we arrive at a coupled degenerate model which defines our zeroth order hamiltonian. The neglected part of the hamiltonian is then treated as a small perturbation. These procedures are parallel with those of I. We shall see later, through numerical results, that such a simple picture provides a reasonably good approximation to realistic cases.

Before we discuss the present model, however, it is worthwhile to recall some results of our previous study.

2. Review of Almost Degenerate Model

With the notation of I, the pairing hamiltonian reads

$$H=\sum \Omega_j \varepsilon_j+2\sum \varepsilon_j \hat{S}_j^{(0)}-G\sum \hat{S}_i^{(+)}\hat{S}_j^{(-)} \tag{2.1}$$

where ε_j are the single-particle energies and $\Omega_j=j+\frac{1}{2}$.

Define the "effective" pair degeneracy by

$$D_i=\begin{cases}\Omega_i & (\text{if } v=0)\\ \Omega_i-\delta_{ij} & (\text{if } v=1)\\ \Omega_i-\delta_{ij}-\delta_{ij'} & (\text{if } v=2)\\ \text{etc.}\end{cases} \tag{2.2}$$

where v is the seniority quantum number, and j and j' are levels blocked by un-paired particles. Thus,

$$D=\sum D_i=\Omega-v \tag{2.3}$$

is the available pair degeneracy, while $\Omega=\sum\Omega_i$ is the total pair degeneracy. In an almost degenerate case, it is convenient to define the "centre of gravity" of the single-particle levels and to measure the single-particle energies from this value, i.e.

$$e_i=\varepsilon_i-\varepsilon, \qquad \varepsilon=\sum D_i\varepsilon_i/D, \tag{2.4}$$

* The term "almost degenerate" is a relative concept. See I for a quantitative definition. See also sect. 4 of this paper.

so that we have the relation

$$\sum D_i e_i = 0. \tag{2.5}$$

When the levels are almost degenerate, the e's are small quantities. Definition (2.4) differs slightly from that of I, but is more convenient as mentioned in Appendix 4 of I.

Now, our hamiltonian (2.1) takes the form

$$H = H^0 + H'$$

$$H^0 = \sum \Omega_i \varepsilon_i + 2\varepsilon \hat{S}^{(0)} - G \hat{S}^{(+)} \hat{S}^{(-)}$$

$$H' = 2 \sum e_i \hat{S}_i^{(0)}$$

where we have defined the quasi-spin operators by

$$\hat{S}^{(\pm)} = \sum \hat{S}_i^{(\pm)}, \quad \hat{S}^{(0)} = \sum \hat{S}_i^{(0)} = \tfrac{1}{2}(\hat{N} - \Omega) \tag{2.6}$$

$\hat{N}$ being the total number operator which is diagonal for a given system. The eigen-value of H^0, the hamiltonian of degenerate model[11, 12], is

$$H^0 | S S_0 \rangle = E(S) | S S_0 \rangle$$

$$E(S) = \sum \Omega_i \varepsilon_i + 2\varepsilon S_0 - G(S + S_0)(S - S_0 + 1)$$

$$S = D/2, D/2 - 1, \ldots, |S_0|$$

$$S_0 = (N - \Omega)/2$$

where N is the total number of particles. Therefore, the lowest state corresponds to $S = D/2$, and the first excited state to $S = D/2 - 1$. The latter is degenerate, the degeneracy being $p - 1$ where p is the number of levels. Corresponding wave functions were obtained in I, where a particularly convenient representation for the first excited states was employed.

The perturbation matrix elements are given in the form

$$\langle S' S_0 | H' | S S_0 \rangle = \langle S S_0, 1 0 | S' S_0 \rangle \langle S' \| H' \| S \rangle$$

the first factor on the right side being a Clebsch-Gordan coefficient, so that the selection rule is $|S' - S| \leqq 1$. In particular,

$$\langle D/2 \| H' \| D/2 \rangle = \left[\frac{D+2}{D}\right]^{\frac{1}{2}} \sum D_i e_i = 0, \tag{2.7}$$

$$\langle D/2 - 1 \| H' \| D/2 \rangle = -\left[\frac{D-1}{D+1} 2 \sum D_i e_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.8}$$

where we have used the relation (2.5) in obtaining these expressions.

[11] MOTTELSON, B. R.: The many-body problem. Paris: Dunod 1959.
[12] KERMAN, A. K.: Ann. Phys. (N.Y.) **12**, 300 (1961).

In I, we proved that the Feenberg perturbation formula[13] gave very simple expression for the lowest energy upto 4th order. The second order perturbation theory, for example, takes the form

$$W = E(D/2) - \frac{D^2 - (N-\Omega)^2}{G\,D^2(D-1)} \sum D_i e_i^2. \tag{2.9}$$

Note that there is no first order term due to (2.7) which is a consequence of (2.5). The formula (2.9) applies to the lowest state of any seniority.

If the levels are not almost degenerate, the expression $\sum D_i e_i^2$ is no longer small. Thus, in place of a degenerate model, we have to use a better zeroth order hamiltonian in order to get a good approximation.

3. Coupled Degenerate Model

Let us consider a case where the single-particle levels can be grouped into two sets, A and B, each of them being almost degenerate. Corresponding to (2.4), we define

$$e_{Ai} = \varepsilon_i - \varepsilon_A, \quad \varepsilon_A = \sum_A D_i \varepsilon_i / D_A, \quad D_A = \sum_A D_i \tag{3.1}$$

for the set A, and similarly

$$e_{Bi} = \varepsilon_i - \varepsilon_B, \quad \varepsilon_B = \sum_B D_i \varepsilon_i / D_B, \quad D_B = \sum_B D_i \tag{3.2}$$

for the set B. Here, $\sum_A (\sum_B)$ stands for summation over set A (B) only. Also define

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_A + \varepsilon_B), \quad e = \varepsilon_A - \varepsilon_B. \tag{3.3}$$

Quasi-spin operators for each set are defined by

$$\hat{S}_A^{(\nu)} = \sum_A \hat{S}_i^{(\nu)} \quad \text{and} \quad \hat{S}_B^{(\nu)} = \sum_B \hat{S}_i^{(\nu)} \qquad (\nu = 0, \pm) \tag{3.4}$$

so that the (total) quasi-spin operators (2.6) are

$$\hat{S}^{(\pm)} = \hat{S}_A^{(\pm)} + \hat{S}_B^{(\pm)}, \quad \hat{S}^{(0)} = \hat{S}_A^{(0)} + \hat{S}_B^{(0)} = \tfrac{1}{2}(\hat{N} - \Omega).$$

Then, the hamiltonian (2.1) reads

$$\begin{aligned} H &= H^0 + H', \\ H^0 &= \sum \Omega_i \varepsilon_i + 2\varepsilon \hat{S}^{(0)} - G \hat{S}^{(+)} \hat{S}^{(-)} + e(\hat{S}_A^{(0)} - \hat{S}_B^{(0)}), \\ H' &= H_A + H_B = 2 \sum_A e_{Ai} \hat{S}_i^{(0)} + 2 \sum_B e_{Bi} \hat{S}_i^{(0)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

[13] Morse, P. M., and H. Feschbach: Methods of theoretical physics, part. II, p. 1010. New York: MacGraw-Hill 1953.

Now, associeted with two sets of degenerate levels A and B, there are two well defined eigen-functions $|S_A\, S_{A0}\rangle$ and $|S_B\, S_{B0}\rangle$ respectively. It should be noted that S_A and S_B, the quasi-spin of each set, are good quantum numbers for the hamiltonian of the coupled degenerate model, H^0. So we define

$$\begin{aligned} |S\, S_0\rangle &\equiv |(S_A\, S_B)\, S\, S_0\rangle \\ &= \sum \langle S_A\, S_{A0}, S_B\, S_{B0} | S\, S_0\rangle\, |S_A\, S_{A0}\rangle\, |S_B\, S_{B0}\rangle \end{aligned} \tag{3.6}$$

which is just the usual rule of coupling two angular momenta.

Then, we get, after some algebra,

$$H^0\, |S\, S_0\rangle = E(S)\, |S\, S_0\rangle + F(S)\, |S-1\, S_0\rangle + F(S+1)\, |S+1\, S_0\rangle \tag{3.7}$$

where

$$\begin{aligned} E(S) &= \sum \Omega_i \varepsilon_i + 2\varepsilon S_0 - G(S+S_0)\,(S-S_0+1) + e S_0\, \frac{S_-\, S_+}{S(S+1)} \\ F(S) &= \frac{e}{S} \left\{ \frac{S^2 - S_0^2}{4S^2-1}\, (S^2 - S_-^2)\, (S_+^2 - S^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ S_+ &= S_A + S_B + 1, \quad S_- = S_A - S_B, \quad S_0 = \tfrac{1}{2}(N - \Omega). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Note that S runs over the range of values

$$\mathrm{Max}\big(|S_0|, |S_A - S_B|\big) \leqq S \leqq S_A + S_B \tag{3.9}$$

which can be seen from (3.6). Now, let

$$\begin{aligned} H^0\, |\Phi\rangle &= E\, |\Phi\rangle \\ |\Phi\rangle &= \sum \Phi(S)\, |S\, S_0\rangle \\ \Phi(S) &= \langle S\, S_0 | \Phi\rangle \end{aligned} \tag{3.10}$$

so that (3.7) leads to the eigen-value equation

$$[E - E(S)]\, \Phi(S) = F(S)\, \Phi(S-1) + F(S+1)\, \Phi(S+1) \tag{3.11}$$

which is easily solved numerically. An implicit formal solution of (3.11) is given in the appendix.

Let us now discuss the classification of eigen-states. For given S_A, S_B and N, the number of particles, Eq. (3.11) has M solutions where

$$M = S_+ - \mathrm{Max}\big(|S_0|, |S_-|\big). \tag{3.12}$$

Therefore, the energies of the coupled degenerate model form a kind of band spectrum, each band being characterised by m and n so that

$$\text{the } (m,n)\text{-band has} \quad S_A = D_A/2 - m, \quad S_B = D_B/2 - n. \tag{3.13}$$

In particular, the (0, 0)-band is the ground state band. The member of the other bands are degenerate, having the multiplicity of the degenerate model. For example, the multiplicity of the (1, 0)-band is p_A-1, p_A being the number of levels in the set A. Similarly, the multiplicity of the (0, 1)-band is p_B-1, p_B being the number of levels in the set B. Labeling these degeneracies by a and b respectively, the eigen-value equation of the coupled degenerate model reads

$$H^0 |\Phi^{\alpha}_{m\,n}(a\,b)\rangle = E^{\alpha}_{m\,n} |\Phi^{\alpha}_{m\,n}(a\,b)\rangle . \tag{3.14}$$

4. Perturbation Calculation

Our next step is to take the perturbing term, H' in (3.5), into account. Toward this end, let us first calculate some matrix elements. From our discussion in I, we know that the perturbing term H_A (H_B) is the third component of a quasi-spin vector in the space of the set A (B). Generally, let $Q^{(\lambda\,\mu)}_A$ and $Q^{(\lambda\,\mu)}_B$ be quasi-spin tensors of rank λ in the respective spaces. Then, we get the following matrix elements.

$$\begin{aligned}&\langle (a'\,S'_A, b'\,S'_B)\,S'\,S'_0 |\, Q^{(\lambda\,\mu)}_A \,|(a\,S_A, b\,S_B)\,S\,S_0\rangle \\ &\quad = \delta(S_B, S'_B)\,\delta(b, b')\,\langle a'\,S'_A \|\, Q^{(\lambda)}_A \,\| a\,S_A\rangle \times \\ &\quad \times \sqrt{(2S'_A+1)\,(2S+1)}\; W(S_B\,S'_A\,S\,\lambda;\, S'\,S_A)\,\langle S\,S_0, \lambda\,\mu | S'\,S'_0\rangle ,\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}&\langle (a'\,S'_A, b'\,S'_B)\,S'\,S'_0 |\, Q^{(\lambda\,\mu)}_B \,|(a\,S_A, b\,S_B)\,S\,S_0\rangle \\ &\quad = \delta(S_A, S'_A)\,\delta(a, a')\,\langle b'\,S'_B \|\, Q^{(\lambda)}_B \,\| b\,S_B\rangle \times \\ &\quad \times \sqrt{(2S'_B+1)\,(2S+1)}\; W(S_A\,S_B\,S'\,\lambda;\, S\,S'_B)\,\langle S\,S_0, \lambda\,\mu | S'\,S'_0\rangle .\end{aligned} \tag{4.2}$$

Here, $\delta(p, q)$ stands for $\delta_{p\,q}$, and a and b are additional quantum numbers. By studying these formulas, we see that matrix elements of these tensors between two states of the coupled degenerate model separate into two factors, one that depends on the number of particles and the other that does not. This property is analogous one to the Wigner-Eckart theorem in the degenerate model studied in I.

Now, for simplicity, we will confine ourselves to the second order perturbation theory. Writing

$$|\Phi^{\alpha}_{00}\rangle = |\Phi^{\alpha}_G\rangle , \quad |\Phi^{\alpha}_{10}\rangle = |\Phi^{\alpha}_A\rangle , \quad |\Phi^{\alpha}_{01}\rangle = |\Phi^{\alpha}_B\rangle$$

we first note that

$$\langle \Phi^{\alpha}_G |\, H' \,|\Phi^{\beta}_G\rangle = 0$$

due to the relations

$$\langle D_A/2 \|\, H_A \,\| D_A/2\rangle = \langle D_B/2 \|\, H_B \,\| D_B/2\rangle = 0$$

which correspond to (2.7). In other words, H' has no inter ground state band matrix element. This is the reason why we have chosen the centre of gravity such that

$$\sum_A D_i e_{Ai} = \sum_B D_i e_{Bi} = 0. \tag{4.3}$$

Other matrix elements relevant to the calculation are

$$\langle \Phi_A^\alpha | H' | \Phi_G^\gamma \rangle = -\left[\frac{\sum_A D_i e_{Ai}^2}{D_A}\right]^{\frac{1}{2}} A_{\alpha\gamma} \tag{4.4}$$

$$\langle \Phi_B^\beta | H' | \Phi_G^\gamma \rangle = -\left[\frac{\sum_B D_i e_{Bi}^2}{D_B}\right]^{\frac{1}{2}} B_{\beta\gamma} \tag{4.5}$$

where, denoting $S_A = D_A/2$ and $S_B = D_B/2$,

$$\begin{aligned} A_{\alpha\gamma} = (D_A - 1)\left[\frac{2D_A}{D_A+1}\right]^{\frac{1}{2}} \sum \sqrt{2S+1}\langle S S_0, 10 | S' S_0\rangle \times \\ \times W(S_B S_A - 1 S 1; S' S_A) \Phi_A^\alpha(S') \Phi_G^\gamma(S), \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} B_{\beta\gamma} = (D_B - 1)\left[\frac{2D_B}{D_B+1}\right]^{\frac{1}{2}} \sum \sqrt{2S+1}\langle S S_0, 10 | S' S_0\rangle \times \\ \times W(S_A S_B S' 1; S S_B - 1) \Phi_B^\beta(S') \Phi_G^\gamma(S). \end{aligned} \tag{4.7}$$

In obtaining these expressions, we have used (4.1) and (4.2) with the relations

$$\langle D_A/2 - 1 \| H_A \| D_A/2\rangle = -\left[\frac{D_A - 1}{D_A + 1} 2 \sum_A D_i e_{Ai}^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\langle D_B/2 - 1 \| H_B \| D_B/2\rangle = -\left[\frac{D_B - 1}{D_B + 1} 2 \sum_B D_i e_{Bi}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

that correspond to (2.8).

The second order perturbation formula thus reads

$$W = E_0 - \left(\frac{\sum D_i e_{Ai}^2}{D_A}\right) \sum_\alpha \frac{A_{\alpha 0}^2}{E_\alpha - E_0} - \left(\frac{\sum D_i e_{Bi}^2}{D_B}\right) \sum_\beta \frac{B_{\beta 0}^2}{E_\beta - E_0} \tag{4.8}$$

where E_0, E_α and E_β are energies of (0, 0), (1, 0) and (0, 1) bands, respectively. Note that this formula applies to states of any seniority if we choose the D's appropriately (see (2.1)), so that the blocking effects are accordingly taken into account.

The criterion of the validity of the present calculation takes the following form. We introduce the energy dispersion by

$$\begin{aligned} \Delta H &= \{\langle \Phi_G^0 | (H - E_0)^2 | \Phi_G^0 \rangle\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{\frac{\sum D_i e_{Ai}^2}{D_A} \sum_\alpha A_{\alpha 0}^2 + \frac{\sum D_i e_{Bi}^2}{D_B} \sum_\beta B_{\beta 0}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

and compare this quantity with the smallest excitation energy, ΔE,

$$\eta = \Delta H / \Delta E . \tag{4.10}$$

This quantity measures the deviation of the actual situation from the coupled degenerate model.

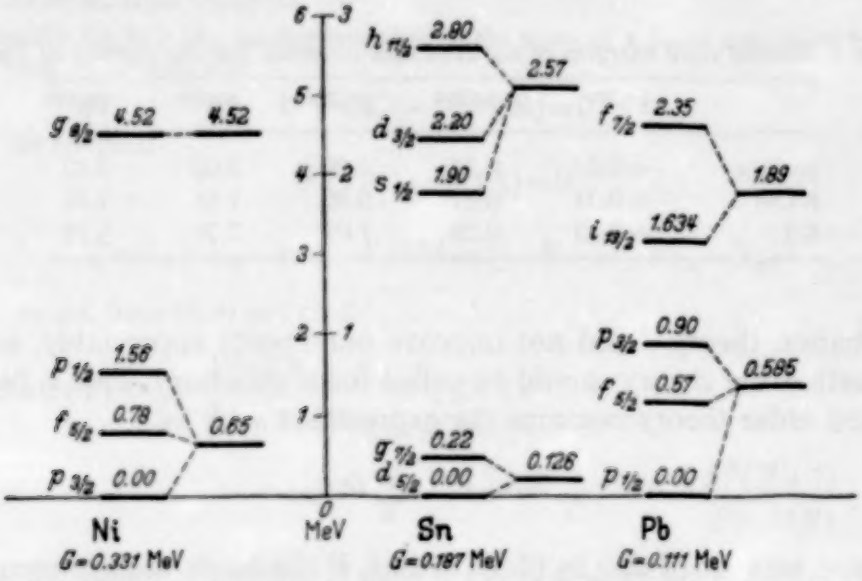


Fig. 1. Single-particle energies used for the calculation taken from Ref. [1]

We have applied the formula (4.8) to the ground states of the even nickel, tin and lead isotopes. The parameters we have used are those of KISSLINGER and SORENSEN[1] which are shown in Fig. 1.

Results are presented in the Tables 1, 2, and 3 together with those of KISSLINGER and SORENSEN[1] (KS) and of KERMAN, LAWSON and MAC-

Table 1. *Ground state energies of the even nickel isotopes. KS and KLM refer to* KISSLINGER *and* SORENSEN[1] *(BCS calculation) and to* KERMAN, LAWSON, *and* MACFARLANE[14] *(exact calculation), respectively*

	Ni^{58}	Ni^{60}	Ni^{62}	Ni^{64}	Ni^{66}
present	−1.31	−1.79	−1.42	−0.18	1.96
KLM	−1.49	−2.11	−1.75	−0.51	1.70
KS	−1.13	−1.51	−1.11	0.25	2.48

Table 2. *Ground state energies of the even tin isotopes. See the caption of Table 1*

	Sn^{122}	Sn^{124}	Sn^{126}	Sn^{128}
present	14.68	19.81	25.42	31.48
KLM	14.49	19.67	25.31	31.43
KS	15.19	20.36	25.70	31.74

FARLANE[14] (KLM). The error is at most 300 keV, whereas that of KS is at most 780 keV. This is quite satisfactory for such a simple treatment as the present one. The case of lead isotopes (Table 3) is rather bad simply because the single-particle levels are not ideally situated for the present treatment, as we see from Fig. 1. The third order Feenberg

Table 3. *Ground state energies of the even lead isotopes. See the caption of Table 1*

	Pb^{206}	Pb^{204}	Pb^{202}	Pb^{200}	Pb^{198}
present	−0.01	0.32	0.99	2.02	3.42
KLM	−0.31	0.07	0.80	1.85	3.47
KS	−0.12	0.28	1.09	2.20	3.73

perturbation theory[13] did not improve our results appreciably, so that the fourth order theory should be called for if necessary. This is because the third order theory contains the expressions such as

$$\sum_A D_i e_{Ai}^3, \quad \sum_B D_i e_{Bi}^3$$

which are very small due to (4.3). In fact, if the levels are symmetrically distributed with the same degeneracy, these expressions vanish identically, so that there is no odd order corrections. For many purposes, the second order theory will be sufficient.

It is my great pleasure to express my sincere thanks to Professor J. H. D. JENSEN for the warm hospitality extended to me. Dr. R. Y. CUSSON kindly read through the manuscript and made some useful remarks. The numerical calculation was done on the IBM 7090 at the Computing Centre of the University of Heidelberg. The author is indebted to the Alexander von Humboldt-Stiftung for financial aid.

Appendix

We derive the formal solution of (3.11). First, we define

$$F(S)\,\Phi(S-1)=U^{(-)}(S)\,\Phi(S), \tag{A.1}$$

$$F(S+1)\,\Phi(S+1)=U^{(+)}(S)\,\Phi(S) \tag{A.2}$$

so that we have the relation

$$F^2(S)=U^{(-)}(S)\,U^{(+)}(S-1). \tag{A.3}$$

Substituting (A.1) and (A.2) into (3.11), we get

$$E=E(S)+U^{(-)}(S)+U^{(+)}(S). \tag{A.4}$$

[14] KERMAN, A. K., R. D. LAWSON, and M. H. MACFARLANE: Phys. Rev. **124**, 162 (1961).

This is an implicit solution since $U^{(\pm)}(S)$ depends on E. Notice that $U^{(\pm)}(S)$ satisfies the recursion formula

$$U^{(\pm)}(S)=\frac{1}{E-E(S\pm1)-U^{(\pm)}(S\pm1)}\begin{Bmatrix}F^2(S+1)\\ F^2(S)\end{Bmatrix} \tag{A.5}$$

which is derived from (A.3) and (A.4).

Actually, (A.4) is the secular equation in the form of a finite continued fraction. To see this, let us note that

$$U^{(+)}(T)=U^{(-)}(R)=0$$

due to the relations

$$F(T+1)=F(R)=0 \tag{A.6}$$

where

$$T=S_A+S_B \quad \text{and} \quad R=\mathrm{Max}\left(\tfrac{1}{2}|N-\Omega|, |S_A-S_B|\right),$$

so that we get, from (A.4) and (A.5)

$$E=E(T)+\frac{F^2(T)}{E-E(T-1)-\dfrac{F^2(T-1)}{E-E(T-2)-\ddots-\dfrac{F^2(R+1)}{E-E(R)}}}. \tag{A.7}$$

Clearly, the number of solutions of (A.7) is $T+1-R$ which agrees with (3.12).

The wave function is given by, from (A.1),

$$\Phi(S)=\Phi(T)\prod_{Q=S+1}^{T}\frac{U^{(-)}(Q)}{F(Q)},$$

$\Phi(T)$ being the normalization constant to give

$$\sum_S \Phi^2(S)=1.$$

Zeitschrift für Physik 202, 514–524 (1967)

Mass Differences and Vector Currents

K. HEFFT and B. STECH
Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg

Received April 18, 1967

Hadron mass differences are related to the divergences of the weak hadronic vector currents. The nearly conserved $SU(3)$-charges are used to understand the approximate validity of mass formulae. We present a simple argument — involving the formal quark structure of the relevant operators — for octet dominance and predict equal d/f-ratios for the strong mass differences and the leading part of the electromagnetic mass splitting. Furthermore, mass formulae connecting different $SU(3)$-multiplets are derived. A remarkable universality property of the coupling of the various particles to the divergences is observed by which even baryon and meson mass differences are related.

Introduction

The observable electromagnetic and weak currents have many interesting properties the study of which has proved to be very useful. Their symmetries and local commutation relations contain a large amount of information on the structure and dynamics of elementary particles. These currents also describe important rigorous and approximate conservation laws. In this paper we look at the non-conserved vector currents and investigate their relation to the mass differences of hadrons.

In *Section I* we recall the more conventional treatment of the electromagnetic mass differences which relates them to the forward Compton scattering amplitude of *virtual* photons. With an unsubtracted dispersion relation one obtains mass differences of the wrong sign, as is well-known. The discussion shows that contributions from the t-channel to the Compton scattering amplitude play a decisive role. Such t-channel contributions will also influence the weak vector currents. The *electromagnetic* mass differences are determined by the divergence of the strangeness conserving vector current, whereas the divergence of the strangeness changing weak vector current gives the *strong* mass differences.

In *Section II* we study these currents and their divergences. To consider vector currents is particularly suggested because they obey an $SU(3)$-algebra and thereby allow one to relate mass differences within and between $SU(3)$-multiplets. By formally using a quark field description one can understand qualitatively why that part of the strangeness changing divergence which transforms as a **27** under $SU(3)$ is suppressed. The argument does not hold for the strangeness conserving divergence. It then follows that the d/f-ratio of the nucleon coupling to the strangeness changing divergence is equal to the d/f-ratio of its counterpart in the

strangeness conserving divergence – in agreement with experiment. The many mass relations obtained reflect all essential features of the electromagnetic and strong mass splitting. The coupling of particles to the divergence of vector currents shows a remarkable universality property relating the mass differences even of baryons and mesons.

I. The Importance of t-Channel Contributions to the Electromagnetic Mass Differences

From electron scattering experiments we have a fairly good knowledge of the charge and current distributions in nucleons. However, if one uses this information for the self-interaction of the electromagnetic current one fails to account for the sign of the neutron-proton mass difference. Following COTTINGHAM[1] s-channel dispersion relations are used for the two relevant forward Compton scattering amplitudes describing the scattering of a virtual photon on a nucleon. The electromagnetic self-mass can then be obtained by an integration of this amplitude over space-like photon momenta q. For the one-nucleon intermediate state this implies an integration of the electromagnetic form factors over the space-like region. Using for these form factors the experimental fit[2]

$$G_E^n(q^2)=0$$

$$G_E^p(q^2)=\frac{1}{\mu_n}G_M^n(q^2)=\frac{1}{\mu_p}G_M^p(q^2)=G(q^2) \tag{1}$$

with

$$G(q^2)=[1-q^2/0.71\,(\mathrm{GeV})^2]^{-2}$$

we obtain for the neutron-proton mass difference*

$$n-p=-0.8\ \mathrm{MeV} \tag{2}$$

to be compared with the experimental value of $(+1.2933\pm0.0001)$ MeV. The next contribution which one would expect to come from the (3/2, 3/2)-resonance $N^*(1236)$ vanishes because of isospin invariance of the strong interaction: the transition matrix element of the current from proton to N^{*+} is identical with the matrix element for the neutron-N^{*0} transition[3]. Thus, to order e^2, the neutron-proton mass difference receives contributions from isospin 1/2 intermediate states only. A similar calculation of the K^0-K^+ mass difference gives the wrong sign, too. Using the

* The particle symbols stand also for the particle masses.

[1] COTTINGHAM, W. N.: Ann. Phys. (N. Y.) **25**, 424 (1963).

[2] ALBRECHT, W., H. J. BEHREND, F. W. BRASSE, W. FLAUGER, H. HULTSCHIG, and K. G. STEFFEN: Phys. Rev. Letters **17**, 1192 (1966).

[3] COLEMAN, S., and H. J. SCHNITZER: Phys. Rev. **136**, B 223 (1964).

$SU(3)$-symmetry results $G^{K^0}(q^2)=0$ one obtains a negative mass difference K_0-K_+ with the K-meson intermediate state. An additional contribution comes from the $\overset{*}{K}(890)$ intermediate state involving the $K-\overset{*}{K}$ transition magnetic form factors. For a qualitative discussion it is sufficient to use the $SU(3)$-symmetry results. We therefore take[4]

$$|G^{K^0\to\overset{*}{K}^0}(q^2)|^2=4\,|G^{K^+\to\overset{*}{K}^+}(q^2)|^2 \tag{3}$$

and obtain an additional negative contribution to the mass difference K_0-K_+: the magnetic interaction gives a negative self-mass and, according to relation (4), the form factor of K^0 is twice as large as that of K^+.

Considering these results and the additional argument of HARARI[5] that the dispersion relation of one of the two $\Delta I=1$ Compton amplitudes very likely requires a subtraction, we are faced with the problem that the essential part of the electromagnetic self-masses is either due to high-energy effects in the energy channel or to t-channel contributions. However, the first possibility effectively leads to important t-channel contributions, too, as recently pointed out by OKUBO[6]. He assumes that the most important contribution to the self-mass integral comes from a part of the Compton amplitude containing the exchange of the Reggeized A_2-meson. Indeed, if one subtracts the dispersion relation at high energy the subtraction constant entering the self-energy integral is the real part of the high energy Compton amplitude (still a function of the virtual photon momentum) and contains the effects of particle exchanges in the t-channel.

In any case it seems to be impossible to leave the t-channel out of consideration. For the electromagnetic $\Delta I=1$ mass differences we need the exchange of objects with the quantum numbers spin-parity 0^+, isospin $I=1$ and G-parity -1. We have to keep in mind that these exchanged objects need not be resonances. Instead, the continuum or the spin 0^+-part of Reggeized spin 2^+-particles may dominate.

If the exchange of such 0^+-objects is important for the electromagnetic self-energy they also will contribute to the vector currents[7]. In the following chapter we shall study the weak hadronic vector current since it is directly observable in leptonic processes.

---

[4] See e.g. HEFFT, K.: Z. Physik **196**, 143 (1966); Eq. (4^c) and lit. cit. there.

[5] HARARI, H.: Phys. Rev. Letters **17**, 1303 (1966). We do not accept all additional conclusions drawn in this paper. HARARI's explanation of the sign of the mass difference does not work for the K-meson. In the nucleon case a positive part of the one-nucleon contribution is over-emphasized by introducing a small nucleon radius.

[6] OKUBO, S.: Phys. Rev. Letters **18**, 257 (1967).

[7] MARSHAK, R. E., V. S. MATHUR, and L. K. PANDIT: Phys. Letters **21**, 563 (1966). The scalar particle introduced in this paper cannot give a pion mass difference (which is $\Delta I=2$).

II. The Vector Currents and their Divergences

We first consider the strangeness conserving part of the weak hadronic vector current* $J_+^\mu(x)$ which has non-vanishing matrix elements for example between neutron and proton or K^0 and K^+. The matrix element of this current between e.g. K-meson states is of the following form** (with $q^\mu=(p-p')^\mu$)

$$\langle K^+(\vec{p}')|J_+^\mu(0)|K^0(\vec{p})\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\left\{a^{I_+}_{K^+K^0}(q^2)\left[(p+p')^\mu - q^\mu\frac{K_0^2-K_+^2}{q^2}\right]+b^{I_+}_{K^+K^0}(q^2)\frac{q^\mu}{q^2}\right\}. \tag{4}$$

In Eq. (4) we separated the current into a conserved and a non-conserved part. In a dispersion relation the charge form factor $a(q^2)$ receives contributions from spin 1^--states, the form factor $b(q^2)$ from 0^+-states only. Defining

$$D_{I_+}(x)=i\frac{\partial}{\partial x^\mu}J_+^\mu(x) \tag{5}$$

we have

$$\langle K^+(\vec{p}')|D_{I_+}(0)|K^0(\vec{p})\rangle = b^{I_+}_{K^+K^0}(q^2)/(2\pi)^3. \tag{6}$$

In Eq. (4) a pole at $q^2=0$ should not occur since a charged particle with zero mass has never been found. On the other hand the charge form factor for vanishing momentum transfer $a^{I_+}_{K^+K^0}(0)$ is different from zero, it is the isovector coupling constant observed in weak decays. Consequently, we have the basic relation

$$b^{I_+}_{K^+K^0}(0)=(K_0^2-K_+^2)\,a^{I_+}_{K^+K^0}(0). \tag{7}$$

This tells us that the 0^+-states which break the current conservation law are responsible for the mass difference. Conversely, the existence of a mass difference implies[8] contributions to the matrix elements of the vector current due to the exchange of scalar states according to the typical diagramm of Fig. 1.

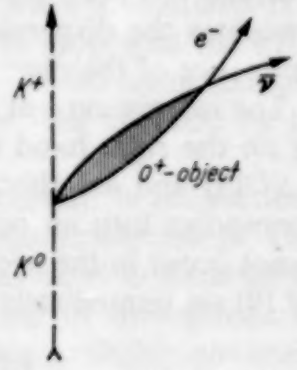


Fig. 1. Feynman diagram contributing to leptonic processes

* The current has been normalized such that, in the limit of exact isospin symmetry, it coincides with the plus-component $I_+=I_1+iI_2$ of the isospin current.

** See * p. 515.

[8] The argument given here is the same as usually applied to the axial vector current. — GOLDBERGER, M. L., and S. B. TREIMAN: Phys. Rev. **111**, 354 (1958). — NAMBU, Y.: Phys. Rev. Letters **4**, 380 (1960). — GELL-MANN, M., and M. LÉVY: Nuovo cimento **16**, 705 (1960).

The current $J_+^\mu(x)$ may also be sandwiched between particles of non-zero spin. For the nucleons the relation corresponding to Eq. (7) reads

$$b_{pn}^{I+}(0)=(n-p)\,a_{pn}^{I+}(0) \tag{8}$$

where $a_{fi}^{I+}(q^2)$ is the charge form factor multiplying the covariant* $\bar{u}(\vec{p}')\left[\gamma^\mu - q^\mu (m_i-m_f)/q^2\right] u(\vec{p})$ and $b_{fi}^{I+}(q^2)$ is the form factor multiplying the covariant $[q^\mu/q^2]\,\bar{u}(\vec{p}')\,u(\vec{p})$.

The constants $a_{fi}^{I+}(0)$ may be taken from the isospin symmetry limit. Corrections to it are of order e^2 and therefore negligible. We thus have $a_{pn}^{I+}(0)=1=a_{K^+K^0}^{I+}(0)$, $a_{\Sigma^0\Sigma^-}^{I+}(0)=\sqrt{2}$, etc. Hence the mass difference is solely determined by $b_{fi}^{I+}(0)$. In the dispersion relation for $b_{fi}^{I+}(q^2)$ the intermediate hadron states must have the quantum numbers spin-parity 0^+ and isospin 1 with G-parity -1 or isospin 2 with $G=+1$. The latter contribute to the $\Delta I=2$ mass differences, e.g. to $\pi_\pm^2-\pi_0^2$ and $(\Sigma_- - \Sigma_0)-(\Sigma_0-\Sigma_+)$. These properties are evident from the divergence equation[9]

$$D_{I+}(x)=\frac{e}{2}\left\{J_+^\mu(x)\,A_\mu(x)+A_\mu(x)\,J_+^\mu(x)\right\} \tag{9}$$

if the electromagnetic vector potential $A_\mu(x)$ is expressed by the electromagnetic current.

0^+-states with $I=1$ and $G=-1$ occur, for example, in the 5π-, $\eta\pi$- and $K\bar{K}$-system. Experimentally[10], an enhancement $\pi_V(1003)$ near the $K\bar{K}$-threshold has been observed. However, it is unlikely that this resonance dominates the dispersion relation to an extent comparable to the pion dominance of the divergence of the axial vector.

The isospin current and the electromagnetic current operator appearing on the right hand side of Eq. (9) are supposed to obey the algebra of $SU(3)$ and are therefore members of an octet. Thus the divergence decomposes into an octet and a 27-plet only, since the **10** and $\overline{\mathbf{10}}$ part cannot occur in the neccessarily symmetric expression (9). From Eqs. (8) and (9) we immediately obtain the Coleman-Glashow relation[11]

$$(\Xi_- - \Xi_0)+(n-p)=(\Sigma_- - \Sigma_+) \tag{10}$$

which is correct within the experimental errors.

---

* Eq. (8) does not imply that mass formulas for spin $\frac{1}{2}$ particles are neccessarily linear in the masses. A different choice of covariants gives a formula of type (7).

[9] Nauenberg, M.: Phys. Letters **22**, 201 (1966). — Veltman, M.: Phys. Rev. Letters **17**, 553 (1966).

[10] Rosenfeld, A. H., A. Barbaro-Galtieri, W. J. Podolsky, L. R. Price, P. Soding, C. G. Wohl, M. Roos, and W. J. Willis: UCRL-8030, Pt. I, Jan. 1967 revision, submitted to Revs. Mod. Phys. and lit. cit. there.

[11] Coleman, S., and S. L. Glashow: Phys. Rev. Letters **6**, 423 (1961).

The π_V-resonance is most likely to be part of an $SU(3)$-octet. If, in addition, the remaining transition amplitudes in the 0^+-channel were mainly octet, the form factor $b^I_{fi}{}^+(q^2)$ would have the same property: the particle states f and i are coupled to the I_+-member of an octet. The magnitude of the $\Delta I=2$ mass differences shows that this is only roughly true.

Next we extend our consideration to the strangeness changing part of the weak current $S^\mu_+(x)$ which has non-vanishing matrix elements between e.g. Λ and proton.

As in Eq. (5) we define

$$D_{V_+}(x)=i\frac{\partial}{\partial x^\mu}S^\mu_+(x). \tag{11}$$

The corresponding form factor $b^V_{fi}{}^+(q^2)$ determines, in this case, the mass difference between particles which differ not only in charge, but also in hypercharge, by one unit. For example

$$b^V_{p\Lambda}{}^+(0)=(\Lambda-p)\,a^V_{p\Lambda}{}^+(0). \tag{12}$$

In this case the charge-type form factor $a^V_{fi}{}^+(0)$ may be taken from the $SU(3)$-symmetry limit, e.g. $a^V_{p\Lambda}{}^+(0)=\sqrt{3/2}$, $a^V_{\Xi^0\Sigma^-}{}^+(0)=1/\sqrt{2}=a^V_{\pi^0 K^-}{}^+(0)$, etc. The corrections to these numbers are quadratic in the $SU(3)$ breaking interaction according to the Ademollo-Gatto theorem[12].

The divergence D_{V_+} can also be decomposed into tensor operator components which are irreducible under $SU(3)$. Since a counterpart to Eq. (9) is not known there is no *a priori* reason to stop with the **27**. If only the **8** is retained the wellknown Gell-Mann-Okubo mass formulae result which, at least for the baryons, are very well satisfied by the actual masses.

Between states at rest the divergence of the current is proportional to the commutator of the Hamiltonian with the appropriate charge. Thus octet dominance for the divergence is the same as octet dominance for the mass splitting Hamiltonian. However, the use of divergences for deriving mass formulae has the advantage of being explicitly covariant. What is more important, the perturbation of the coupling constants rather than of the Hamiltonian must be small for the mass formulae to be valid.

Before discussing the dominance of octets let us state that the octet parts in D_{I_+} and in D_{V_+} are not neccessarily related: they are different components of *a priori different* octet operators. These operators would be proportional to each other if an octet of scalar particles were to dominate the dispersion relation. Such an assumption is made in the tadpole

[12] Ademollo, M., and R. Gatto: Phys. Rev. Letters **13**, 264 (1964). — Fubini, S., and G. Furlan: Physics **1**, 229 (1965).

model[13]. However, even if a 0^+-enhancement K_V, as $SU(3)$-partner of the π_V-resonance, exists there will be certainly large background contributions.

One of the significant features of the observed mass spectrum is that the ratio between **27** and **8** for the electromagnetic mass splittings is roughly ten times as big as for the strong mass differences. A plausible argument for this behaviour, is the following: In a model using hypothetical quark fields the electromagnetic interaction Lagrangian is a product of four fields. By Wick-ordering such an interaction splits naturally into two parts: a self-interaction of the quarks and an interaction between two different quarks. The former contains only two quark fields and obviously has the transformation properties of $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3}$, i.e. of a singlet and an octet. The Coulomb interaction between different quarks transforms as **1**, **8**, and **27**. The strong mass splitting interaction probably shows a similar behaviour, i.e. it also splits into an interaction of a quark with itself and one with the other quarks involved. Since the strong mass splitting interaction will be of short range one expects the interaction between different quarks to be less important relative to the self-interaction as compared with the Coulomb case where the forces are of long range. This is possibly the reason for the very small **27**/**8**-ratio in the strong mass splittings compared to the already small **27**/**8**-ratio in the electromagnetic mass splittings. We therefore approximate the divergence D_{V_+} of the strangeness changing current by its self-energy part which shows pure octet behaviour. According to this argument we may write*

$$\begin{aligned} D_{V_+} &\cong (D^8_{V_+})_{\text{self}} \\ D_{I_+} &= (D^8_{I_+})_{\text{self}} + (D^8_{I_+} + D^{27}_{I_+})_{\text{int}} . \end{aligned} \tag{13}$$

The suffix "*self*" denotes the self-energy and "*int*" the two-quark interaction part.

In the quark field description the self-energy contribution has, in a local approximation, the following structure

$$\begin{aligned} (D_{V_+})_{\text{self}} &\cong C_V (\psi^*(x)\, \gamma_0\, V_+\, \psi(x)) \\ (D_{I_+})_{\text{self}} &\cong \frac{e^2}{4\pi}\, C_I (\psi^*(x)\, \gamma_0\, I_+\, \psi(x)) \end{aligned} \tag{14}$$

where $\psi(x)$ denotes the *interacting* quark field**. The space integrals of these scalar densities are not conserved. Matrix elements of them will therefore have both *f*- and *d*-coupling. Nevertheless, if the scalar den-

* There is an additional small contribution to D_{V_+} due to the electromagnetic interaction which we neglect, however, because it is smaller than the already neglected many-quark interaction part in the strangeness changing divergence.

** I_+ and V_+ are (3×3)-matrices corresponding to the iso- and V-spin operators of $SU(3)$.

[13] COLEMAN, S., and S. L. GLASHOW: Phys. Rev. **134**, B 671 (1964).

sities[14] $(D)_{\text{self}}$ are indeed of the form (14) one might expect an approximately universal coupling of these operators to the hadrons. A universal coupling is plausible since the commutator of two space-integrated densities is a generator of $SU(3)$ and the one-particle matrix elements of (14) presumably give the main contributions to the corresponding sum rule.

For illustration: strict universality would be realized in a naive quark model where the particles are composed of quarks at rest. The space-integrated scalar densities then act as $SU(3)$-generators on baryons and the d/f-ratio would be zero. In applying the operators (14) to mesons γ_0 can be replaced by its eigenvalues, i.e. $+1$ for quarks and -1 for antiquarks.

Incidentally let us point out that the self-interaction part as described in Eqs. (14) cannot be the only contribution to the divergences. Commutation relations $[\int D_\alpha(x)\, d^3x, \int D_\beta(x)\, d^3x] = i f^\gamma_{\alpha\beta} F_\gamma$, etc. would lead to too simple a time dependence (oscillatory) of the $SU(3)$-generators F_γ.

From Eqs. (14) it is obvious that $(D_{I_+})_{\text{self}}$ and $(D_{V_+})_{\text{self}}$ are members of one and the same octet operator. This means that the matrix elements of them between baryon states have the same d/f-ratio. Unfortunately, we cannot directly compare the d/f-ratios for the electromagnetic and strong mass splitting because an additional octet is contained in the remaining electromagnetic term in Eq. (13).

To get an idea about the transformation properties of these additional contributions we use the quark model in its simplest form, for this purpose. They are small and a rough picture will be sufficient. The $SU(3)$-structure of the interaction between different quarks then is, in the baryon case, described by

$$h\, \bar{B}^{ABC}\, Q^{A'}_{A}\, Q^{B'}_{B}\, B_{A'B'C} \tag{15}$$

where B_{ABC} denotes the 56 baryon states and Q^B_A is the charge matrix[15]. These additional contributions by themselves must clearly fulfill the Coleman-Glashow relation, Eq. (10)*. For mesons we take

$$h\, M^{+B}_{A}\, Q^{C}_{B}\, Q^{A}_{D}\, M^{D}_{C}. \tag{16}$$

The specific form for the interaction between two different quarks[16] introduces a parameter h. We take it to be the same for the baryons and

* The so-called non-tadpole contribution of COLEMAN and SCHNITZER[4] should roughly have the same property.

[14] In another context CABIBBO, N., L. HORWITZ, and Y. NE'EMAN: Phys. Letters **22**, 336 (1966) have made use of scalar densities.

[15] The notation is the same as in DOSCH, H. G., and B. STECH: Z. Physik **189**, 455 (1966).

[16] Our approach differs from that of FEDERMAN, P., H. R. RUBINSTEIN, and I. TALMI: Phys. Letters **22**, 208 (1966). — RUBINSTEIN, H. R.: Phys. Rev. Letters **17**, 41 (1966). — RUBINSTEIN, H. R., F. SCHECK, and R. H. SOCOLOW: Freiburg-preprint, to be published in Phys. Rev. in the following: we are forced to allow for f- and d-coupling in the self-energy part and took the two-quark electromagnetic interaction amplitude proportional to the product of the quark charges.

mesons since these particles are believed to have nearly equal size. The neglection of magnetic interactions is doubtful at least for the electromagnetic mass differences of π- and ρ-mesons*. We leave these two mass differences out of the discussion also because the roughly treated interaction part is here no more a correction but responsible for the full mass splitting.

Using the above arguments we arrive at expressions for the $\Delta Q=1$ mass differences. We display them for the baryon octet and decuplet and for the 0^-- and 1^--mesons. To describe the coupling of the scalar densities to the decuplet we introduce the symbol g. Correspondingly d' and d'' shall denote the coupling constants, with dimension $[m^2]$, of the pseudoscalar and vector meson octet, respectively ($\alpha=e^2/4\pi$):

$$\left.\begin{aligned} \Xi-\Sigma&=C_V(f+d)\\ \Sigma-N&=C_V(f-d)\\ \Xi-\Lambda&=C_V(f-\tfrac{1}{3}d)\\ \Lambda-N&=C_V(f+\tfrac{1}{3}d), \end{aligned}\right\} \tag{17$_V$}$$

$$\left.\begin{aligned} n-p&=\alpha C_I(f+d-h)\\ \Xi_--\Xi_0&=\alpha C_I(f-d+2h)\\ \Sigma_--\Sigma_0&=\alpha C_I(f+2h)\\ \Sigma_0-\Sigma_+&=\alpha C_I(f-h), \end{aligned}\right\} \tag{17$_I$}$$

$$\Omega_--\overset{*}{\Xi}=\overset{*}{\Xi}-\overset{*}{Y}=\overset{*}{Y}-\overset{*}{N}=C_V g, \tag{18$_V$}$$

$$\left.\begin{aligned} \overset{*}{\Xi}_--\overset{*}{\Xi}_0=\overset{*}{Y}_--\overset{*}{Y}_0=\overset{*}{N}_--\overset{*}{N}_0&=\alpha C_I(g+2h)\\ \overset{*}{Y}_0-\overset{*}{Y}_+=\overset{*}{N}_0-\overset{*}{N}_+&=\alpha C_I(g-h)\\ \overset{*}{N}_+-\overset{*}{N}_{++}&=\alpha C_I(g-4h), \end{aligned}\right\} \tag{18$_I$}$$

$$K^2-\pi^2=3(\eta^2-K^2)=C_V d', \tag{19$_V$}$$

$$K_0^2-K_\pm^2=\alpha C_I(d'-2Kh) \tag{19$_I$}$$

$$\overset{*}{K}^2-\rho^2=\overset{*}{K}^2-\omega^2=\varphi^2-\overset{*}{K}^2=C_V d'', \tag{20$_V$}$$

$$\overset{*}{K}_0^2-\overset{*}{K}_\pm^2=\alpha C_I(d''-2\overset{*}{K}h) \tag{20$_I$}$$

* The π^0-self-mass receives a negative contribution from the large $\pi^0-\omega^0$ magnetic transition form factor[4]. The ρ^0 can undergo virtual annihilation processes.

Obviously these formulae comprise many of the mass formulae well-known from the literature. One of the specific points of our approach is the possibility to compare the d/f-ratio of the strong and electromagnetic mass differences. A least square fit gives $d/f=-0.33$ from Eqs. (17_V) and $d/f=-0.46$ from Eqs. (17_I). Since the d/f-ratios are rather sensitive quantities their near equality gives support to our ansatz (13) and (14).

The ratio $h/f=0.17$ measuring the relative importance of mutual and self-interaction produced by the Coulomb force is small, as expected. Moreover, the sign of $C_I h$, predicted to be positive is correct. Therefore the naive quark model used for this term seems to be sufficient. In any case all mass formulae are improved by including $(D_{I+})_{\text{int}}$ which produces non-vanishing $\Delta I=2$ mass differences. For the baryon decuplet and meson octets the corresponding ratios are small as well: $h/g=0.17$ $2Kh/d'=0.13$ and $2\overset{*}{K}h/d''=0.15$.

A connection between the mass splittings of various $SU(3)$-multiplets is achieved by calculating the ratio $C_I/C_V(\simeq 2.8)$ for each multiplet. We immediately obtain so-called *hybrid* mass formulae like

$$\frac{(\overset{*}{\Xi}_- - \overset{*}{\Xi}_0)+(\overset{*}{Y}_- - \overset{*}{Y}_+)+(\overset{*}{N}_- - \overset{*}{N}_{++})}{6(\overset{*}{Y}_+ - \overset{*}{N}_{++})} = \frac{2}{3}\,\frac{(\Sigma_- - \Sigma_+)+(\Sigma_0 - \Sigma_+)}{\Xi_- - p}$$
$$= \frac{(K_0^2 - K_\pm^2)+\frac{2}{3}K\xi}{K_\pm^2 - \pi_0^2} = \frac{(\overset{*}{K}_0^2 - \overset{*}{K}_\pm^2)+\frac{2}{3}\overset{*}{K}\xi}{\overset{*}{K}_\pm^2 - \rho_0^2}. \tag{21}$$

where ξ represents the Coulomb interaction part $3\alpha C_I h$ which may be taken e.g. from Eqs. (17_I): $\xi=(\Sigma_- - \Sigma_0)-(\Sigma_0 - \Sigma_+)$. The first relation connecting the two baryon multiplets is valid to about 9%. Somewhat more interesting are those equalities in (21) which compare $1/2^+$- and $3/2^+$-baryon with 0^--meson mass differences. They are valid to an accuracy of 6% and 4%, respectively. Eq. (21) and similar mass relations are in agreement with the empricial rule[17] that in each isomultiplet the more negative (positive) the charge of a particle (antiparticle) the haevier it is.

In spite of the appearance of some d-coupling for the baryons a certain amount of universality is observed as expected. The ratio g/f which compares the strength of the octet and decuplet self-energy couplings is about 0.8. This number should be unity if the scalar densities of Eq. (14) would coincide with the appropriate $SU(3)$ generators. Also in the meson

[17] HEFFT, K.: Diss. Univ. Heidelberg 1966. Of course, this rule is not applicable to an isomultiplet which contains a particle and its antiparticle unless π^-, ρ^-, etc. are arbitrarily defined to be the particles.

case the ratio $C_V\, d''\mu/C_V\, d'\mu^* \simeq 0.5 \ldots 0.6$ (with averege meson masses μ and μ^*) is not too far from unity.

Strict universality between e.g. $\frac{1}{2}^+$- baryons and 0^-- mesons means

$$2\mu f/d' = 1 \tag{22}$$

as can be deduced by combining Eqs. (6), its analog for the baryons and (14). Here μ is an average pseudoscalar meson mass. The experimental number for the above ratio 0.7...0.9 (with $\mu \simeq 400$ MeV) is indeed close to unity. The universality property found seems quite remarkable. It implies that the strong mass splittings considered here are roughly given by just two numbers: $C_V f$ and d/f. To estimate the electromagnetic mass differences one needs two additional parameters $C_I f$ and $C_I h$ where the latter quantity is not an arbitrary constant but reflects the Coulomb force in sign and magnitude.

The mass formulae presented here combine symmetry and structure effects. Since the structure effects are treated only in a rough way one should not expect too good an accuracy. Especially too much significance should not be attached to the precise values of the small quantities d and h. Nevertheless, we believe that it is important to consider the mass differences in connection with the observable currents. One has definite ideas about the $SU(3)$-behaviour of currents whereas there are uncontrolled corrections to other quantities.

Another way of using the divergences of the vector current is by looking at transition matrix elements of the type $\langle \Lambda | D_{I_+} | \Sigma^- \rangle$. In these cases the charge form factor $a(0)$ would be zero without symmetry breaking. The formula corresponding to (8),

$$a^{I_+}_{\Lambda\Sigma^-}(0) = \frac{b^{I_+}_{\Lambda\Sigma^-}(0)}{\Sigma_- - \Lambda}$$

therefore gives the deviation of $a^{I_+}_{\Lambda\Sigma^-}(0)$ from zero to order e^2. Unfortunately, the value $a^{I_+}_{\Lambda\Sigma^-}(0)$, as predicted from this equation, cannot be measured at present.

The above approach to the problem of mass differences may be extended further, even to the leptons. We just have to add the $e - \nu_e$ current to the strangness conserving hadron current and the $\mu - \nu_\mu$ part to the strangeness changing hadron current. Surprisingly, it turns out that the coupling of the leptons to the divergences agrees roughly with an extended universality: the lepton mass values obtained from the strong and electromagnetic splitting between hadron masses are of the correct order of magnitude. Here we will not pursue further this more speculative point.

It is a pleasure to acknowledge profitable discussions with many members of the institute. We thank especially Dr. P. Hertel for much help and constructive criticism.

Zeitschrift für Physik 202, 525–542 (1967)

Sum Rules in Perturbation Theory

G. KRAMER
Physikalisches Staatsinstitut
II. Institut für Experimentalphysik, Hamburg

K. MEETZ
II. Institut für Theoretische Physik, Universität Hamburg

Received April 7, 1967

Sum rules derived from isospin current algebra are examined in perturbation theory for nucleons interacting with neutral pseudoscalar mesons and isovector pions. It is shown that the well-known sum rules for electromagnetic isovector form factors of nucleons and pions are correct in zero and second order of the meson-nucleon coupling constant.

I. Introduction

Sum rules have been derived by FUBINI *et al.*[1] from the assumptions:

a) The commutation relations of the current algebra hold,

b) The dispersion relations for the retarded invariant amplitudes of the matrix element considered are unsubtracted.

It is the purpose of this paper to examine these assumptions in perturbation theory. Because a proper definition of a renormalized current operator can be given only for a conserved current, we discuss the isotopic spin current $j_{\mu,\alpha}$ ($\alpha=1,2,3$) in meson-nucleon interaction.

We consider the matrix element of the retarded product of two isospin currents between one-particle states of equal momentum,

$$R_{\mu\nu,\alpha\beta}=i\int d^4x\, e^{iqx}(2\pi)^3\langle p|\, R\big(j_{\mu,\alpha}(x)\, j_{\nu,\beta}(0)\big)\,|p\rangle\,. \qquad (1.1)$$

In order to remove vacuum contributions we define (1.1) as the limit of the corresponding non-forward matrix element. Actually it is more convenient in perturbation theory to do the calculations for the time-ordered matrix element

$$T_{\mu\nu,\alpha\beta}=i\int d^4x\, e^{iqx}(2\pi)^3\langle p|\, T\big(j_{\mu,\alpha}(x)\, j_{\nu\beta}(0)\big)\,|p\rangle\,, \qquad (1.2)$$

from which the retarded quantity can be easily obtained.

The matrix elements (1.1) and (1.2) can be related to the matrix element of the equal time commutator, if the naive definition

$$\langle p|\, R\big(j_{\mu,\alpha}(x)\, j_{\nu\beta}(0)\big)\,|p\rangle=\theta(x_0)\langle p|\,[j_{\mu,\alpha}(x), j_{\nu\beta}(0)]\,|p\rangle \qquad (1.3)$$

[1] FUBINI, S., G. FURLAN, and C. ROSSETTI: Nuovo cimento **40**, A 1171 (1965).

applies for the retarded product, or

$$\begin{aligned}&\langle p|\, T(j_{\mu,\alpha}(x)\, j_{\nu\beta}(0))\,|p\rangle\\&=\theta(x_0)\langle p|\, j_{\mu,\alpha}(x)\, j_{\nu,\beta}(0)\,|p\rangle+\theta(-x_0)\langle p|\, j_{\nu,\beta}(0)\, j_{\mu,\alpha}(x)\,|p\rangle\end{aligned}\tag{1.4}$$

for the time-ordered product respectively. We then find e.g.

$$\begin{aligned}-q^\mu T_{\mu\nu,\alpha\beta}&=\int d^4x\, e^{iqx}\,\partial^\mu\langle q|\, T(j_{\mu,\alpha}(x)\, j_{\nu,\beta}(0))\,|p\rangle(2\pi)^3\\&=\int d^4x\, e^{iqx}\,\delta(x_0)\langle p|\,[j_{0,\alpha}(x), j_{\nu\beta}(0)]\,|p\rangle(2\pi)^3.\end{aligned}\tag{1.5}$$

The same relation holds for $R_{\mu\nu,\alpha\beta}$.

It is the basic assumption of current algebra that the part antisymmetric in α, β of an equal time commutator does exist and can be evaluated by application of the equal time commutation relations of free field currents. The isotopic spin currents of a free pion field ϕ and a free nucleon field ψ are:

$$\text{pions:}\qquad j_{\mu,\alpha}=i:\phi\, t_\alpha\,\partial_\mu\phi:,\tag{1.6a}$$

$$\text{nucleons:}\quad j_{\mu,\alpha}=:\bar{\psi}\,\gamma_\mu\,\frac{\tau_\alpha}{2}\,\psi:;\tag{1.6b}$$

where

$$(t_\alpha)_{\rho\sigma}=i\,\varepsilon_{\rho\alpha\sigma}\qquad \rho,\sigma=1,2,3.\tag{1.7}$$

The currents (1.6) satisfy the equal time commutation relations:

$$\begin{aligned}\text{pions:}\quad&[j_{0,\alpha}(\boldsymbol{x},0), j_{\nu\beta}(0)]-\langle 0|\,[j_{0,\alpha}(\boldsymbol{x},0), j_{\nu,\beta}(0)]\,|0\rangle\\&=i\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, j_{\nu,\gamma}(0)\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})+\\&\quad+\delta^k_\nu\,\partial_k\left(\frac{i}{2}:\phi(0)\,[t_\alpha,t_\beta]_+\,\phi(0):\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})\right),\\&\qquad(k=1,2,3),\end{aligned}\tag{1.8a}$$

$$\begin{aligned}\text{nucleons:}\quad&[j_{0,\alpha}(\boldsymbol{x},0), j_{\nu,\beta}(0)]-\langle 0|\,[j_{0,\alpha}(\boldsymbol{x},0), j_{\nu,\beta}(0)]\,|0\rangle\\&=i\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, j_{\nu,\gamma}(0)\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}).\end{aligned}\tag{1.8b}$$

The combination of (1.5) and (1.8) leads to the conditions for the matrix element (1.1) or (1.2) implied by assumption *a*. The resulting relations correspond to the well-known Ward-Takahashi identity in quantum electrodynamics[2,3].

In Sect. II we discuss the polarization averaged matrix elements (1.1) and (1.2) between one-nucleon states of equal polarization r in second order of the meson-nucleon-coupling constant g. In order to reduce

[2] TAKAHASHI, Y.: Nuovo cimento **6**, 370 (1957).
[3] KAZES, E.: Nuovo cimento **13**, 1226 (1959).

calculational work we consider an interaction of nucleons with neutral pseudoscalar mesons, where only the nucleons carry isospin. Hence we obtain from (1.5) and (1.8b)

$$-q^{\mu} T_{\mu\nu,\alpha\beta} = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \tfrac{1}{2} \sum_{r} \langle p,r | j_{\nu,\gamma}(0) | p,r \rangle (2\pi)^3. \tag{1.9}$$

It is shown in Sect. II that the relation (1.9) holds in zero and second order, and there is little doubt that it holds in every order. This is by no means trivial, because it implies that the matrix elements (1.1) and (1.2) exist and that the definition (1.4) of the time-ordered product is correct for the sum of all Feynman graphs of a definite order.

Let us now recall, how the sum rules follow from (1.9)[4,5]. If we decompose the matrix element in the isotopic spin space of the nucleon,

$$T_{\mu\nu,\alpha\beta} = {}^{(+)}T_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} + {}^{(-)}T_{\mu\nu}\tfrac{1}{2}[\tau_{\alpha},\tau_{\beta}], \tag{1.10}$$

each of the coefficients is a tensor and may be written as

$${}^{(\pm)}T_{\mu\nu} = {}^{(\pm)}T_1\, p_{\mu}p_{\nu} + {}^{(\pm)}T_2\, q_{\mu}q_{\nu} + {}^{(\pm)}T_3\, g_{\mu\nu} + {}^{(\pm)}T_4(p_{\mu}q_{\nu} + q_{\mu}p_{\nu}). \tag{1.11}$$

From (1.9) we obtain the following relations for ${}^{(-)}T_i$ $(i=1,2,3,4)$:

$$\begin{aligned} pq\,{}^{(-)}T_1 + q^2\,{}^{(-)}T_4 &= -1 \\ q^2\,{}^{(-)}T_2 + {}^{(-)}T_3 + pq\,{}^{(-)}T_4 &= 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

The same relations hold of course for the amplitudes ${}^{(-)}R_i$ $(i=1,\ldots,4)$. If we now assume unsubtracted dispersion relations for ${}^{(-)}R_i$ $(i=1,\ldots,4)$ (assumption b),

$${}^{(-)}R_i(\nu,q^2) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu' \frac{A_i(\nu',q^2)}{\nu'-\nu-i\varepsilon}; \qquad q^2<0,\ \nu=pq,\ i=1,\ldots,4 \tag{1.13}$$

and observe the relations between the A_i implied by current conservation, we arrive at the sum rules[5]:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} d\nu\, {}^{(-)}A_1(\nu,q^2) = 1 \\ &\int_{-\infty}^{\infty} d\nu\, {}^{(-)}A_4(\nu,q^2) = 0. \end{aligned} \qquad \text{for} \quad q^2<0 \tag{1.14}$$

The latter is trivial, because it follows from crossing symmetry. The first is shown to be valid in zero and second order of g in Sect. II.

In Sect. III we turn to the more realistic model of nucleons interacting with isovector pions and consider the matrix elements (1.1) and

[4] Fubini, S.: Nuovo cimento **43**, A 475 (1966).
[5] Kramer, G., and K. Meetz: DESY 66/8 (1966).

(1.2) between one-pion states of equal momentum p. The decomposition in the isotopic spin space of the pion reads

$$T_{\mu\nu,\alpha\beta}={}^{(0)}T_{\mu\nu}\,2\delta_{\alpha\beta}+{}^{(+)}T_{\mu\nu}\,2[t_\alpha,t_\beta]_+ +{}^{(-)}T_{\mu\nu}\,2[t_\alpha,t_\beta]_-\,. \quad (1.15)$$

Now nucleons and pions carry isospin and the total isotopic spin current is the sum of (1.6a) and (1.6b). Combination of (1.5) and (1.8) yields the relation

$$\begin{aligned}-q^\mu T_{\mu\nu,\alpha\beta}=i\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\langle p|\,j_{\nu,\gamma}(0)\,|p\rangle\,(2\pi)^3+\\ +\delta^k_\nu\,q_k\langle p|:\phi(0)\,\tfrac{1}{2}[t_\alpha,t_\beta]_+\,\phi(0):|p\rangle\,(2\pi)^3.\end{aligned} \quad (1.16)$$

It differs from (1.9) by the second term on the $r\,h\,s$ that is symmetric in α, β. Thus only the antisymmetric part can be supposed to satisfy (1.9)

$$-q^\mu\,{}^{(-)}T_{\mu\nu}\,2[t_\alpha,t_\beta]_-=i\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\langle p|\,j_{\nu,\gamma}(0)\,|p\rangle\,(2\pi)^3. \quad (1.17)$$

We show in Sect. III that (1.17) holds in zero and second order of g. This is also true for the sum rules (1.14). However, the situation is entirely different for the symmetric parts. Here a deviation from (1.16) already occurs in zero order, due to the principal indefiniteness of the time-ordered product, i.e. the symmetric part of the zero order contribution does not agree with the definition (1.4). In second order, we encounter divergent contributions to the symmetric parts that cannot be renormalized. Therefore they do not exist and no sum rules emerge from the symmetric parts of the relation (1.16), in contrast to the model discussed in Sect. II, where the symmetric parts exist as well. But it is remarkable that the Ward-Takahashi-like identities (1.9) and (1.16) and the sum rules (1.14) are correct for that part of the matrix element, for which they have been anticipated, namely the antisymmetric.

II. Nucleons and Neutral Mesons

Our first example is a theory of interacting nucleons and neutral pseudoscalar mesons with the interaction Lagrangian

$$\mathscr{L}_I=g:\bar\psi\,\gamma_5\,\psi\,\phi:+\delta m:\bar\psi\,\psi:+\tfrac{1}{2}\,\delta\mu^2:\phi^2:, \quad (2.1)$$

where ψ, ϕ are the unrenormalized field operators of nucleons and mesons respectively. Because only the nucleons carry isospin, the isotopic spin current density is given by

$$j_{\mu,\alpha}=:\bar\psi\,\gamma_\mu\,\frac{\tau_\alpha}{2}\,\psi: \qquad \alpha=1,2,3\,. \quad (2.2)$$

We first make some remarks on the vacuum expectation value

$$F_{\mu\nu,\alpha\beta}(q)=i\int d^4x\,e^{iqx}\langle 0|\,T(j_{\mu,\alpha}(x)\,j_{\nu\beta}(0))\,|0\rangle\,. \quad (2.3)$$

From the definition (1.4) of the time-ordered product, we obtain in zero order of g

$$F^{(0)}_{\mu\nu}(q)=\left\{(q_\mu q_\nu-q^2 g_{\mu\nu})\left[C_1+q^2\int\limits_{4m^2}^{\infty} ds\,\frac{\rho(s)}{s(s-q^2-i\varepsilon)}\right]+\right.$$
$$\left.+g_{k\mu}g_{k\nu}C_2\right\}\mathrm{Sp}\left(\frac{\tau_\alpha}{2}\frac{\tau_\beta}{2}\right);\quad k=1,2,3, \tag{2.4}$$

where

$$\rho(s)=\frac{1}{12\pi^2}\left(1+\frac{2m^2}{s}\right)\left(1-\frac{4m^2}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.5}$$

and C_1, C_2 are divergent constants,

$$C_1=\int\limits_{4m^2}^{\infty} ds\,\frac{\rho(s)}{s};\quad C_2=\int\limits_{4m^2}^{\infty} ds\,\rho(s). \tag{2.6}$$

Besides the trace factor the $r\,h\,s$ of Eq. (2.4) is identical with the lowest order of the vacuum expectation value of time-ordered electromagnetic currents in quantum electrodynamics (QED). Because of the Schwinger term $g_{k\mu}g_{k\nu}C_2$ [6], $F^{(0)}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ is not conserved,

$$q^\mu F^{(0)}_{\mu\nu,\alpha\beta}=q^\mu g_{k\mu}g_{k\nu}C_2. \tag{2.7}$$

This difficulty can be overcome in QED by a suitable redefinition of the electromagnetic current as the local limit of a gauge invariant non-local expression that depends on the electromagnetic potential and does not give rise to a Schwinger term [7]. A similar argument does not apply in our case, because there is no corresponding vector field. By the same reason the constant C_1 which is equal to $(1-Z_3)/e^2$ in QED, cannot be removed by adding a counter term to the Lagrangian (2.1).

Therefore, the vacuum expectation value (2.3) cannot be given a meaning within our model besides by a redefinition of the time-ordered product that absorbs the divergent local term

$$C_1(\Box g_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\nu)\,\delta(x)+C_2\,g_{k\mu}g_{k\nu}\delta(x).$$

We shall encounter a similar situation in Sect. III.

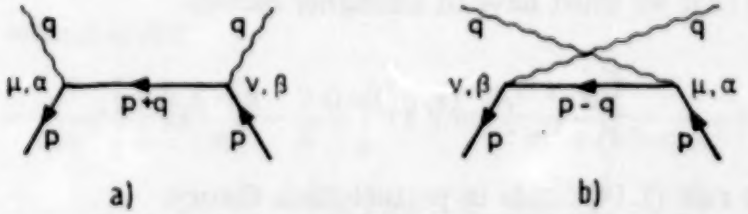


Fig. 1. Feynman graphs for the nucleon matrix element in zero order

[6] SCHWINGER, J.: Phys. Rev. Letters **3**, 296 (1959).
[7] JOHNSON, K.: Nuclear Phys. **25**, 431 (1961).

We now turn to the matrix element $T_{\mu\nu,\alpha\beta}$ (1.2). The Feynman graphs of Fig. 1 give the contributions in zero order

$$T^{(0)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2}\sum_r \bar{u}^{(r)}(p)\left\{\gamma_\mu \frac{\tau_\alpha}{2}\frac{1}{\gamma(p+q)-m}\gamma_\nu\frac{\tau_\beta}{2} + \right.$$
$$\left. +\gamma_\nu\frac{\tau_\beta}{2}\frac{1}{\gamma(p-q)-m}\gamma_\mu\frac{\tau_\alpha}{2}\right\}u^{(r)}(p)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\{\gamma_\mu(\gamma(p+q)+m)\gamma_\nu(\gamma p+m)\}\frac{1}{m^2-(p+q)^2-i\varepsilon}\frac{\tau_\alpha}{2}\frac{\tau_\beta}{2}+ \tag{2.8}$$
$$+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\{\gamma_\nu(\gamma(p-q)+m)\gamma_\mu(\gamma p+m)\}\frac{1}{m^2-(p-q)^2-i\varepsilon}\frac{\tau_\beta}{2}\frac{\tau_\alpha}{2}$$

(we use the normalization $\bar{u}u=2m$).

The identity (1.9) is satisfied by (2.8) in zero order

$$-q^\mu T^{(0)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\tfrac{1}{2}\sum_r \bar{u}^{(r)}\gamma_\nu\frac{\tau_\gamma}{2}u^{(r)}. \tag{2.9}$$

On the other hand, we obtain from (2.8) the invariant amplitudes

$${}^{(\pm)}T^{(0)}_1 = \frac{1}{m^2-(p+q)^2-i\varepsilon}\pm\frac{1}{m^2-(p-q)^2-i\varepsilon} \tag{2.10}$$

and similar expressions for ${}^{(\pm)}T^{(0)}_i$ $(i=2,3,4)$. For $q^2<0$ the corresponding retarded amplitudes, e.g.

$${}^{(\pm)}R^{(0)}_1 = \frac{1}{m^2-(p+q)^2-i\varepsilon(p+q)}\pm\frac{1}{m^2-(p-q)^2+i\varepsilon(p-q)}, \tag{2.11}$$

have the analytic properties required in I and the sum rule (1.14) is valid in zero order

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\nu\,{}^{(-)}A^{(0)}_1(\nu,q^2)=1. \tag{2.12}$$

It follows that we must have in all higher orders

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\nu\,{}^{(-)}A^{(n)}_1(\nu,q^2)=0 \qquad n=2,4,\ldots, \tag{2.13}$$

if the sum rule (1.14) holds in perturbation theory.

The derivation of the sum rule in Sect. I was based on the assumptions (1.9) and (1.13), which we now discuss in second order of g. The contributions to the *r h s* of (1.9) are given by the Feynman graphs of Fig. 2

and can be written as

$$(2\pi)^3 \langle p, r | j^{(2)}_{\nu,\gamma}(0) | p, r\rangle$$

$$= \bar{u}^{(r)}(p)\left\{\Lambda^{(2)}_\nu(p,p) + \frac{1}{2}\left(\frac{i}{(2\pi)^4}\Sigma^{(2)}(p) - \delta m\right)\frac{1}{\gamma p - m}\gamma_\nu + \right. \tag{2.14}$$

$$\left. + \frac{1}{2}\gamma_\nu \frac{1}{\gamma p - m}\left(\frac{i}{(2\pi)^4}\Sigma^{(2)}(p) - \delta m\right)\right\}\frac{\tau_\gamma}{2}u^{(r)}(p).$$

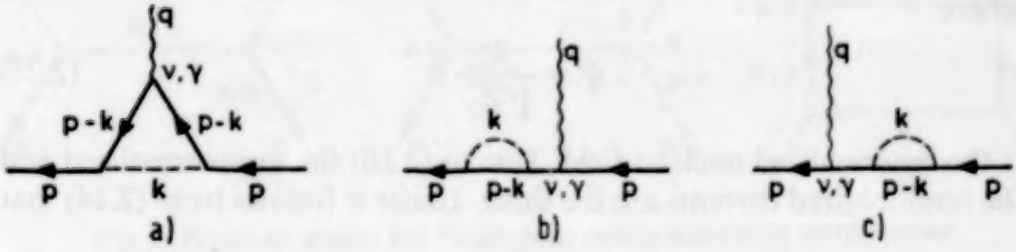


Fig. 2. Feynman graphs for the nucleon vertex in second order

Here we have defined

$$\Sigma^{(2)}(p\sum^{(2)}_{(p+q)}) = g^2 \int d^4k\, \gamma_5 \frac{\gamma(p+q-k)+m}{(p+q-k)^2-m^2}\gamma_5 \frac{1}{k^2-\mu^2}, \tag{2.15}$$

$$\Lambda^{(2)}_\nu(p+q,p) = \frac{ig^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \gamma_5 \frac{\gamma(p+q-k)+m}{(p+q-k)^2-m^2}\gamma_\nu \frac{\gamma(p-k)+m}{(p-k)^2-m^2}\times \tag{2.16}$$

$$\times \gamma_5 \frac{1}{k^2-\mu^2}.$$

$\Sigma^{(2)}$ and $\Lambda^{(2)}_\nu$ are linked by the Ward-Takahashi identity[2]

$$(2\pi)^4 i\, \Lambda^{(2)}_\nu(p+q,p)\, q^\nu = \Sigma^{(2)}(p+q) - \Sigma^{(2)}(p) \tag{2.17}$$

as in quantum electrodynamics. The relation (2.17) is maintained, if the meson propagator is regularized and leads as usual to the equality of vertex and self-energy renormalization constants,

$$Z = Z_2. \tag{2.18}$$

We find in second order

$$Z - 1 \sim -\frac{g^2}{16\pi^2}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{M^2}{m^2} - \frac{3}{4} + \int_0^1 dx\, x \ln\frac{m^2}{x^2 m^2 + (1-x)\mu^2} + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 dx\, x \frac{x^2 m^2}{x^2 m^2 + (1-x)\mu^2}\right\} \tag{2.19}$$

for large values of the regulator mass M. While Z_2 describes the well-known renormalization of the nucleon field by the interaction with the

meson field, Z is an additional renormalization constant that renormalizes the isotopic spin current (2.2). It is defined by

$$\Lambda_{\nu,\gamma}(p,p)=-(Z-1)\gamma_\nu\frac{\tau_\gamma}{2}. \tag{2.20}$$

The renormalized current is

$$j'_{\mu,\alpha}=Z:\bar{\psi}'\gamma_\mu\frac{\tau_\alpha}{2}\psi':=j_{\mu,\alpha}, \tag{2.21}$$

where

$$\psi'=\frac{1}{\sqrt{Z_2}}\psi \tag{2.22}$$

is the renormalized nucleon field. Due to (2.20) the unrenormalized and the renormalized currents are the same. Hence it follows from (2.14) that

$$(2\pi)^3\langle p,r|j^{(2)}_{\nu,\gamma}(0)|p,r\rangle=0. \tag{2.23}$$

The tensor $T^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ receives contributions from the Feynman graphs of Fig. 3 and the corresponding crossed graphs. (We have not pictured the mass renormalization counter terms):

$$T^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}=-\tfrac{1}{2}\sum_r\bar{u}^{(r)}(p)\Big\{ \tag{2.24}$$

$$\gamma_\mu\frac{\tau_\alpha}{2}\frac{1}{\gamma(p+q)-m}\left(\frac{i}{(2\pi)^4}\Sigma^{(2)}(p+q)-\delta m\right)\frac{1}{\gamma(p+q)-m}\gamma_\nu\frac{\tau_\beta}{2}+ \tag{3a}$$

$$+\Lambda^{(2)}_\mu(p,p+q)\frac{\tau_\alpha}{2}\frac{1}{\gamma(p+q)-m}\gamma_\nu\frac{\tau_\beta}{2}+ \tag{3b}$$

$$+(Z_2-1)\gamma_\mu\frac{\tau_\alpha}{2}\frac{1}{\gamma(p+q)-m}\gamma_\nu\frac{\tau_\beta}{2}+ \tag{3c)+(3d}$$

$$+\gamma_\mu\frac{\tau_\alpha}{2}\frac{1}{\gamma(p+q)-m}\Lambda_\nu(p+q,p)\frac{\tau_\beta}{2}+ \tag{3e}$$

$$+\frac{\tau_\alpha}{2}M^{(2)}_{\mu\nu}(p,q)\frac{\tau_\beta}{2}\Big\}u^{(r)}(p)+\{\alpha,\mu,p+q\leftrightarrow\beta,\nu,p-q\}, \tag{3f}$$

where

$$M^{(2)}_{\mu\nu}(p,q)=\frac{ig^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\gamma_5\frac{\gamma(p-k)+m}{(p-k)^2-m^2}\times$$
$$\times\gamma_\mu\frac{\gamma(p+q-k)+m}{(p+q-k)^2-m^2}\gamma_\nu\frac{\gamma(p-k)+m}{(p-k)^2-m^2}\gamma_5\frac{1}{k^2-\mu^2}. \tag{2.25}$$

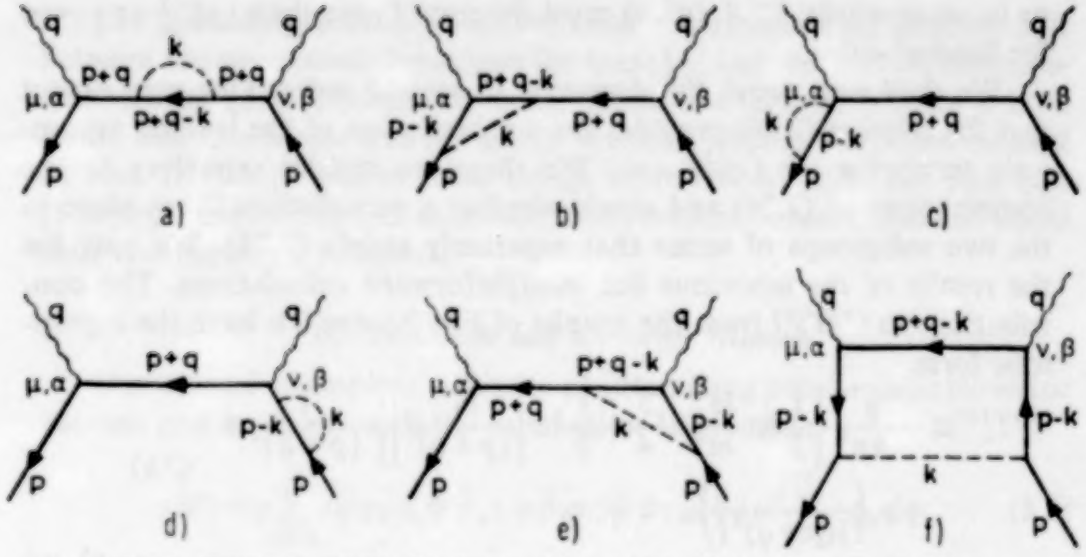


Fig. 3. Feynman graphs for the nucleon matrix element in second order

It can easily be checked that the contributions corresponding to the diagrams (3a)–(3b) and (3c)–(3d) separately satisfy the relation

$$q^{\mu} T^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}=0. \tag{2.26}$$

This follows from the Ward-Takahashi identity (2.17) and its generalization to $M_{\mu\nu}$.

$$q^{\mu} M^{(2)}_{\mu\nu}(p,q)=A^{(2)}_{\nu}(p,p)-A^{(2)}_{\nu}(p+q,p). \tag{2.27}$$

Thus the relation (1.9), which combines the conditions on $T_{\mu\nu,\alpha\beta}$ implied by current conservation and equal time commutation relations, is valid in second order of g. A similar proof applies in all higher orders.

We now turn to the analytic properties required in Sect. I. It is clear that all the contributions to the invariant amplitudes ${}^{(\pm)}T_i$ $(i=1,\ldots,4)$ of (2.24) can be cast for fixed $q^2<0$ into the dispersive form

$${}^{(\pm)}T_i(q^2,(p+q)^2)=\int_{m^2}^{\infty} ds\,\frac{\rho_i(s,q^2)}{s-(p+q)^2-i\varepsilon}, \qquad i=1,\ldots,4, \tag{2.28}$$

if we use the well-known machinery for the analysis of analytic properties of Feynman graphs. Similarly we obtain for the crossed graphs

$${}^{(\pm)}T_i(q^2,(p-q)^2)=\int_{m^2}^{\infty} ds\,\frac{\rho_i(s,q^2)}{s-(p-q)^2-i\varepsilon}, \qquad i=1,\ldots,4. \tag{2.29}$$

Thus the corresponding retarded amplitudes ${}^{(\pm)}R_i(q^2,\nu)$ satisfy dispersion relations in ν of the usual variety. The remaining question is: are all these dispersion relations unsubtracted? If so, (2.13) must hold,

or in other words, ${}^{(-)}R_1(q^2, v)$ must decrease faster than $|v|^{-1}$ as $v \to \infty$ for fixed $q^2 < 0$.

We shall now prove this assertion in second order. One may expect that the relation (2.26) provides for a cancellation of the leading asymptotic terms for $|(p \pm q)^2| \to \infty$. We therefore restrict ourselves to the contributions of (2.26) and check whether a cancellation takes place in the two subgroups of terms that separately satisfy (2.26). We only list the results of the laborious but straightforward calculations. The contributions to ${}^{(\pm)}T_1^{(2)}$ from the graphs of Fig. 3a and 3b have the asymptotic form

$$
\begin{aligned}
{}^{(\pm)}T_1^{(2)} &\cong -\frac{g^2}{4\pi^2}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{M^2}{m^2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{m^2}{(p+q)^2}\right|\right\}\frac{1}{|p+q|^2}+ \qquad (3a)\\
&\quad +o\left(\frac{1}{|(p+q)^2|}\right), \qquad (2.30)\\
{}^{(\pm)}T_1^{(2)} &\cong \frac{g^2}{4\pi^2}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{M^2}{m^2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{m^2}{(p+q)^2}\right|\right\}\frac{1}{|(p+q)^2|}+ \qquad (3b)\\
&\quad +o\left(\frac{1}{|(p+q)^2|}\right)\\
&\qquad \text{for} \quad |(p+q)^2| \to \infty .
\end{aligned}
$$

The sum of the two terms decreases in fact faster than $|(p+q)^2|^{-1}$ as $|(p+q)^2| \to \infty$. In our simple model this holds equally for the symmetric and antisymmetric amplitude ${}^{(\pm)}T_1$. In more complex cases only the antisymmetric part ${}^{(-)}T_1^{(2)}$ has this property as will be seen in Sect. III. Finally we note the asymptotic expressions from the graphs 3c–3f:

$$
\begin{aligned}
{}^{(\pm)}T_1^{(2)} &\cong 4(Z_2-1)\frac{1}{|(p+q)|^2}, \qquad (3c)+(3d)\\
{}^{(\pm)}T_1^{(2)} &\cong \frac{g^2}{4\pi^2}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{M^2}{m^2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{m^2}{|(p+q)^2|}\right\}\frac{1}{|(p+q)^2|}+o, \qquad (3e)\\
{}^{(\pm)}T_1^{(2)} &\cong \frac{g^2}{4\pi^2}\left\{-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{m^2}{(p+q)^2}\right|- \right. \qquad (2.31)\\
&\quad -\frac{3}{2}+\int_0^1 dx\, x(1-x)\ln\frac{m^2}{(1-x)m^2+x\mu^2}+ \qquad (3f)\\
&\quad \left.+\int_0^1 dx\, x\frac{x^2m^2}{x^2m^2+(1-x)\mu^2}\right\}\frac{1}{|(p+q)|^2}+o \quad \text{for} \quad |(p+q)^2| \to \infty .
\end{aligned}
$$

Again the sum decreases faster than $|(p+q)^2|^{-1}$ as can be seen with (2.19). The situation is completely the same for the crossed diagrams. Thus the retarded amplitude ${}^{(-)}R_1$ has the required asymptotic behaviour and (2.13) holds in second order of g.

The preceding discussion makes clear that there is an intimate link between the asymptotic behaviour for large $|\nu|$ and the Ward-Takahashi-like identity (1.9). Because the latter holds in every order there is little doubt that this is also true for (2.13). We shall employ a different method in Sect. III which makes these things more transparent. The sum rule (1.14) is, therefore, in fact equivalent with current conservation and equal time commutation relations.

III. Nucleons and Isovector Mesons

Our second example is a theory of interacting pseudoscalar isovector mesons and nucleons with the interaction Lagrangian

$$\mathscr{L}_I = g \sum_{\alpha=1}^{3} :\bar{\psi}\gamma_5 \tau_\alpha \psi \phi_\alpha: + \delta m :\bar{\psi}\psi: + \tfrac{1}{2}\delta\mu^2 \sum_{\alpha=1}^{3} :\phi_\alpha \phi_\alpha:, \tag{3.1}$$

where ϕ_α and ψ are the unrenormalized field operators of the mesons and nucleons respectively. The isotopic spin current consists of a meson part and a nucleon part [see (1.6a) and (1.6b)]

$$\begin{aligned} j_{\mu,\alpha} &= \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} :\phi_\beta \partial_\mu \phi_\gamma: + :\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\tau_\alpha}{2}\psi: \\ &= i :\phi t_\alpha \partial_\mu \phi: + :\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\tau_\alpha}{2}\psi:, \qquad \alpha = 1,2,3. \end{aligned} \tag{3.2}$$

For the model defined by the interaction Lagrangian (3.1) we investigate only one-meson matrix elements.

The outline of the proof for the second model will be similar to the presentation in Sect. II. But instead of investigating the asymptotic properties of separate graphs we first shall sum up several diagrams and then study the behaviour of these sums for $\nu \to \infty$. For the summation we shall use extensively Ward-Takahashi-like indentities.

The matrix element $T_{\mu\nu,\alpha\beta}$ is defined as in Sect. I (1.2). The zero order contributions exhibited by the Feynman graphs of Fig. 4 are as follows:

$$\begin{aligned} T^{(0)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = {} & t_\alpha t_\beta (2p+q)_\mu \frac{1}{\mu^2 - (p+q)^2 - i\varepsilon}(2p+q)_\nu + \\ & + t_\beta t_\alpha (2p-q)_\nu \frac{1}{\mu^2 - (p-q)^2 - i\varepsilon}(2p-q)_\mu, \end{aligned} \tag{3.3}$$

where μ is the renormalized meson mass. If the naive definition of the time ordered product Eq. (1.4) is used, we encounter in $T^{(0)}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ an additional noncovariant term equal to

$$[t_\alpha, t_\beta]_+ g_{\mu 0} g_{\nu 0}. \tag{3.4}$$

The divergence of the zero order contribution Eq. (3.3) is:

$$-q^{\mu}\, T^{(0)}_{\mu\nu,\alpha\beta}=[t_\alpha, t_\beta]_+\, q_\nu + i\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, t_\gamma\, 2p_\nu\,. \tag{3.5}$$

The identity (1.16) is satisfied for the isotopic spin antisymmetric part. But the right hand side of Eq. (3.5) yields a different isotopic symmetric

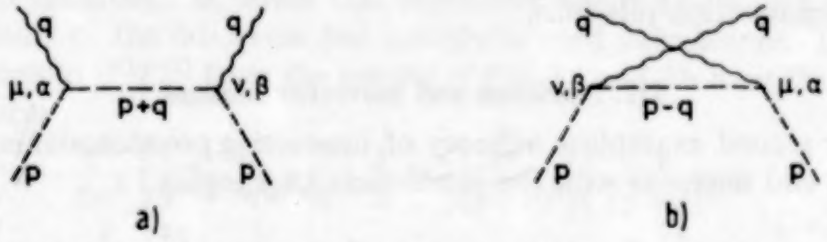


Fig. 4. Feynman graphs for the meson matrix element in zero order

part than the relation (1.16). The difference is accounted for by the additional term (3.4). Now the invariant amplitudes ${}^{(\pm)}T_i^{(0)}$ $(i=1,\ldots,4)$ can be immediately read off from Eq. (3.3), for example

$${}^{(\pm)}T_1^{(0)}=\frac{1}{\mu^2-(p+q)^2-i\varepsilon}\pm\frac{1}{\mu^2-(p-q)^2-i\varepsilon} \tag{3.6}$$

and similar expressions for ${}^{(\pm)}T_i^{(0)}$ $(i=2, 3, 4)$. All ${}^{(0)}T_i^{(0)}$ are zero in this approximation.

As in Sect. II the corresponding retarded amplitudes have the analytic properties required in I and the sum rule (1.14) is valid in zero order

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\nu\, {}^{(-)}A_1^{(0)}(\nu, q^2)=1\,. \tag{3.7}$$

Therefore we must have in all higher orders

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\nu\, {}^{(-)}A_1^{(n)}(\nu, q^2)=0 \qquad n=2,4,\ldots\,. \tag{3.8}$$

The next step is to show that the isotopic spin antisymmetric part of $T_{\mu\nu,\alpha\beta}$ fulfills the relation (1.17) and that the retarded amplitudes ${}^{(-)}R_i(q^2,\nu)$ satisfy unsubtracted dispersion relations in $pq=\nu$ for fixed $q^2<0$. As in Sect. II we prove these properties in second order of g.

The right hand side of (1.17) is given by the Feynman diagrams of Fig. 5 and is equal to the following expression:

$$(2\pi)^3\,\langle p|\, j^{(2)}_{\nu,\gamma}(0)\,|p\rangle = t_\gamma\left(A^{(2)}_\nu(p,p)+2p_\nu\left.\frac{\partial\Sigma^{(2)}}{\partial p^2}\right|_{p^2=\mu^2}\frac{i}{(2\pi)^4}\right), \tag{3.9}$$

where $\Sigma^{(2)}$ is the meson self-energy in second order

$$\Sigma^{(2)}(p) = -g^2 \int d^4k \, \mathrm{Sp}\left(\gamma_5 \frac{1}{\gamma(p+k)-m} \gamma_5 \frac{1}{\gamma k - m}\right) \tag{3.10}$$

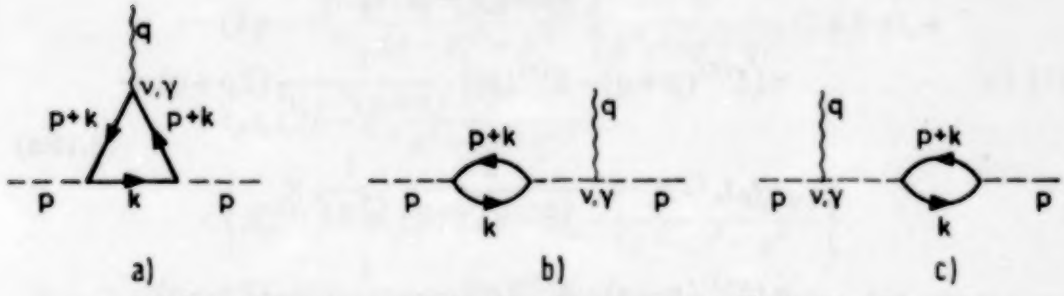


Fig. 5. Feynman graphs for the meson vertex in second order

and $\Lambda_\nu^{(2)}$ the vertex function

$$\Lambda_\nu^{(2)}(p+q, p) = -\frac{i g^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \mathrm{Sp}\left(\gamma_5 \frac{1}{\gamma(p+q+k)-m} \times \right.$$
$$\left. \times \gamma_\mu \frac{1}{\gamma(p+k)-m} \gamma_5 \frac{1}{\gamma k - m}\right). \tag{3.11}$$

As in Sect. II the functions $\Sigma^{(2)}$ and $\Lambda^{(2)}$ obey the Ward-Takahashi identity:

$$(2\pi)^4 i \Lambda_\nu^{(2)}(p+q, p) q^\nu = \Sigma^{(2)}(p+q) - \Sigma^{(2)}(p). \tag{3.12}$$

As usual we get the Ward identity from Eq. (3.12) by differentiation:

$$(2\pi)^4 i \Lambda_\nu^{(2)}(p, p) = \frac{\partial}{\partial p^\nu} \Sigma^{(2)}(p) = 2 p_\nu \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma^{(2)} \tag{3.13}$$

and therefore Eq. (3.9) says that

$$(2\pi)^3 \langle p | j_{\nu,\gamma}^{(2)} | p \rangle = 0, \tag{3.14}$$

just as in the first model. Eq. (3.13) leads to the equality of vertex and meson self-energy renormalization constants

$$Z = Z_3, \tag{3.15}$$

if the functions $\Sigma^{(2)}$ and $\Lambda_\nu^{(2)}$ are regularized in such a way that Eq. (3.12) is maintained. Then as in Sect. II, due to the relation (3.15), the unrenormalized and the renormalized currents are the same.

The Feynman graphs in Fig. 6 which give the contributions to $T_{\mu\nu,\alpha\beta}^{(2)}$ in second order will be considered in two groups. The first group consists

of the diagrams a) and b) and the second group is the rest of the graphs in Fig. 6. The diagram a) and the corresponding crossed one are:

$$T^{(2a)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = -t_\alpha t_\beta (2p+q)_\mu \frac{1}{(p+q)^2-\mu^2} \frac{i}{(2\pi)^4} \times$$
$$\times (\Sigma^{(2)}(p+q)-\Sigma^{(2)}(p)) \frac{1}{(p+q)^2-\mu^2} (2p+q)_\nu -$$
$$-t_\beta t_\alpha (2p-q)_\nu \frac{1}{(p-q)^2-\mu^2} \frac{i}{(2\pi)^4} \times \tag{3.16a}$$
$$\times (\Sigma^{(2)}(p-q)-\Sigma^{(2)}(p)) \frac{1}{(p-q)^2-\mu^2} (2p-q)_\mu ,$$

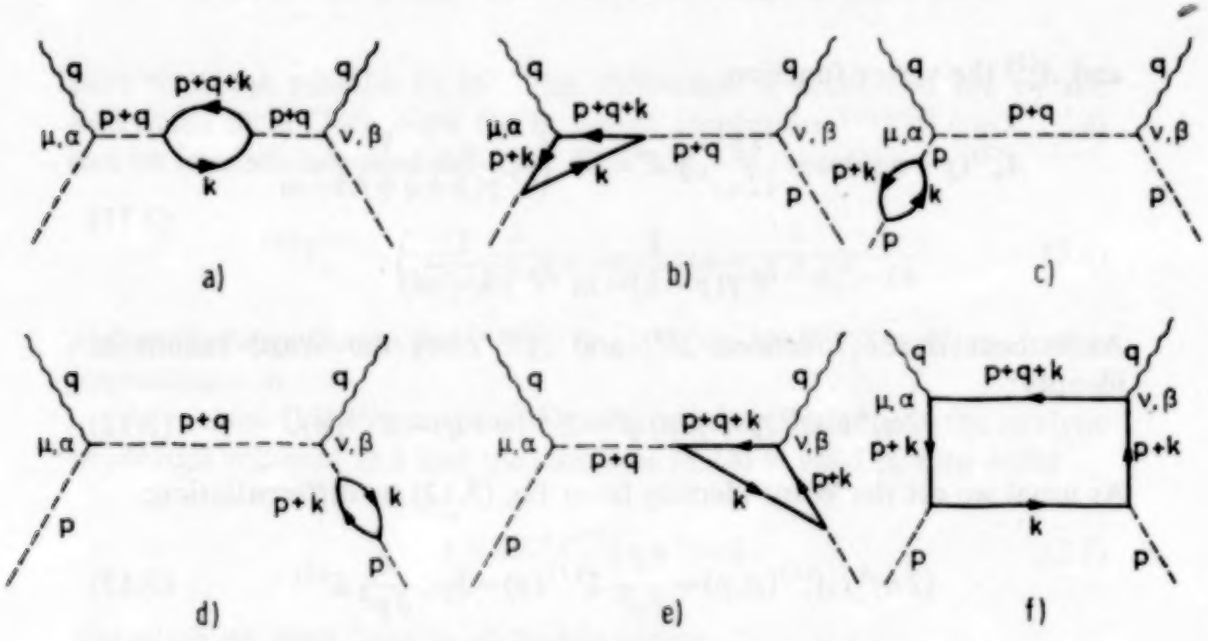


Fig. 6. Feynman graphs for the meson matrix element in second order

whereas diagram b) and the corresponding crossed one are equal to:

$$T^{(2b)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = -t_\alpha t_\beta \Lambda^{(2)}_\mu (p, p+q) \frac{1}{(p+q)^2-\mu^2} (2p+q)_\nu -$$
$$-t_\beta t_\alpha (2p-q)_\nu \frac{1}{(p-q)^2-\mu^2} \Lambda^{(2)}_\mu (p-q, p). \tag{3.16b}$$

The Ward-Takahashi identity Eq. (3.12) allows us to express $\Sigma^{(2)}(p+q)-\Sigma^{(2)}(p)$ by the divergence of the corresponding vertex function $\Lambda^{(2)}$. Then in both contributions, a) and b), the same vertex functions appear.

The sum of a) and b) is:

$$T^{(2a+2b)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = t_\alpha t_\beta \left\{ \Lambda^{(2)}_\mu(p, p+q) - \right.$$
$$\left. -(2p+q)_\mu \frac{q^\mu \Lambda^{(2)}_\mu(p, p+q)}{(p+q)^2-\mu^2} \right\} \frac{1}{\mu^2-(p+q)^2} (2p+q)_\nu +$$
$$+ t_\beta t_\alpha (2p-q)_\nu \frac{1}{\mu^2-(p-q)^2} \times \tag{3.17}$$
$$\times \left\{ \Lambda^{(2)}_\mu(p-q, p) + (2p-q)_\mu \frac{q^\mu \Lambda^{(2)}_\mu(p-q, p)}{(p-q)^2-\mu^2} \right\}.$$

Eq. (3.17) can be simplified by introducing the following decomposition of $\Lambda^{(2)}_\mu(p', p)$ into invariant functions $\Lambda^{(2)}_\pm(p', p)$:

$$\Lambda^{(2)}_\mu(p', p) = (p'+p)_\mu \Lambda^{(2)}_+(p', p) + (p'-p)_\mu \Lambda^{(2)}_-(p', p). \tag{3.18}$$

It is easily shown that the expression on the right hand side of Eq. (3.17) is identical to:

$$T^{(2a+2b)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = t_\alpha t_\beta \Lambda^{(2)}_-(p, p+q) \times$$
$$\times \left[(2p+q)_\mu \frac{q^2}{(p+q)^2-\mu^2} - q_\mu \right] \frac{1}{\mu^2-(p+q)^2} (2p+q)_\nu -$$
$$- t_\beta t_\alpha (2p-q)_\nu \frac{1}{\mu^2-(p-q)^2} \times \tag{3.19}$$
$$\times \left[(2p-q)_\mu \frac{q^2}{(p-q)^2-\mu^2} + q_\mu \right] \Lambda^{(2)}_-(p-q, p).$$

Since $p^2 = \mu^2$ the sum of the contributions a) and b) has zero divergence

$$q^\mu T^{(2a+2b)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = 0. \tag{3.20}$$

$\Lambda^{(2)}_-$, a function of q^2 and pq, has been calculated in terms of an integral representation whose asymptotic properties for $pq = \nu \to \infty$ were studied. It is found that $\Lambda^{(-)}$ behaves for $\nu \to \infty$ like $\ln \nu$. Then it follows from Eq. (3.19) that the invariant function $T^{(2)}_1(\nu, q^2)$ in $T^{(2a+2b)}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ decreases faster than $|\nu|^{-1}$ for $|\nu| \to \infty$. We remark that the diagrams a) and b) seperately are logarithmically divergent. It is well known that the divergent contributions cancel each other in the sum of vertex and self-energy corrected graphs due to the Ward identity. Our derivation shows that the same mechanism leads to a better asymptotic behaviour of the invariant functions than would be expected from the convergent contributions of the graphs a) and b) seperately.

In $T^{(2a+2b)}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ the isotopic spin symmetric and antisymmetric part of $T^{(2)}_1$ have the nice asymptotic behaviour $\ln \nu/\nu^2$ for $\nu \to \infty$. Unfortunately in the sum of the contributions from graphs c), d), e) and f) the antisymmetric part ${}^{(-)}T^{(2)}_1$ has this asymptotic property whereas the symmetric part ${}^{(+)}T^{(2)}_1$ still diverges.

The diagrams contributing to ${}^{(-)}T_{\mu\nu,\alpha\beta}$ and their corresponding crossed ones are:

$$\begin{aligned} T^{(2c+2d)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}[t_\alpha, t_\beta]_+ \Big\{ & (2p+q)_\mu \frac{1}{\mu^2-(p+q)^2}(2p+q)_\nu \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial p^2}\Sigma^{(2)} + \\ & + (2p-q)_\nu \frac{1}{\mu^2-(p-q)^2}(2p-q)_\mu \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial p^2}\Sigma^{(2)}\Big\} + \\ & + \frac{1}{2}[t_\alpha, t_\beta]\Big\{(2p+q)_\mu \frac{1}{\mu^2-(p+q)^2}(2p+q)_\nu \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial p^2}\Sigma^{(2)} - \\ & - (2p-q)_\nu \frac{1}{\mu^2-(p-q)^2}(2p-q)_\mu \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial p^2}\Sigma^{(2)}\Big\}, \end{aligned} \tag{3.21a}$$

$$\begin{aligned} T^{(2e)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}[t_\alpha, t_\beta]_+ \Big\{ & (2p+q)_\mu \frac{1}{\mu^2-(p+q)^2}\Lambda^{(2)}_\nu(p+q,p) + \\ & + \Lambda^{(2)}_\nu(p,p-q)\frac{1}{\mu^2-(p-q)^2}(2p-q)_\mu\Big\} + \\ & + \frac{1}{2}[t_\alpha, t_\beta]\Big\{(2p+q)_\mu \frac{1}{\mu^2-(p+q)^2}\Lambda^{(2)}_\nu(p+q,p) - \\ & - \Lambda^{(2)}_\nu(p,p-q)\frac{1}{\mu^2-(p-q)^2}(2p-q)_\mu\Big\}, \end{aligned} \tag{3.21b}$$

$$\begin{aligned} T^{(2f)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = & -\tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\{M^{(2)}_{\mu\nu}(p,q) + M^{(2)}_{\nu\mu}(p,-q)\} - \\ & - \tfrac{1}{2}[t_\alpha, t_\beta]\{M^{(2)}_{\mu\nu}(p,q) - M^{(2)}_{\nu\mu}(p,-q)\}, \end{aligned} \tag{3.21c}$$

where

$$\begin{aligned} M^{(2)}_{\mu\nu}(p,q) = -\frac{ig^2}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \mathrm{Sp}\Big(\gamma_5 \frac{1}{\gamma(p+k)-m}\times \\ \times\gamma_\mu \frac{1}{\gamma(p+q+k)-m}\gamma_\nu \frac{1}{\gamma(p+k)-m}\gamma_5 \frac{1}{\gamma k - m}\Big). \end{aligned} \tag{3.22}$$

As in Sect. II $M^{(2)}_{\mu\nu}(p,q)$ obeys also a Ward-Takahashi identity:

$$\begin{aligned} q^\mu M^{(2)}_{\mu\nu}(p,q) &= \Lambda^{(2)}_\nu(p,p) - \Lambda^{(2)}_\nu(p+q,p) \\ \text{and} \qquad M^{(2)}_{\nu\mu}(p,q)\, q^\mu &= \Lambda^{(2)}_\nu(p,p) - \Lambda^{(2)}_\nu(p,p+q). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Now we sum up all contributions of c), d), e) and f) proportional to $[t_\alpha, t_\beta]$. For this purpose we express

$$2p_\nu \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma^{(2)}$$

by $\Lambda_\nu^{(2)}(p,p)$ according to Eq. (3.13). Then in the sum of c), d) and e) the vertex functions $\Lambda_\nu^{(2)}$ can be replaced by the divergence of $M_{\mu\nu}^{(2)}$ by means of Eq. (3.23). The last step is to add the contribution of (3.21c) and to introduce the invariant functions $M_i^{(2)}(p,q)$ and $\tilde{M}_i^{(2)}(p,q) = M_i^{(2)}(p,-q)$ respectively which represent the decomposition of $M_{\mu\nu}^{(2)}(p,q)$:

$$M_{\mu\nu}^{(2)}(p,q) = M_1^{(2)} p_\mu p_\nu + M_2^{(2)} q_\mu q_\nu + M_3^{(2)} g_{\mu\nu} + M_4^{(2)}(p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu). \quad (3.24)$$

Then the result for ${}^{(-)}T_{\mu\nu}^{(2c+2d+2e+2f)}$ is:

$$\begin{aligned}
{}^{(-)}T_{\mu\nu}^{(2c+2d+2e+2f)} = \frac{1}{4}\Bigg\{ & \left(q_\mu + (2p+q)_\mu \frac{q^2}{\mu^2-(p+q)^2}\right) \times \\
& \times \left(\left(\tfrac{1}{2}M_1 - M_4\right) p_\nu + \left(\tfrac{1}{2}M_4 - M_2\right) q_\nu\right) - \\
& - M_3 g_{\mu\nu} + (2p+q)_\mu q_\nu \frac{1}{\mu^2-(p+q)^2}\left(\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial p^2}\Sigma^{(2)} - M_3\right) - \\
& - \left(q_\mu - (2p-q)_\mu \frac{q^2}{\mu^2-(p-q)^2}\right)\left(\left(\tfrac{1}{2}\tilde{M}_1 - \tilde{M}_4\right) p_\nu - \left(\tfrac{1}{2}\tilde{M}_4 - \tilde{M}_2\right) q_\nu\right) + \\
& + \tilde{M}_3 g_{\mu\nu} + (2p-q)_\mu q_\nu \frac{1}{\mu^2-(p-q)^2}\left(\frac{i}{(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial p^2}\Sigma^{(2)} - \tilde{M}_3\right)\Bigg\}.
\end{aligned} \quad (3.25)$$

One verifies easily that

$$q^\mu {}^{(-)}T_{\mu\nu}^{(2c+2d+2e+2f)} = 0 \quad (3.26)$$

so that together with Eq. (3.20)

$$q^\mu {}^{(-)}T_{\mu\nu}^{(2)} = 0. \quad (3.27)$$

We remark that the right hand side of Eq. (3.25) is a finite quantity. The divergent term proportional to

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Sigma^{(2)}$$

is cancelled by an identical term contained in M_3.

The asymptotic behaviour of ${}^{(-)}T^{(2)}$ for $\nu \to \infty$ now depends on the asymptotic property of the amplitude $\frac{1}{2}M_1 - M_4$. This function behaves

for $\nu \to \infty$ like:

$$(\tfrac{1}{2} M_1 - M_4) \cong c_1 + c_2 \frac{\ln \nu}{\nu}, \tag{3.28}$$

where c_1 and c_2 do not depend on ν. The amplitude $(\frac{1}{2} \tilde{M}_1 - \tilde{M}_4)$ has the same asymptotic behaviour with a different constant c_2 but the same constant c_1. The terms in the right hand side of Eq. (3.25) proportional to c_1 cancel each other. Therefore ${}^{(-)}T_1^{(2)}$ decreases for $\nu \to \infty$ at least like $\ln \nu / \nu^2$.

Concerning the analytic properties of the invariant amplitudes ${}^{(-)}R_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ we refer to the discussion in Sect. II which is valid also for the invariant amplitudes of the second model. The unsubtractedness of the dispersion relations for ${}^{(-)}R_i^{(2)}(q^2, \nu)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ then follows from the asymptotic property of ${}^{(-)}T_1^{(2)}$ as explained in Sect. II.

Autorenverzeichnis des 202. Bandes

ALDER, K. s. PAULI, H.-C. 255

AMIET, J.-P.: Zur mikroskopischen Beschreibung der kollektiven Kern-Zustände. 150

ARMENTEROS, R., M. FERRO-LUZZI, D. W. G. LEITH, R. LEVI-SETTI, A. MINTEN, R. D. TRIPP, H. FILTHUTH, V. HEPP, E. KLUGE, H. SCHNEIDER, R. BARLOUTAUD, P. GRANET, J. MEYER, and J. P. PORTE: A Study of the Reaction $K^- p \to Y_1^*(1385) + \pi$ between 780 and 1220 MeV/c. 486

BARLOUTAUD, R. s. ARMENTEROS, R., M. FERRO-LUZZI, D. W. G. LEITH, R. LEVI-SETTI, A. MINTEN, R. D. TRIPP, H. FILTHUTH, V. HEPP, E. KLUGE, H. SCHNEIDER, P. GRANET, J. MEYER, and J. P. PORTE. 486

BECK, F., J. BIRKHOLZ, and P. MANAKOS: Coupling of Core Excitation and Single-Particle Motion in Odd-A-Nuclei. 89

BETHGE, K., G. GÜNTHER, K. R. SCHUBERT und E. SPETH: Spinbestimmung des Grundzustandes von ^{10}B durch Mottstreuung. 70

BIERTER, W., and K. DIETRICH: One-Dimensional Model of Deuteron-Potential Scattering. 74

BIRKHOLZ, J. s. BECK, F., and P. MANAKOS. 89

BÖCKMANN, K., W. SANDHAS, and H. WESSEL: Photoproduction of $N^*(1236)$ by Polarized γ-Quanta. 477

BRAUNSFURTH, J., J. MORGENSTERN H. SCHMIDT und H. J. KÖRNER: Untersuchung gestörter Winkelverteilungen an F^{19} in ferromagnetischen Gittern. 321

BRENIG, W.: Shell Model Approach to Intermediate Resonances. 340

BUCKA, H., J. NEY und K. P. WIRTNIK: Hyperfeinstrukturanomalie und Kernquadrupolwechselwirkungskonstanten des angeregten $3d^9\,4s\,4p\,{}^4P_{\frac{1}{2}}$-Terms im Cu I-Spektrum von Cu^{63} und Cu^{65}. 22

DANOS, M., and W. GREINER: Treatment of Nuclear Reactions Above the Two-Particle Threshold. 125

DIETRICH, K. s. BIERTER, W. 74

DRECHSEL, D. s. SEABORN, J. B., and W. GREINER. 32

EBENHÖH, W., W. GLÖCKLE, J. HÜFNER, and H. A. WEIDENMÜLLER: A Shell-Model Calculation in the Continuum for the Reaction $N^{15}(n, n')N^{15*}$. 301

EICHLER, J.: On Corrections due to Higher-Order Electromagnetic Transitions in Nuclei. 49

EISENBEISS, G. s. HÖHLER, G. 397

FERRO-LUZZI, M. s. ARMENTEROS, R., D. W. G. LEITH, R. LEVI-SETTI, A. MINTEN, R. D. TRIPP, H. FILTHUTH, V. HEPP, E. KLUGE, H. SCHNEIDER, R. BARLOUTAUD, P. GRANET, J. MEYER, and J. P. PORTE. 486

FILTHUTH, H. s. ARMENTEROS, R., M. FERRO-LUZZI, D. W. G. LEITH, R. LEVI-SETTI, A. MINTEN, R. D. TRIPP, V. HEPP, E. KLUGE, H. SCHNEIDER, R. BARLOUTAUD, P. GRANET, J. MEYER, and J. P. PORTE. 486

FITZ, W., J. HEGER, R. JAHR und R. SANTO: Untersuchung der Niveaustruktur von ^{53}Cr und ^{52}Cr mit (d, d') und (d, t)-Reaktionen. 109

FRANZ, W.: Bhabha-Gleichung und imaginäre Parität von Fermionen. 412

GENTNER, W. s. KIRSTEN, T., und O. A. SCHAEFFER. 273

GERLACH, B., D. GROMES und J. PETZOLD: Eine kritische Analyse der Ladungsdichte des Klein-Gordon-Feldes. 401

GLÖCKLE, W. s. EBENHÖH, W., J. HÜFNER, and H. A. WEIDENMÜLLER. 301

Granet, P. s. Armenteros, R., M. Ferro-Luzzi, D. W. G. Leith, R. Levi-Setti, A. Minten, R. D. Tripp, H. Filthuth, V. Hepp, E. Kluge, H. Schneider, R. Barloutaud, J. Meyer, and J. P. Porte. 486
Greiner, W. s. Danos, M. 125
— s. Seaborn, J. B., and D. Drechsel. 32
Gromes, D. s. Gerlach, B., und J. Petzold. 401
Grotch, H., and D. R. Yennie: Nuclear Motion Corrections to the Binding Energy in Hydrogen. An Effective Potential Approach. 425
Günther, G. s. Bethge, K., K. R. Schubert und E. Speth. 70
Hara, K.: Number-Conserving Approach to the Pairing-Force Model. II. Coupled Degenerate Model. 504
Hatch, E. N. s. Nelson, G. C. 293
Hefft, K., and B. Stech: Mass Differences and Vector Currents. 514
Heger, J. s. Fitz, W., R. Jahr und R. Santo. 109
Hepp, V. s. Armenteros, R., M. Ferro-Luzzi, D. W. G. Leith, R. Levi-Setti, A. Minten, R. D. Tripp, H. Filthuth, E. Kluge, H. Schneider, R. Barloutaud, P. Granet, J. Meyer, and J. P. Porte. 486
Hertel, P.: Non-Hermitian Weak Hadronic Current and the $\Sigma \to \Lambda$ Leptonic Decay. 383
Hinterberger, F., G. Mairle, U. Schmidt-Rohr, P. Turek, and G. J. Wagner: Shell Structure Studies in the Titanium Region with 52 MeV Deuterons. 236
Höhler, G., and G. Eisenbeiss: Analysis of the $\pi^{\pm} p$ Polarization Data at High Energies. 397
Hüfner, J. s. Ebenhöh, W., W. Glöckle, and A. Weidenmüller. 301
Jahr, R. s. Fitz, W., J. Heger und R. Santo. 109
Kirsten, T., W. Gentner und O. A. Schaeffer: Massenspektrometrischer Nachweis von $\beta\beta$-Zerfallsprodukten. 273
Kissler, K. H. s. Kose, R., W. Paul, and K. Stockhorst. 364
Kluge, E. s. Armenteros, R., M. Ferro-Luzzi, D. W. G. Leith, R. Levi-Setti, A. Minten, R. D. Tripp, H. Filthuth, V. Hepp, H. Schneider, R. Barloutaud, P. Granet, J. Meyer, and J. P. Porte. 486
Körner, H, J. s. Braunsfurth, J., J. Morgenstern und H. Schmidt. 321
Kokott, T. P., M. P. Locher, and H. Rollnik: The Reaction $\gamma\, {}^4\mathrm{He} \to {}^3\mathrm{H}\, n\pi^+$ in Impulse Approximation. 436
Koppe, H.: Der Einfluß von Spannungsschwankungen auf die Aufladezeit eines Kondensators. 498
Korth, W. s. Schwela, D., H. Rollnik, and R. Weizel. 452
Kose, R., W. Paul, K. Stockhorst and K. H. Kissler: Photodisintegration of the Deuteron from 100 to 420 MeV. 364
Kramer, G., and K. Meetz: Sum Rules in Perturbation Theory. 525
Langenberg, M., und H. Steinwedel: Bemerkung zu den Punkttransformationen in der Quantentheorie. 118
Leith, D. W. G. s. Armenteros, R., M. Ferro-Luzzi, R. Levi-Setti, A. Minten, R. D. Tripp, H. Filthuth, V. Hepp, E. Kluge, H. Schneider, R. Barloutaud, P. Granet, J. Meyer, and J. P. Porte. 486
Levi-Setti, R. s. Armenteros, R., M. Ferro-Luzzi, D. W. G. Leith, A. Minten, R. D. Tripp, H. Filthuth, V. Hepp, E. Kluge, H. Schneider, R. Barloutaud, P. Granet, J. Meyer, and J. P. Porte. 486
Lipkin, H. J.: Some Implications of the Quark Model for High Energy Scattering. 414
Lipperheide, R.: A Semi-Phenomenological Nuclear Optical-Model Potential. 58
Locher, M. P. s. Kokott, T. P., and H. Rollnik. 436
Lüders, G.: Temperature Dependence of Upper Critical Fields for Clean Superconductors of the Second Kind. 8
Ma, C. W. s. Rasmussen, J. O. 182
Mahaux, C., and H. A. Weidenmüller: Isospin Purity of the Isobaric Analogue Resonances for Several Open Channels. 97
Mairle, G. s. Hinterberger, F., U. Schmidt-Rohr, P. Turek, and G. J. Wagner. 236
Manakos, P. s. Beck, F., and J. Birkholz. 89
Meetz, K. s. Kramer, G. 525

Meyer, J. s. Armenteros, R., M. Ferro-Luzzi, D. W. G. Leith, R. Levi-Setti, A. Minten, R. D. Tripp, H. Filthuth, V. Hepp, E. Kluge, H. Schneider, R. Barloutaud, P. Granet, and J. P. Porte. 486
Minten, A. s. Armenteros, R., M. Ferro-Luzzi, D. W. G. Leith, R. Levi-Setti, R. D. Tripp, H. Filthuth, V. Hepp, E. Kluge, H. Schneider, R. Barloutaud, P. Granet, J. Meyer, and J. P. Porte. 486
Morgenstern, J. s. Braunsfurth, J., H. Schmidt und H. J. Körner. 321
Moszkowski, S. A. s. Yucker, W., and A. Plastino. 177
Müller, V. F., and J. Rothleitner: The Adler-Weisberger Sum Rule. 349
Nelson, G. C., and E. N. Hatch: Concerning Internal Conversion Coefficients in Hf^{180}. 293
Ney, J. s. Bucka, H., und K. P. Wirtnik. 22
Parsons, R. G., and V. F. Weisskopf: The Spectrum of Alkali-Atoms. 492
Paul, W. s. Kose, R., K. Stockhorst, and K. H. Kissler. 364
Pauli, H.-C., and K. Alder: Investigation of Anomalous *K*, *L* and *M* Shell Conversion in Electric Dipole Transitions. 255
Petzold, J. s. Gerlach, B., und D. Gromes. 401
Plastino, A. s. Yucker, W., and S. A. Moszkowski. 177
Porte, J. P. s. Armenteros, R., M. Ferro-Luzzi, D. W. G. Leith, R. Levi-Setti, A. Minten, R. D. Tripp, H. Filthuth, V. Hepp, E. Kluge, H. Schneider, R. Barloutaud, P. Granet, and J. Meyer. 486
Powers, R. J., and V. L. Telegdi: Interpretation of the Experimental Evidence Concerning the Quadrupole Moment of Bi^{209}. — A Test of the Shell Model. 214
Rasmussen, J. O., and C. W. Ma: On the Influence of Shell Structure and Matrix Element Fluctuations on the Pairing Correlation in Nuclei. 182
Rollnik, H. s. Kokott, T. P., and M. P. Locher. 436
— s. Schwela, D., R. Weizel, and W. Korth. 452
Rothleitner, J. s. Müller, V. F. 349
Sandhas, W. s. Böckmann, K., and H. Wessel. 477
Santo, R. s. Fitz, W., J. Heger und R. Jahr. 109
Schaeffer, O. A. s. Kirsten, T., und W. Gentner. 273
Schmidt, H. s. Braunsfurth, J., J. Morgenstern und H. J. Körner. 321
Schmidt-Rohr, U. s. Hinterberger, F., G. Mairle, P. Turek, and G. J. Wagner. 236
Schneider, H. s. Armenteros, R., M. Ferro-Luzzi, D. W. G. Leith, R. Levi-Setti, A. Minten, R. D. Tripp, H. Filthuth, V. Hepp, E. Kluge, R. Barloutaud, P. Granet, J. Meyer, and J. P. Porte. 486
Schubert, K. R. s. Bethge, K., G. Günther und E. Speth. 70
Schwela, D., H. Rollnik, R. Weizel, and W. Korth: Evaluation of Multipoles for Photo- and Electroproduction of Pions. I. Theoretical Background. 452
Seaborn, J. B., D. Drechsel, and W. Greiner: Collective Intermediate Structure in the Giant Resonance of ^{28}Si. 32
Speth, E. s. Bethge, K., G. Günther und K. R. Schubert. 70
Stech, B. s. Hefft, K. 514
Steinwedel, H. s. Langenberg, M. 118
Stockhorst, K. s. Kose, R., W. Paul, and K. H. Kissler. 364
Suess, H. E.: Zur Chronologie des alten Ägypten. 1
Telegdi, V. L. s. Powers, R. J. 214
Theissen, H.: Messung der Kernradiusdifferenzen von ^{46}Ti, ^{48}Ti und ^{50}Ti durch elastische Elektronenstreuung. 190
Tripp, R. D. s. Armenteros, R., M. Ferro-Luzzi, D. W. G. Leith, R. Levi-Setti, A. Minten, H. Filthuth, V. Hepp, E. Kluge, H. Schneider, R. Barloutaud, P. Granet, J. Meyer, and J. P. Porte. 486
Turek, P. s. Hinterberger, F., G. Mairle, U. Schmidt-Rohr, and G. J. Wagner. 236

Unsöld, A.: Zur stellaren Häufigkeitsverteilung und Entstehung der chemischen Elemente. 13
Wagner, G.J. s. Hinterberger, F., G. Mairle, U. Schmidt-Rohr, and P. Turek. 236
Weidenmüller, H.A. s. Ebenhöh, W., W. Glöckle, and J. Hüfner. 301
— s. Mahaux, C. 97
Weisskopf, V.F. s. Parsons, R.G. 492
Weizel, R. s. Schwela, D., H. Rollnik, and W. Korth. 452
Wessel, H. s. Böckmann, K., and W. Sandhas. 477
Wild, W.: Zur Abspaltung der Schwerpunktsbewegung in der Schalenmodellbeschreibung von Kernreaktionen. 220
Wirtnik, K.P. s. Bucka, H., und J. Ney. 22
Yennie, D.R. s. Grotch, H. 425
Yucker, W., A. Plastino, and S.A. Moszkowski: Surface Delta Interaction and Electromagnetic Transitions in Tin and Lead Isotopes. 177
Zeh, H.D.: Symmetrieverletzende Modellzustände und kollektive Bewegungen. 38

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

Stuart: Molekülstruktur

Physikalische Methoden zur Bestimmung der Struktur von Molekülen und ihre wichtigsten Ergebnisse

Von Dr. H. A. Stuart,
o. Professor für Chemische Physik an der Universität Mainz.
Dritte, neubearbeitete Auflage. Unter Mitarbeit von Dr. E. Funck, Privatdozent für Physikalische Chemie an der Universität Freiburg i. Br., und
Dr. W. Müller-Warmuth,
EURATOM CCR,
Ispra/Italien,
Privatdozent für Physik an der Universität Mainz

•

Mit 154 Abbildungen
XVI, 562 Seiten Gr.-8°
1967. Gebunden DM 68,—
US $ 17.00

Bei der Neuauflage dieses Buches sollte der Charakter einer allgemeinen Einführung in die physikalischen Methoden zur Untersuchung der Struktur des freien Moleküls beibehalten werden. Angesichts des gewaltigen Anwachsens von Zahlenmaterial und Literatur würde ein Werk im alten Stil mehrere Bände umfassen. Deshalb mußte beim Zahlenmaterial, vor allem da, wo heute neue Tabellenwerke vorliegen, sowie bei der Darstellung der älteren Methoden erheblich gekürzt werden. Nur dadurch konnte Platz für die Darstellung neuer Methoden und neuer Erkenntnisse gewonnen werden.

Inhaltsübersicht: Einleitung. Valenz- und Molekularkräfte. Größe und Form der Moleküle. Das Kerngerüst der Moleküle. Bestimmung von Strukturparametern mit hochfrequenzspektroskopischen Methoden. Die innere Beweglichkeit der Moleküle und deren statistische Form. Dielektrizitätskonstante, elektrisches Moment und Molekülstruktur. Lichtstreuung, Polarisierbarkeit und Molekülstruktur. Elektrische Doppelbrechung, optische Anisotropie und Molekülstruktur. Eigenschwingungen des Kerngerüstes. Namen- und Sachverzeichnis.

Dieses Buch erschien in 2. Auflage als I. Band der Reihe „Die Physik der Hochpolymeren".

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

Landolt-Börnstein

Neue Serie / New Series

Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaften und Technik
Numerical Data and Functional Relationship in Science and Technology

Gesamtherausgabe / Editor in Chief: **K.-H. Hellwege**

Gruppe II:
Atom- und Molekularphysik

Band 3:

Lumineszenz organischer Substanzen

Von A. Schmillen und R. Legler

Herausgeber: K.-H. Hellwege und A. M. Hellwege

Mit 270 Abbildungen. VIII, 416 Seiten 4°
1967. Gebunden DM 196,—

Inhaltsübersicht

Lumineszenz organischer Substanzen: Einleitung. Absorption, Emission, Abklingdauer, Quantenausbeute, und weitere Angaben zur Fluoreszenz und Phosphoreszenz (Haupttabelle). Lumineszenzspektren. Speziellere Daten über die Lumineszenzzentren (Lumineszenzmoleküle einschließlich der Umgebung). Zwischenmolekulare Wechselwirkung im angeregten Zustand. Verwendung lumineszierender organischer Substanzen in der Szintillationstechnik. Die Zerstörung von Leuchtstoffen durch energiereiche Strahlung. Literaturverzeichnis. Substanzenverzeichnis.

■ **Bitte Prospekt anfordern!**

Group II:
Atomic and Molecular Physics

Volume 3:

Luminescence of Organic Substances

By A. Schmillen and R. Legler

Editors: K.-H. Hellwege and A. M. Hellwege

With 270 figures. VIII, 416 pages 4to
1967. Cloth US $ 49.00

Contents

Luminescence of organic substances: Introduction. Absorption, emission, decay time, quantum efficiency, and further information on fluorescence and phosphorescence (main table). Luminescence spectra. Special data on the luminescence centers (luminescent molecules and their environment). Intermolecular processes in the excited state. Application of luminescent organic substances in the scintillation technique. Reduction of luminescence by radiation damage. References. List of substances.

■ **Prospectus on request!**

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Edgar Seidler, 1 Berlin 31 (Wilmersdorf), Heidelberger Platz 3
Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York
Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG, Würzburg
Printed in Germany